ADNOTATIONES

ADNOTAT. post Cap. II. Part. I.

I.

Proposita sit differentialis aequatio $dy + yXdx = Zdx$, in qua X & Z functiones quascunque exprimunt variabilis x: constat huius aequationis integrationem obtineri ponendo $y = uz$, ex quo oritur $udz + zdu + uzXdx = Zdx$, ubi per idoneum quantitatis u, vel z valorem possunt bini termini nihilo aequari. Assumamus igitur $zdu + uzXdx = 0$; & dividendo per z fiet $du + uXdx = 0$, & consequenter $\frac{du}{u} = -Xdx$, atque hinc capto integrali prodibit $lu = -\int Xdx$, hoc est $u = e^{-\int Xdx}$, sumto nimirum e aequali logarithmorum hyperbolicorum basi. Hisce peractis proposita aequatio convertitur in $udz = Zdx$, unde habetur $dz = \frac{Zdx}{u}$, & integrando $z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, ac denique $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$

2. Si nunc methodus haec diligenter perpendatur, liquido apparebit, eandem felici exitu ad aequationes illas differentiales transferri posse, quae eandem habentes formam, quam aequatio praecedens, finitis tamen differentiis donantur. Esto igitur aequatio $\Delta y + My\Delta x = N\Delta x$, seu $\Delta y + My = N$ (sumto nimirum Δx pro unitate), in qua quantitates M & N functiones designant variabilis cuiuslibet x. Fiat primo $y = uz$, & erit in hac differentiarum finitarum hypothesi

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z;$$

atque hinc aequatio abibit in

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Muz = N.$$

Po-

Ponamus ut ante terminos binos $z\Delta u + Muz = 0$, & orietur $\Delta u + Mu = 0$, seu $\frac{\Delta u}{u} = -M$: ad hanc aequationem in hac hypothesi differentiae finitae Δu integrandam assumo $u = e^t$, & nanciscor $u + \Delta u = e^{t+\Delta t}$, & $\Delta u = e^t\,(e^{\Delta t} - 1)$; ex quo fit $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -M$, seu $e^{\Delta t} = 1 - M$, captisque logarithmis $\Delta t = l\,(1 - M)$, & consequenter instituta integratione habebimus $t = \Sigma\, l\,(1 - M)$. Est autem, ut ex Analysi constat, aggregatum ex logarithmis plurium numerorum aequale logarithmo producti horum omnium numerorum; si igitur generatim per $\pi(1 - M)$ exprimamus productum continuum quantitatum omnium contentarum in formula $1 - M$, orietur $t = l\,\pi\,(1 - M)$; & propterea $u = e^t = \pi\,(1 - M)$. Iam praedictis duobus terminis nullescentibus superior aequatio mutatur in $u\Delta z + \Delta u \Delta z = N$, unde eruitur $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, & integrando $z = \Sigma\, \frac{N}{u + \Delta u}$. Sed cum iam invenerimus $u = \pi\,(1 - M)$, si terminus post M proxime subsequens designetur per M', prodit $u + \Delta u = \pi(1 - M')$; ideoque $z = \Sigma\, \frac{N}{\pi\,(1 - M')}$, & quia $y = zu$, fit

$$y = \pi\,(1 - M)\, \Sigma\, \frac{N}{\pi(1 - M')},$$

sive addita constante quacunque A consequemur

$$y = \pi\,(1 - M)\left(A + \Sigma\, \frac{N}{\pi(1 - M')}\right).$$

EXEMPLUM.

Sit proposita aequatio $y + (x + 1)\Delta y + a(2x + 1) = 0$, *quaeraturque valor separatus ipsius* y.

Haec aequatio ad generalem formam $\Delta y + My = N$ reducta dat $\Delta y + \frac{1}{x+1}\,y = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$. Habemus ergo M =

$M = \frac{1}{x+1}$; $N = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$; $1 - M = \frac{x}{x+1}$; quapropter productum omnium valorum formulae $\frac{x}{x+1}$, qui habentur si in ea loco x successive $x-1, x-2, \ldots 3, 2, 1$, substituantur, scilicet $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdots \frac{1}{2}$, & per $\pi(1-M)$ indicavimus, erit $= \frac{1}{x}$; illud vero per $\pi(1-M')$ expressum $= \frac{1}{x+1}$. Hinc hisce valoribus in aequatione $y = \pi(1-M)\left(A + \Sigma \frac{N}{\pi(1-M')}\right)$ substitutis habebitur $y = \frac{1}{x}\left[A - \Sigma a(2x+1)\right] = \frac{A}{x} - 2a\frac{\Sigma x}{x} - a\frac{\Sigma 1}{x}$. Inventum est autem §. 60. $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$, & $\Sigma x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ proindeque erit $y = \frac{A}{x} - ax$

3. Sit modo proposita aequatio $y' = Ry + T$, in qua y' terminum designat, qui in serie quantitatum y proxime sequitur y: hinc quoniam $y' = y + \Delta y$, aequatio abit in $\Delta y + (1-R)y = T$. Instituta huius aequationis cum praecedenti comparatione prodit $1 - R = M$; $T = N$. Quapropter pro valore quantitatis y sequens habetur expressio

$$y = \pi R \left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R'}\right).$$

Si R quantitas constans est, perspicuum fit quantitates πR & $\pi R'$ nihil aliud esse quam potentias ipsius R, quarum exponens aequatur numero designanti in serie ipsarum y locum vel indicem terminorum y & y'. Sit igitur m numerus iste, vel index loci ab y occupati ita ut y^m idem sit ac y', & habe-

habebitur aequatio $y^m = R^m \left(A + \Sigma \frac{T}{R^{m+1}}\right)$. Si T constans est, fit $\Sigma \frac{T}{R^{m+1}} = T\Sigma \frac{1}{R^{m+1}}$, ubi termini per $\frac{1}{R^{m+1}}$ exhibiti progressionem geometricam constituunt, cuius summa protinus invenitur: summa haec ab $\frac{1}{R}$ incipiens, vocetur S, ponatur nimirum

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{R^m} = S,$$

& multiplicando per R consequemur

$$1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}.$$

Ex hac aequatione elicitur $S = \frac{R^m - 1}{R^m(R-1)}$; atque inde $y^m = R^m \left(A + T.\frac{R^m - 1}{R^m(R-1)}\right)$, sive $y^m = AR^m + T.\frac{R^m - 1}{R-1}$. Ut nunc ostendamus per inventum ipsius y valorem omnimode satisfieri conditionibus datae aequationis $y' = Ry + T$, vel $y^{m+1} = Ry^m + T$, non alia re opus erit quam multiplicatione inventae formulae per R, & additione quantitatis T; ex quo colligitur expressio $AR^{m+1} + T.\frac{R^{m+1} - R}{R-1} + T$, quae redigitur ad $AR^{m+1} + T.\frac{R^{m+1} - 1}{R-1}$, hicque revera est valor, quem generalis formula pro termino y^{m+1} suppeditat.

4. Tradita iam methodo integrandi aequationem quamcumque differentialem ex differentiis finitis constantem, & sub generali forma $\Delta y + My = N$ comprehensam, reliquum est ut ad integrandas aequationes alias ab hac eadem pendentes progrediamur. Iam vero demonstravit ALEMBERTUS in Actis Beroli-

(B) ... $y+(A+a)p+(B+b)q-\frac{ady}{dx}-\frac{bdp}{dx}+\frac{Cdq}{dx}=X.$

In primo huius aequationis membro sumamus nunc partem unam $y+(A+a)p+(B+b)q$ ductam in a esse multiplam integralis ex parte altera $ady+bdp-Cdq$ resultantis, vel quod eodem redit esse

$$dy+(A+a)dp+(B+b)dq=dy+\frac{bdp}{a}-\frac{Cdq}{a};$$

unde ex terminorum sibi respondentium comparatione prodeunt aequalitates $A+a=\frac{b}{a}$; $B+b=-\frac{C}{a}$, ex quibus consequimur $b=-\frac{C}{a}-B=Aa+a^2$, & $a^3+Aa^2+Ba+C=0$. Huius porro aequationis $a^3+Aa^2+Ba+C=0$ radices praebent valores tres ipsius a diversos, qui requisitis conditionibus aeque satisfaciunt. Fiat nunc

$$y+(A+a)p+(B+b)q=z,$$

& aequatio inventa (B) mutabitur in

$$z-\frac{adz}{dx}=X,\ \text{seu}\ dz-\frac{zdx}{a}=-\frac{Xdx}{a}.$$

Hac comparata cum §. 1. aequatione $dy+yPdx=Zdx$ (ubi ad ambiguitatem vitandam X convertimus in P) habetur

$$y=z;\ P=-\frac{1}{a};\ Z=-\frac{X}{a};\ e^{\int Pdx}=e^{\int-\frac{dx}{a}}=e^{-\frac{x}{a}},$$

ex quo demum colligitur $z=e^{\frac{x}{a}}\int\frac{-Xdx}{ae^{\frac{x}{a}}}$. Voco nunc a^{I}, a^{II}, a^{III} tres distinctos ipsius a valores, & b^{I}, b^{II}, b^{III} valores alios ipsius b prioribus homologos, ac denique Z^{I}, Z^{II}, Z^{III} valores quantitatis variabilis z, quae per vices complectitur a^{I}, a^{II}, a^{III}. Hinc tres sequentes prodibunt aequationes

$$y+(A+a^{I})p+(B+b^{I})q=Z^{I}$$
$$y+(A+a^{II})p+(B+b^{II})q=Z^{II}$$
$$y+(A+a^{III})p+(B+b^{III})q=Z^{III}$$

$$y+(A+a)p+(B+b)q+(C+c)r+(D+d)s$$

differentiata aequalis assumatur parti alteri

$$a\Delta y+b\Delta p+c\Delta q+d\Delta r-E\Delta s$$

per $-a$ divisae, scilicet fiat

$$\Delta y+(A+a)\Delta p+(B+b)\Delta q+(C+c)\Delta r+(D+d)\Delta s=$$
$$\Delta y+\frac{b\Delta p}{a}+\frac{c\Delta q}{a}+\frac{d\Delta r}{a}-\frac{E\Delta s}{a}$$

unde per terminorum homologorum comparationem inferuntur aequalitates

$$A+a=\frac{b}{a};\ B+b=\frac{c}{a};\ C+c=\frac{d}{a};\ D+d=-\frac{E}{a},$$

ex quibus per consuetas eliminationes exurgit aequatio quinti gradus

$$a^5+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=0:$$

huius radices praebent quinque ipsius a distinctos valores a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}. Iam vero capiatur

$$y+(A+a)p+(B+b)q+(C+c)r+(D+d)s=z$$

ideoque

$$\Delta z=\Delta y+(A+a)\Delta p+(B+b)\Delta q+(C+c)\Delta r+(D+d)\Delta s=$$
$$\Delta y+\frac{b}{a}\Delta p+\frac{c}{a}\Delta q+\frac{d}{a}\Delta r-\frac{E}{a}\Delta s,$$

unde oritur aequatio

$$z-a\Delta z=X,\ \text{hoc est}\ \Delta z-\frac{z}{a}=-\frac{X}{a}$$

eiusdem scilicet formae cum praecedenti $\Delta y+My=N$ (§. 2.) ubi ex terminorum homologorum comparatione deducitur $M=-\frac{1}{a}$; $N=-\frac{X}{a}$, & consequenter $1-M=\frac{1+a}{a}$.

Quapropter oritur $z=\pi\left(\frac{1+a}{a}\right)\left(\text{Const.}+\Sigma\frac{-X}{a.\pi\left(\frac{1+a}{a}\right)}\right)$;

Et quoniam a constans est, invenitur

de revocari. Verum ut facilius ac promptius aequatio ipsa ad series recurrentes accommodari queat praestabit terminos y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. ordine inverso spectare, ut scilicet habeatur $y^{II}+\Delta y^{II}=y^{I}$; $y^{III}+\Delta y^{III}=y^{II}$; $y^{IV}+\Delta y^{IV}=y^{III}$, &c. & exponentes I, II, III, &c. designent cuiuslibet termini distantiam a postremo y^{I}. Ponatur $y^{II}=p^{I}$, eritque $y^{III}=p^{II}$: fiat iterum $p^{II}=q^{I}$, proindeque $p^{III}=q^{II}$; fit rursus $q^{II}=r^{I}$, ideoque $q^{III}=r^{II}=s^{I}$. Ex quo oriuntur aequalitates $y^{II}=p^{I}$; $y^{III}=q^{I}$; $y^{IV}=r^{I}$; $y^{V}=s^{I}$; $y^{VI}=s^{II}$: quibus valoribus in aequatione proposita subrogatis ea abit in hanc (A) .... $y^{I}+Ap^{I}+Bq^{I}+Cr^{I}+Ds^{I}+Es^{II}=X$. Iam vero aequationibus $p^{I}-y^{II}=0$; $q^{I}-p^{II}=0$; $r^{I}-q^{II}=0$; $s^{I}-r^{II}=0$ per indeterminatos coefficientes a, b, c, d singillatim multiplicatis, hisque de more additis aequationi (A) invenitur sequens

$$\begin{aligned} y^{I}+(A+a)p^{I}+(B+b)q^{I}+(C+c)r^{I}+(D+d)s^{I} &= X\\ -ay^{II}-bp^{II}-cq^{II}-dr^{II}+Es^{II} & \end{aligned}$$

In prima huius aequationis parte

$$y^{I}+(A+a)p^{I}+(B+b)q^{I}+(C+c)r^{I}+(D+d)s^{I}$$

variantes termini transeant in proxime antecedentes ita ut fiat

$$y^{II}+(A+a)p^{II}+(B+b)q^{II}+(C+c)r^{II}+(D+d)s^{II}$$

haecque quantitas ponatur aequalis parti alteri per $-a$ divisae

seu $$y^{II}+\frac{b}{a}p^{II}+\frac{c}{a}q^{II}+\frac{d}{a}r^{II}-\frac{E}{a}s^{II}$$

tum aequatis coefficientibus homologis habentur aequationes

$$A+a=\frac{b}{a};\quad B+b=\frac{c}{a};\quad C+c=\frac{d}{a};\quad D+d=-\frac{E}{a},$$

ex quibus eruitur ut ante quinti gradus aequatio

$$a^{5}+Aa^{4}+Ba^{3}+Ca^{2}+Da+E=0$$

cuius radices designantur per $a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}$. Quocirca accepto $z^{I}=y^{I}+(A+a)p^{I}+(B+b)q^{I}+(C+c)r^{I}+(D+d)s^{I}$, aequatio proposita transibit in hanc $z^{I}-az^{II}=X$, quae (ob $z^{I}=z^{II}+\Delta z^{II}$) evadet $\Delta z^{II}+(1-a)z^{II}=X$. Hac autem comparata cum aequatione §. 3. oritur $y=z^{II}$,

R

$$y^m = \mathrm{F}a^{\mathrm{I}m}\left(\psi + \Sigma\frac{\mathrm{X}}{a^{\mathrm{I}m+1}}\right) + \mathrm{G}a^{\mathrm{II}m}\left(\psi + \Sigma\frac{\mathrm{X}}{a^{\mathrm{II}m+1}}\right)$$

$$+\,\mathrm{H}a^{\mathrm{III}m}\left(\psi + \Sigma\frac{\mathrm{X}}{a^{\mathrm{III}m+1}}\right) + \mathrm{I}a^{\mathrm{IV}m}\left(\psi + \Sigma\frac{\mathrm{X}}{a^{\mathrm{IV}m+1}}\right) + \&c.$$

Si X constans fuerit prodibit aequatio

$$y^m = \psi\,(\mathrm{F}a^{\mathrm{I}m} + \mathrm{G}a^{\mathrm{II}m} + \mathrm{H}a^{\mathrm{III}m} + \mathrm{I}a^{\mathrm{IV}m} + \mathrm{K}a^{\mathrm{V}m} + \&c.)$$

$$+\,\mathrm{X}\left[\mathrm{F}\frac{a^{\mathrm{I}m}-1}{a^{\mathrm{I}}-1} + \mathrm{G}\frac{a^{\mathrm{II}m}-1}{a^{\mathrm{II}}-1} + \mathrm{H}\frac{a^{\mathrm{III}m}-1}{a^{\mathrm{III}}-1} + \mathrm{I}\frac{a^{\mathrm{IV}m}-1}{a^{\mathrm{IV}}-1} + \mathrm{K}\frac{a^{\mathrm{V}m}-1}{a^{\mathrm{V}}-1} + \&c.\right]$$

Si fuerit $\mathrm{X} = 0$ constans ψ supprimi poterit, & simpliciorem assequemur aequationem

$$y^m = \mathrm{F}a^{\mathrm{I}m} + \mathrm{G}a^{\mathrm{II}m} + \mathrm{H}a^{\mathrm{III}m} + \mathrm{I}a^{\mathrm{IV}m} + \mathrm{K}a^{\mathrm{V}m} + \&c.$$

quae exhibet terminum generalem seriei ipsarum y, hoc est seriei $y^m + \mathrm{A}y^{m-1} + \mathrm{B}y^{m-2} + \mathrm{C}y^{m-3} + \mathrm{D}y^{m-4}\,\&c. = 0$, quae sane nihil aliud est quam series recurrens, cuius scala relationis est $-\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C} - \mathrm{D} - \mathrm{E} - \&c.$

10. En igitur serierum recurrentium theoriam ad differentialis calculi fundamenta revocatam, & ex genuinis, directisque principiis depromtam, cum ea prius methodis omnino indirectis, notionibusque alienis, & e longinquo detortis inniteretur.

Doctrinam hanc praestantissimam maximique in analysi universa usus & emolumenti selectis aliquot exemplis declarare, ac tyronum captui accommodare operae pretium ducimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus generalis seriei recurrentis secundi ordinis

$$1 + 2u^2 + 2u^3 + 6u^4 + 10u^5 + 22u^6 + 42u^7 + 86u^8 + \&c.$$

quae oritur ex evolutione fractionis rationalis

$$\frac{1-u}{1-u-2u},$$

Vocato itaque y'' termino generali seriei numericae 1, quocirca habebitur $y = AR^x + T\frac{R^x - 1}{R - 1} = A2^x + 2^x - 1 = (A+1)2^x - 1$.

Sed facto $x = 1$ fit $y = 0$. Igitur $2A = 1 - 2$, & $A = -\frac{1}{2}$; proindeque I.° $y = 2^{x-1} - 1$. Praeterea II.° $z = \Delta y = y' - y = 2^x - 1 - 2^{x-1} + 1 = 2^x(1 - \frac{1}{2}) = 2^{x-1}$. Quapropter eventuum omnium probabilium summa erit $y + z = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1$, atque inde invenitur probabilitas pro casibus paribus $\frac{y}{y+z} = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$, pro imparibus $\frac{z}{y+z} = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$ Q. E. D.

Examen, quod huius Problematis suscepit MAIRANUS in Historia Parisiensis Scientiarum Academiae ad ann. 1728, subtile quidem & ingeniosum est, sed in accurata Problematis aestimatione Vir alias doctus & acutus incaute offendit.

11. Praeter expositam methodum revocandi serierum recurrentium doctrinam ad integrationem aequationum linearium finitis differentiis constantium, simpliciorem aliam multoque elegantiorem protulit sagacissimus idem Geometra DE LA GRANGE in Actis Berolinensis Academiae pro an. 1775; quae sane methodus, quum omnium longe commodissima sit, atque expeditissima in iis praesertim exemplis, in quibus radices aequationis coefficientium indeterminatorum inveniuntur aequales, peropportunum censeo eam hic breviter proponere.

Esto igitur series recurrens generica

$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots y_{x+t}$,

cuius terminus generalis est y_x. Suppono aequationem relationis inter $t+1$ terminos successivos esse hanc linearem

(A) $Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots Ky_{x+t-1} + y_{x+t} = 0$,

ita ut series recurrens sit ordinis t, & A, B, C . . . K sint coefficientes quicunque constantes. Eo iam res redit, ut aequatio haec differentialis finita linearis integretur, seu, quod idem est, ut inveniatur analyticus valor termini generalis y_x in serie proposita.

Ad

Ad hoc consequendum sumo $y_x = a z^x$, ubi a, z constantes sunt indeterminatae. Erit igitur $y_{x+1} = a z^{x+1}$; $y_{x+2} = a z^{x+2}$; &c. ex quo substitutionibus peractis aequatio convertitur in $A a z^x + B a z^{x+1} + C a z^{x+2} \ldots + K a z^{x+t-1} + a z^{x+t} = 0$ seu (facta per $a z^x$ divisione) in

$$\text{(B)} \qquad A + Bz + Cz^2 \;\ldots\; + K z^{t-1} + z^t = 0$$

Ex hac aequatione manifestum est I. coefficientem a, qui in ipsa desideratur arbitrarium esse; II. tot haberi distinctos ipsius z valores, quot sunt unitates in indice t. Valores hosce z, seu aequationis radices designo per α, β, γ &c.; sumptisque pariter diversis coefficientibus arbitrariis a, b, c &c., totidem oriuntur distincti valores ipsius y_x, nimirum $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$, &c., qui sane valores, tum singuli seorsim, tum omnes simul aequationi lineari (A) omnino satisfaciunt. Habetur itaque in universum

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{\&c.}$$

Et quoniam valor hic quantitatis y_x constantes arbitrarias a, b, c, &c. numero t complectitur, erit is propterea integrale completum aequationis finitae differentialis (A) ad ordinem t.^{um} pertinentis. Valores autem harum constantium a, b, c &c. inveniuntur tribuendo variabili x successivos valores $0, 1, 2, 3, 4$ &c. & comparando assumtam termini generalis y_x expressionem in hisce ipsius x hypothesibus cum terminis primis seriei, qui semper noti esse debent; ex quibus comparationibus totidem exsurgunt aequationes, quot sunt constantes a, b, c &c., quae hoc modo per functiones y_0, y_1, y_2 &c., & per radices α, β, γ, &c. invenientur expressae.

12. In hypothesi $t = 1$ unica esse debet radix aequationis relationis (B); & terminus generalis pro hac hypothesi fit $y_x = a\alpha^x$; unde sumto $x = 0$ prodit $y_0 = a\alpha^0 = a$; proindeque $y_x = y_0 \alpha^x$.

In hypothesi $t = 2$ ob binas aequationis radices α, β evadit $y_x = a\alpha^x + b\beta^x$. Quocirca sumto $x = 0$, & $x = 1$ prodeunt aequationes duae $y_0 = a + b$; $y_1 = a\alpha + b\beta$, ex quibus inde-

termicoefficiens termini y_0 affirmativus sit, negativus evadat in y_1, inde affirmativus redeat in y_2 &c.; & contrarium evenit, ubi coefficiens termini y_0 negativus existat. Praeterea posito v. g. quod coefficiens termini y_0 sit productum trium factorum $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ in valore constantis a, erit coefficiens termini y_1 aggregatum omnium binariorum, quae ex tribus ipsis factoribus effici possunt, & coefficiens termini y_2 erit aggregatum factorum eorundem $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$; denique erit unitas coefficiens termini postremi y_3. Hoc modo suppositis in aequatione (C) radicibus quinque inaequalibus α, β, γ, δ, ε erit termini y_0 coefficiens $= \beta\gamma\delta\varepsilon$; termini y_1 coefficiens $= -(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$; termini y_2 coefficiens $= \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon$; termini y_3 coefficiens $= -(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$; denique termini ultimi y_4 coefficiens $= 1$. Eodem modo determinabimus coefficientes terminorum y_0, y_1, y_2 &c. pro valoribus constantium reliquarum b, c, f &c. Quod porro spectat ad valorum a, b, c &c. denominatores, statim apparebit denominatorem ipsius a obtineri si in aequatione (C) vel $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)\ldots(z-\varphi) = 0$ supprimatur factor $z-\alpha$, scribaturque $z=\alpha$, ita ut prodeat

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\varphi),$$

qui erit denominator quaesitus. Ita pro denominatore ipsius b dividendum erit productum idem integrum per $z-\beta$, & in quotiente scribere oportebit $z=\beta$, quo fiet ipsius b denominator $= (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\varphi)$. Idipsum quadrat in alios ceterarum constantium c, f &c. denominatores.

15. Praestantissimam methodum uno vel altero exemplo explanare non utile modo, sed necessarium prorsus arbitramur. Esto itaque

EXEMPLUM I.

Scala relationis $1+2$

Indices	0	1	2	3	4	5	 x
Series recurrens	0,	u,	u^2,	$3u^3$,	$5u^4$,	$11u^5$.	.. $y_x u^x$

Aequatio differentialis finita $y_x = y_{x-1} + 2y_{x-2}$, seu (A)

$bd\alpha = b'$, terminus generalis induet hanc formam

$$y_x = a'\alpha^x + b' x\alpha^{x-1} + c\gamma^x$$

17. Pergo nunc ad series illas recurrentes, in quibus aequatio relationis tres habet radices aequales. Assumo seriei terminum generalem

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

in quo sit $\alpha = \beta = \gamma$. Ut harum radicum aequalitas citra errorem e medio tollatur, infinite parvam differentiam inter ipsas constituo, ponendo $\beta = \alpha + d\alpha$; $\gamma = \alpha + d\beta$; sicque generalis terminus evadit

$$y_x = a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c(\alpha + d\beta)^x + f\delta^x:$$

adhibito Neutoniano canone, & pro quovis binomio tribus tantum acceptis terminis, assequimur

$$(F) \quad y_x = (a+b+c)\alpha^x + (bd\alpha + cd\beta)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2} + f\delta^x.$$

Supra autem §. 12. invenimus

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\delta + \alpha\gamma + \gamma\delta)y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta)y_1 - (\alpha + \beta + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

Hinc ob $\alpha = \beta = \gamma$ valores coefficientium a, b, c infiniti evadunt ordinis secundi; sed valor postremi f finitus est. Quamvis autem singuli a, b, c infinitam magnitudinem ordinis secundi constituant, eorum tamen aggregatum finitum esse deprehenditur. Nam facta reductione trium valorum ad denominatorem eundem, divisaque fractione per $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ invenitur tandem

$$a + b + c = \frac{(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \beta\delta^2 - \gamma\delta^2 + \delta^3)y_0 - (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)y_1 + (\alpha + \beta + \gamma)y_2 - y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

quae

quae evidenter finita quantitas est, & substituto α loco ipsorum β & γ, fit eadem summa

$$a+b+c=\frac{(-3\alpha^2\delta+3\alpha\delta^2-\delta^3)y_0+3\alpha^2 y_1-3\alpha y_2+y_3}{(\alpha-\delta)^3}$$

Praeterea in valoribus coefficientium b, c substituo $\alpha+d\alpha$ pro β, & $\alpha+d\beta$ pro γ, tum duco b in $d\alpha$, & c in $d\beta$; quo facto invenio

$$b\,d\alpha=\frac{(-\alpha^2\delta-\alpha\delta\,d\beta)y_0+[\alpha^2+2\alpha\delta+(\alpha+\delta)d\beta]y_1-(2\alpha+\delta+d\beta)y_2+y_3}{(d\alpha+d\beta)(\alpha-\delta+d\alpha)}$$

$$c\,d\beta=\frac{(\alpha^2\delta+\alpha\delta\,d\alpha)y_0-[\alpha^2+2\alpha\delta+(\alpha+\delta)d\alpha]y_1+(2\alpha+\delta+d\alpha)y_2-y_3}{(d\alpha-d\beta)(\alpha-\delta+d\beta)}$$

Valores hosce ad communem denominatorem redigo, eorumque summam capio, quae divisione facta per $d\alpha-d\beta$, neglectisque terminis aliorum comparatione evanescentibus reperitur

$$b\,d\alpha+c\,d\beta=\frac{(2\alpha^2\delta-\alpha\delta^2)y_0-(2\alpha^2+2\alpha\delta-\delta^2)y_1+3\alpha y_2-y_3}{(\alpha-\delta)^2}$$

haecque evidenter finita quantitas est. & duo-
Denique multiplico $b\,d\alpha$ per $d\alpha$, & $c\,d\beta$ per $d\beta$; revo-
bus valoribus resultantibus ad eandem denominationem per
catis, eorum accipitur summa, quae post divisionem
$(d\alpha-d\beta)(\alpha-\delta)$, & neglectum terminorum infinite parvorum deprehenditur

$$b\,d\alpha^2+c\,d\beta^2=\frac{-\alpha^2\delta y_0+(\alpha^2+2\alpha\delta)y_1-(2\alpha+\delta)y_2+y_3}{\alpha-\delta}$$

nimirum aequalis quantitati finitae.

Si igitur in termino generali (F) capiatur $a+b+c=a'$; $b\,d\alpha+c\,d\beta=b'$; $b\,d\alpha^2+c\,d\beta^2=c'$, quae quidem omnes ex demonstratis finitae quantitates sunt, assequemur generalem ipsum terminum

$$y_x=a'\alpha^x+x\,b'\alpha^{x-1}+\frac{x(x-1)}{2}c'\alpha^{x-2}+f\delta^x.$$

In praecedenti calculo tres dumtaxat Neutoniani canonis terminos

minos in quovis binomio accepimus, eo quod termini subsequentes infinitesimi sunt, seu evanescentes; quartus enim terminus foret

$(b d \alpha^3 + c d \beta^3) \frac{x(x-1)(x-2)}{2.\ 3} \alpha^{x-3}$, ubi ob b, c infinitas quantitates ordinis secundi evadit coefficiens $(b d \alpha^3 + c d \beta^3)$ infinitesimus ordinis primi, proindeque terminus hic quartus negligi tuto potest, multoque magis quintus ceterique sequentes.

18. Eodem omnino ratiocinandi modo generalem seriei recurrentis terminum $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x + h\varepsilon^x + \&c.$ ubi quatuor sunt radices aequales nimirum $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ ita inveniemus expressum

$$y_x = (a+b+c+f)\alpha^x + (bd\alpha + cd\beta + fd\gamma)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$$

$$+ (bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3)\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.\ 3} + h\varepsilon^x + \&c.$$

ubi non modo coefficiens $a + b + c + f$ ostenditur absolute finitus, sed finiti quoque demonstrantur coefficientes reliqui trinomiales

$bd\alpha + cd\beta + fd\gamma$, $bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2$; $bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3$, quamvis speciem mentiantur quantitatum infinite parvarum.

In hac autem hypothesi quatuor radicum aequalium non pergitur ultra quartum Neutoniani canonis terminum, eo quod quintus, & a fortiori sextus ac sequentes omnes termini ob infinitam parvitatem evanescant. Quocirca assumi poterit termini α^x coefficiens $a + b + c + f = a'$; termini $x\alpha^{x-1}$ coefficiens $bd\alpha + cd\beta + fd\gamma = b'$; termini $\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$ coefficiens $bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2 = c'$; denique termini $\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.\ 3}$ coefficiens $bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3 = f'$; & generalis seriei terminus y_x vertetur in hunc

$y_x =$

$$= a' + \left(b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3}\right)x + \left(\frac{c' - f'}{2}\right)x^2 + \frac{f'}{6}x^3;$$

captoque rursus $b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3} = b''$; $\frac{c' - f'}{2} = c''$; $\frac{f'}{6} = f''$

oritur tandem terminus generalis

$$y_x = a' + b''x + c''x^2 + f''x^3$$

Quatuor porro arbitrariae constantes a', b'', c'', f'' determinantur accipiendo pro x successive 0, 1, 2, 3, ex quo habentur valores termino generali y_x respondentes 1, 8, 27, 64, & consequenter aequationes quatuor sequentes

$$a' = 1$$
$$a' + b'' + c'' + f'' = 8$$
$$a' + 2b'' + 4c'' + 8f'' = 27$$
$$a' + 3b'' + 9c'' + 27f'' = 64,$$

ex quibus deducitur $a' = 1$; $b'' = 3$; $c'' = 3$; $f'' = 1$. Quo facto habetur $y_x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3$;

Adeoque $y_x u^x = (1+x)^3 u^x$. Q. E. I.

Ceterum in hoc exemplo idem obtinetur alia methodo ab Auctore nostro tradita. Et sane si seriei terminus generalis vocetur Y; terminique quatuor ipsum praecedentes $'Y$, $''Y$, $'''Y$, $''''Y$, ex enunciata conditione habemus $Y = 4'Y - 6''Y + 4'''Y - ''''Y$, hoc est $''''Y - 4'''Y + 6''Y - 4'Y + Y = 0$, seu terminis singulis ad quarta quaque loca subsequentia translatis prodibit aequatio $Y - 4Y' + 6Y'' - 4Y''' + Y'''' = 0 = \Delta^4 Y$ (§. 23. Cap. I.). Quare eo res redit ut finita differentialis aequatio $\Delta^4 Y = 0$ integretur in hypothesi quod Δx constans sit & unitati aequalis. Iam vero ex praecedentibus constat

$$\Sigma\Delta^4 Y = \Delta^3 Y = a\Delta x$$
$$\Sigma\Delta^3 Y = \Delta^2 Y = \Sigma a\Delta x = ax + b\Delta x$$
$$\Sigma\Delta^2 Y = \Delta Y = \Sigma ax + bx + c\Delta x = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax}{2} + bx + c\Delta x$$
$$\Sigma\Delta Y = Y = \Sigma\frac{ax^2}{2} - \Sigma\frac{ax}{2} + \Sigma bx + cx + f$$
$$=$$

$$=\frac{a}{6}x^3+\frac{b-a}{2}x^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)x+f$$

Igitur si capiatur $\frac{a}{6}=f''$; $\frac{b-a}{2}=c''$; $\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=b''$; $f=a'$, habebitur, prorsus ut ante, generalis seriei terminus

$$Y=a'+b''x+c''x^2+f''x^3,$$

Qui de integratione formularum differentialium finitarum plura cupit, adeat insignes Geometras La Grange, La Place, Monge, Condorcet, &c., qui in Actis Academicis Taurinensibus, Berolinensibus, Parisinis hac de re copiose exquisiteque tractarunt.

ADNOT. post CAP. III. PART. I.

Ut haec nova Auctoris nostri theoria de quantitatum infinitesimarum, atque infinitarum natura mutuaque relatione ad germanum legitimumque sensum revocetur, iisque omnibus difficultatibus & controversiis praecludatur aditus, quas eadem ab Auctore vix dum prolata ubique excitavit & peperit, operae pretium erit ipsam interpretari, atque explicare perinde ac si a Newtoniana celeberrima *rationum primarum & ultimarum*, vel *limitum* doctrina vix, aut ne vix quidem differret. Sequentia itaque constituenda sunt principia ac dictata.

I. Si quantitas quaedam A continuo crescendo vel decrescendo ad aliam L magnitudinem datam, quam nunquam aequare potest, magis magisque accedit, ita ut ab ea differre possit magnitudine utcunque parva, atque adeo minori quam quaelibet data; vocabitur quantitas ipsa L *limes* quantitatis prioris A.

Sic I. Curvae cuiuscunque tangens *limes* est omnium secantium.

II.

II. Fractio $\frac{1}{3}$ *limes* est fractionis huius decimalis

$$0,333333333 \text{ \&c.}$$

III. Unitas *limes* est summae huius progressionis geometricae

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\text{\&c. in infin.}$$

IV. Quantitas $a+\frac{1}{3}a$ *limes* est summae huius progressionis

$$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+\frac{a}{64}+\frac{a}{256}+\text{\&c. in inf.}$$

V. Radix quadrata numeri binarii *limes* est rationis illius, quam habet quadrati diagonalis ad latus.

VI. Denique summa geometricae progressionis decrescentis

$$a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{b^4}{a^3}+\text{\&c. in inf.}$$

limitem habet $=\frac{a^2}{a-b}$; nimirum (quod & de praecedentibus exemplis tenendum est) progressionis summa ita semper magis magisque accedit ad valorem $\frac{a^2}{a-b}$, ut quamvis eum nunquam adaequet, differre tamen ab eodem possit quantitate quantumvis parva, & quavis data minori: hoc autem vel ex eo liquet, quod si progressio non in infinitum continuetur, terminusque eius postremus sit p, summam recipit omnino accuratam & exactam $\frac{a^2-bp}{a-b}$, quae semper minor est quam $\frac{a^2}{a-b}$, earumque differentia fieri potest utcunque parva, quia terminus ipse p per ulteriorem progressionis continuationem evadit utcunque parvus. Atque hinc quemadmodum p semper propius accedit ad nihilum seu o, quod tamen nunquam adaequat, atque adeo nihilum ipsum seu o *limes* est termini p, ita pariter fractio $\frac{a}{a-b}$ *limes* est fractionis $\frac{a^2-bp}{a-b}$, quae cum

cum priori non congruit, nisi fiat $p=0$ hoc est nisi pro p *limes* ipsius sufficiatur.

2. Sit y functio quantitatis variabilis x per $Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c. repraesentata, ita ut posito $x=0$, fiat $y=0$, & ex aequatione $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c. per x divisa oriatur $\frac{y}{x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. Patet itaque rationem $\frac{y}{x}$ variabilem esse quia exponens huius rationis est quantitas variabilis, nimirum functio ipsius variabilis x, & quidem talis quae iugiter decrescit quandiu ipsa variabilis x minuitur. Posito iam $x=0$ functio ipsa y simul evadit $=0$, & rationis $\frac{y}{x}$ exponens $=A$, seu ipsa ratio $\frac{y}{x} = A$. Paradoxum videtur quod hic asseritur esse $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = A$ quia cyphrae non sunt quantitates, neque una altera maior vel minor esse dicive potest. Verum ratio $\frac{y}{x} = A$ revera non est ratio cyphrarum, sed *limes*, ad quem ratio $\frac{y}{x}$ perpetuo appropinquat, variabili x & cum ea simul variabili y continuo decrescente; *limes* quem nondum attingit ratio $\frac{y}{x}$ quamdiu x & y sunt quantitates verae quantumvis parvae. Ratio $\frac{y}{x} = A$ ea est quacum variabiles x & y evanescunt, seu quantitates esse desinunt; atque hic aequationis *limes* certus est ac definitus. Potest hic *limes* rationis $\frac{y}{x} = A$ vocari *ultima ratio* variabilium y & x, si spectetur ut ea, quacum y & x quantitates esse desinunt seu evanescunt. Si variabilis

riabilis $x = 0$ iterum crescere concipiatur, functio y cum ea simul crescere incipit, atque ratio $\frac{y}{x} = A$ iterum ea erit, quacum crescere incipiunt; atque hoc respectu *limes* huius rationis $\frac{y}{x}$, qui est A, vocari potest prima ratio variabilium y & x, quacum quantitates esse incipiunt. Hoc modo ad verum germanumque sensum revocabitur Auctoris nostri doctrina contendentis infinite parva revera esse nihila, interque duo infinite parva intercedere posse rationem quamcunque. Ratio infinite parvorum revera non est ratio nihilorum, sed *ratio ultima*, quacum duae variabiles nascuntur, seu quantitates esse incipiunt. Hoc est aliis verbis ratio infinite parvorum nihil aliud est, quam *limes* ille, ad quem quantitatum variabilium ratio perpetuo accedit, quem nunquam transgredi, neque etiam attingere potest, sed ad quem propius accedit pro data quavis differentia. Verbo dicam: *ultimae* magnitudinum evanescentium *rationes*, & *primae* nascentium non sunt rationes, quas magnitudines ipsae unquam inter se habent, sed *limites* omnium variabilium rationum. In paradoxa expressione $\frac{0}{0}$ possumus *limitem* latentem detegere hac ratiocinatione: est $\frac{0}{0} = \frac{a-a}{b-b}$; est autem $a : b :: x : \frac{bx}{a}$, igitur $a + x : b + \frac{bx}{a} :: a : b$, & $a + x - a : b + \frac{bx}{a} - b :: a : b$. Quocirca erit $\frac{a}{b} = \frac{a-a+x}{b-b+\frac{bx}{a}}$. Hinc nullescente x rationis constantis $\frac{a}{b}$ *limes* aequabitur ipsi $\frac{a-a}{b-b} = \frac{0}{0}$.

3.

3. Omnis variabilis quantitas non tantum continuo decrescere, & tandem penitus evanescere potest, sed etiam continuo augeri potest, idque in infinitum. Esto

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n$$

in hac aequatione apparet, aucto in infinitum x etiam y in infinitum excrescere. Ex ea autem deducitur

$$\frac{y}{x^n} = \frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{H}{x} + K;$$

ex quo patet rationem $\frac{y}{x^n}$ eiusque exponentem variabilem esse, ita quidem ut variabili x, & cum ea simul ipsa y perpetuo crescente, exponens illius continuo decrescat, terminis nimirum omnibus praeter ultimum constantem decrescentibus. Posito autem $x = \infty$, qua in hypothesi fit etiam $y = \infty$, exponens rationis $\frac{y}{x^n}$ evadit aequalis constanti K, reliquis terminis ob $x = \infty$, nullescentibus. Verum, sicuti antea pro quantitatibus infinite parvis monuimus, ratio istaec $\frac{y}{x^n} = K$ proprie loquendo non est ratio infinite magnorum y & x^n ad se invicem, quia fieri nequit, ut duo quanta inassegnabilia inter se comparentur; sed est *limes* rationis, ad quem variabiles y & x^n in infinitum crescentes continuo appropinquant, quemque nunquam attingunt quandiu sunt determinatae & assignabiles quantitates; atque idcirco $\frac{y}{x^n} = K$ est *ultima ratio*, quacum quantitates y, & x^n assignabiles esse desinunt. Hinc recte intelligitur pervulgatum illud Calculi Infinitesimalis dictatum, quantitates scilicet, & quantitatum rationes, quarum data sit differentia, si ita perpetuo excrescant, ut datam quamvis magnitudinem superent *ultimo* fieri aequales. Sint enim A, B quantitates seu rationes sine fine crescentes, quarum differentia data

data ſemperque conſtans ſit D. Capio magnitudinem aliam datam & conſtantem a, ſtatuoque analogiam $A : D :: a : d$. Perſpicuum eſt creſcente A decreſcere d, & quidem proportionaliter, ita ut ſi creſcat A ultra quamlibet datam quantitatem, minuatur d infra quamlibet datam. Igitur ob $A \pm D : D :: a \pm d : d$, quum quantitates duae a & $a \pm d$, decreſcente d infra quamlibet datam quantitatem, *ultimo*, ſeu in *limite* ubi nimirum nulleſcit, fiant aequales; etiam quantitates proportionales A, & $A \pm D$, ſeu A & B datam habentes differentiam D *ultimo* ad aequalitatem pervenient. Hinc quemadmodum per quantitates & rationes perpetuo decreſcentes & quibuſcunque datis minores determinantur *proportiones ultimae*, quae valent in *limite* continue decreſcentium; ita per quantitates & rationes ſine fine creſcentes, & quibuslibet datis maiores definiuntur *proportiones ultimae*, quae praeſto ſunt in *limite* perpetuo creſcentium. Veruntamen inter duos hoſce *limites* extremos illud intercedit diſcrimen, quod decreſcentium *limitem* aſſequi, & detegere licet, ubi quantitates prorſus evaneſcunt nullaeque evadunt; ſed *limitem* creſcentium nunquam proprie aſſequimur, quia tametſi quantitates terminum quemcunque datum creſcendo praetergredi poſſunt, nunquam tamen fieri poſſunt *abſolute* infinitae.

4. Illud itaque fixum ratumque ſemper habeatur in Calculo Differentiali nunquam aequales aſſumi eas quantitates, aut rationes, quarum datur aliqua utcunque parva differentia, ſed illas duntaxat, quarum differentia ultra quemlibet terminum aſſignabilem decreſcens, tandem evaneſcere, nullaque prorſus fieri demonſtratur, ita ut quantitatum, & rationum aequalitas obtineatur tantum in *limite extremo*, ad quem eaedem ultra quamcunque menſuram accedunt, & quamvis ſaepiſſime contingat, ut quantitates ipſae, quarum inveſtigatur proportio in *limite* prorſus evaneſcant, nihilo tamen minus *limitis* proportio, in quem unice inquiritur, ſemper ſubſiſtit, & immutata perſeverat.

5.

5. Nomine itaque *Differentiarum*, *Fluxionum*, *Elementorum*, *Incrementorum*, *Decrementorum*, *Quantitatum Infinitesimarum*, quomodocunque appellentur, nihil aliud significatum volumus, nisi differentias continuo decrescentes, & quibuslibet datis minores a veteribus ipsis Geometris usurpatas, ex quibus aequalitates & proportiones *ultimas*, quae locum habent in *limite*, tuta consecutione deducimus. Brevitatis autem gratia utimur compendio, & *limitis* aequalitatem tribuimus quantitatibus, rationibusque differentiam habentibus perpetuo decrescentem & inassignabilem, non quod revera aequales statuamus quantitates & rationes, donec differentiam aliquam utcunque minimam servant, sed quod alias notum perspectumque sit, differentiam in *limite* ipso nimirum *ultimam* nullam fieri, adeoque quantitates ac rationes in *limite* esse accuratissime aequales. Quapropter magnam Calculo Differentiali inferret iniuriam si quis contenderet, differentias, quae adhuc aliquid sunt, ab ipso negligi, & pro nullis haberi. Nihil procul dubio in infinitesimorum Analysi, nihil omnino contemnitur: nam cum aequales pronunciamus quantitates & rationes infinitesimas seu inassignabili differentia praeditas, non intelligimus eas aequales esse, donec differentiam habent aliquam utcunque parvam, sed in *limite*, ubi differentia prorsus nulla est, earum absolutissimam aequalitatem concludimus. Quocirca infinitesimas differentias negligere, & pro nullis omnino haberi, nihil aliud sibi vult, quam *limitis* absolutissimas aequalitates ac proportiones inquirere ac definire. Hinc autem perspicue patet *Differentialem Calculum* nihil aliud esse, & definiri, quam analyticam methodum inveniendi *limitem* rationis, quae intercedit inter differentiam finitam duarum quantitatum, & differentiam finitam aliarum binarum, quae habent ad priores duas analogiam & relationem lege cognitam ac definitam.

6. Huic adnotationi finem imponat gravissimum magni Fluxionum inventoris NEWTONI testimonium hac de re ita ap-

aptissime mirificeque differentis (a): „ Malui demonstrationes ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate praemittere. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi „.

„ Obiectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quae antequam evanuerunt non est ultima; ubi evanuerunt nulla est. Sed & eodem argumento aeque contendi posset, nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est illam ipsam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum, & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes, quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Haec est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determi-

(a) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. I. in fine.*

terminandis ac demonstrandis legitime usurpantur„.

„ Contendi etiam potest, quod si dentur ultimae quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimae magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum demonstravit. Verum haec obiectio falsae innititur hypothesi. Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligitur in infinite magnis. Si quantitates duae, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio aequalitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimae seu maximae quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite„.

7. Offendit Alembertum Neutoniana loquendi formula ab aliis etiam recepta nimirum *ratio quacum quantitates evanescunt; ratio quacum nascuntur*: locutionem hanc quasi absonam & absurdam his verbis notat & carpit (*a*): „ Quelques mathematiciens ont défini la quantité infiniment petite celle qui, s' évanouit, considérée non pas avant qu' elle s' évanouisse, non pas après qu' elle est évanouie, mais dans le moment même ou elle s' évanouit. Je voudrois bien savoir quelle idée nette & precise on peut espérer de faire naitre dans l' esprit par une semblable définition. Une quantité est quelque chose ou rien. Si elle est quelque chose, elle n' est pas évanouie; si elle

(*a*) *Mel. de Lit. d' Hist. & de Phil. Tom. V. Eclairc. sur les Elém. de Phil.* §. *XIV.*

elle eſt rien, elle eſt évanouie tout-a-fait. C' eſt une chimere que la ſuppoſition d' un état moyen entre ces deux-la „.

At equidem non video quid iſtud ſit, quod ſummo Geometrae Alemberto tantopere faſtidium creat; huiuſmodi enim loquendi formulae, licet fortaſſis ad ſeveriſſimam veritatis normam minus exactae, ſunt tamen a Geometris, atque adeo Philoſophis communi uſu ac ſermone receptae, ut longiores verborum ambitus vitentur. Quid quod alibi Alembertus ipſe id genus formulas adeo non improbet, ut potius brevitatis & compendii cauſſa commendet? „ Toutes les parties des mathématiques „ inquit ille (*a*) „ font ſouvent uſage d' expreſſion de cette eſpece, qui dans le ſens metaphyſique qu' elles preſentent, paroiſſent d' abord peu exactes; mais qui ne doivent être regardées que comme des manieres abrégées de s' exprimer, que les Mathématiciens ont inventées pour énoncer une verité, dont le developpement & l' énoncé exact auroit demandé beaucoup de mots „.

(*a*) *Loc. cit.* §. *XI.*

ADNOT. ad §. 214. *PART. I.*

QUoniam Auctoris noſtri demonſtratio mera nititur inductione, adeoque ſumma illa ſeveritate caret, quam ſemper Geometrae, ubi res fieri poteſt, requirunt; demonſtrationem ipſam ab Alemberto mutuabimur, qui *Tom. IV. Opuſ. Mathem. pag.* 5. eam hiſce verbis adornat.

„ Si une quantité A contient tant de variables x, y, z, &c. qu' on voudra, & qu' on la différentie en faiſant varier ſucceſſivement x, y, z, &c. en négligeant les différences ſecondes, troiſiémes &c. on aura le même reſultat dans quelqu' ordre qu' on différen-

différencie, c'est-à-dire, que par exemple, $\frac{d^n A}{dx\, dy\, dz\, dt \ \&c.} = \frac{d^n A}{dz\, dy\, dt\, dx \ \&c.}$. M. EULER a démontré cette proposition dans son *Analyse des infiniment petits*, mais par une espece d'induction. Pour en donner une démonstration générale & rigoureuse nous considérerons, I. que $\frac{ddA}{dx\, dy} = \frac{ddA}{dy\, dx}$, comme le savent les Géomètres. II. Nous allons démontrer que si en général les quantités $\frac{d^n A}{dx\, dy\, dz}$, & $\frac{d^n A}{dz\, dx\, dy}$, sont égales, la même égalité subsistera en faisant varier une nouvelle variable t; ce qu'il est aisé de voir en considérant I. que la combinaison $dx\, dy\, dz$, donne (*hyp.*) le même résultat que la combinaison $dz\, dx\, dy$, la combinaison $dt\, dx\, dy\, dz$ donne évidemment le même résultat que $dt\, dz\, dx\, dy$; II. que $dt\, dx\, dy\, dz$ donne le même résultat que $dx\, dt\, dy\, dz$, puisque $dt\, dx$ donne le même que $dx\, dt$; III. que $dx\, dt\, dy\, dz$ donne le même résultat que $dx\, dy\, dt\, dz$, &c. par la même raison puisque $dt\, dy$ donne le même que $dy\, dt$, &c. Donc, &c. Donc puisque le théorême a lieu lorsque $n = 2$, il aura lieu lorsque $n = 3$, & ensuite lorsque $n = 4$, &c. & ainsi de suite „.

Hanc demonstrationem applicat Alembertus communi quantitatum algebraicarum multiplicationi, qua de re elementorum Scriptores monet, eorumque circumspectionem excitat his verbis:

„ Cette démonstration pourroit servir à prouver d'une maniere très-simple une proposition que la plupart des Auteurs élémentaires négligent de prouver, savoir, qu'en quelqu'ordre qu'on multiplie tant de quantités a, b, c, d, e *&c.* qu'on voudra, les unes par les autres, le résultat est toujours le même. On le démontre bien pour les produits ab & ba de deux quantités, mais on néglige souvent de le prouver pour les pro-

produits d' un plus grand nombre de quantités, quoique la chose ne soit pas évidente par elle-même. C' est un avis qu' on donne ici aux Auteurs d' Elémens, afin qu' ils y fassent attention à l' avenir ".

ADNOT. ad CAP. VIII. PART. I.

Celeber. De la Grange in italica epistola ad Fagnanum anno 1754 typis edita novam proponit seriem pro differentialibus, & integralibus cuiuslibet gradus, eamque adamussim respondentem & analogam Neutonianae seriei pro potestatibus & radicibus. Rem novitate atque elegantia commendabilem hic breviter explanabimus: Sint itaque series binae Neutoniana una, Grangiana altera:

$$\text{I. } (a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \&c.$$

$$\text{II. } (xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3} x^{m-3} y^3 + \&c.$$

Iam vero I. quemadmodum prima series dat evolutionem potestatis cuiuscunque, ad quam elevatur summa duarum, adeoque quotcunque datarum magnitudinum, assumto exponente m pro gradu propositae potestatis; ita propemodum series secunda praebet differentiale cuiuscunque gradus ex producto duarum, adeoque quotcunque, variabilium, sumto pariter exponente m pro gradu vel ordine differentialis propositi.

II. Quemadmodum prima series suppeditat terminos radicis cuiuscunque, quae a summa duarum, vel quotcunque quantitatum, extrahitur, modo fiat exponens m aequalis numero fracto radicis gradum indicanti; ita series secunda continet integrale cuiuslibet gradus ex producto duarum, vel quotcunque finitarum, aut infinitesimarum magnitudinum, dum-

dummodo accipiatur exponens m aequalis numero integro, sed negativo gradum dati integralis indicanti.

III. Denique sicuti in prima serie exponens o indicat quantitatem, quam afficit, elevatam ad potestatem nullam, adeoque aequalem unitati; ita in secunda exponens idem o non aliud significat, quam in quantitate ab eodem affecta nullum esse differentiationi, nec integrationi locum, adeoque quantitatem ipsam talem accipiendam, qualis nulla habita exponentis ratione reperitur.

Propterea si Neutoniana serie feliciter utimur per universam Analysim in elevationibus ad potestates, & in radicum cuiuscunque gradus extractionibus; seriem alteram successu aeque prospero in differentiationibus & integrationibus cuiuscunque ordinis usurpabimus. Proponatur igitur quantitas xy differentianda; in hoc casu, quoniam differentiale quaesitum primi ordinis est, erit $m=1$, proindeque generalis series secunda induet hanc formam $x^1y^0+x^0y^1$, quae ad communem notandi modum redacta iuxta id, quod ante indicavimus, convertitur in hanc $ydx+xdy$.

Si secundum, aut tertium, aut quartum differentiale quaeratur erit $m=2$, vel $m=3$, vel $m=4$, & quaesita differentialia, factis pro m debitis substitutionibus erunt sequentia:

$$d^2.xy = x\,y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 = yddx + 2dxdy + xddy;$$
$$d^3.xy = x^2y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3 = yd^3x + 3ddxdy + 3dxddy + xd^3y;$$
$$d^4.xy = x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + x^0y^4 =$$
$$yd^4x + 4d^3xdy + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y:$$

Sicque porro differentiale cuiuscunque ordinis summa facilitate semper obtinebitur, spectato tanquam variabili etiam differentiali primo dx, vel secus deletis terminis, qui differentialia ipsius dx continent.

Sed praeterea series eadem II. ad integralium inventionem aeque accommodatur, ac Neutoniana series ad radicum extractionem. Proponatur ex. gr. ad habendam quadraturam indefinitam curvae cuiuslibet integratio elementi ydx areae curvilineae:

lineae: accipiatur in canone generali $dx = x$; eritque per id, quod ante adnotavimus, $m = -1$, quibus valoribus in canone secundo substitutis assequemur seriem peculiarem

$$dx^{-1}y^{0} - dx^{-2}y^{1} + dx^{-3}y^{2} - dx^{-4}y^{3} + dx^{-5}y^{4} \text{ \&c.}$$

Iam vero dx^{-1} denotat integrale ipsius dx; dx^{-2} integrale integralis ipsius dx (idest integrale quantitatis x) quod voco integrale secundum eiusdem dx, designoque per symbolum ${}^{2}\int dx$: Pariter dx^{-3} exprimit integrale tertium ipsius dx, nimirum ${}^{3}\int dx$; dx^{-4} integrale quartum, seu ${}^{4}\int dx$; &c. Sed

$$\int dx = x;$$

$$ {}^{2}\int dx = \int x = \int \frac{x\,dx}{dx} = \frac{x^{2}}{2\,dx};$$

$$ {}^{3}\int dx = \int \frac{x^{2}}{2\,dx} = \int \frac{x^{2}\,dx}{2\,dx^{2}} = \frac{x^{3}}{2.3\,dx^{2}};$$

$$ {}^{4}\int dx = \int \frac{x^{3}}{2.3\,dx^{2}} = \int \frac{x^{3}\,dx}{2.3\,dx^{3}} = \frac{x^{4}}{2.3.4\,dx^{3}};$$

& in universum

$$ {}^{m}\int dx = \frac{x^{m}}{2.3.4\ldots m\,dx^{m-1}}$$ accepto semper dx tanquam

constanti. Igitur hisce valoribus in praecedenti serie subrogatis, positisque de more dy, ddy, $d^{3}y$, &c. loco y^{1}, y^{2}, y^{3}, &c. tandem apparebit

$$\int ydx = xy - \frac{x^{2}\,dy}{2\,dx} + \frac{x^{3}\,ddy}{2.3\,dx^{2}} - \frac{x^{4}\,d^{3}y}{2.3.4\,dx^{3}} + \frac{x^{5}\,d^{4}y}{2.3.4.5\,dx^{4}} - \text{\&c.}$$

haecque est decantata series Bernoulliana (*a*) Geometris dudum notissima.

Ceterum hic canon secundus non solum ad differentialia primi gradus integranda extenditur, verum etiam unica operatione integralia differentialium cuiuslibet ulterioris gradus confestim suppeditat. Quaeratur ex. gr. integrale secundum producti $dy\,dx$; facto igitur $m = -2$, $x = dx$, & $y = dy$ consequemur

(*a*) Io. Bern. *Oper. Tom. I.* N. *XXI.*

$$^2\!\int dy\,dx = dx^{-2}dy^0 - 2dx^{-3}dy^1 + 3dx^{-4}dy^2 - 4dx^{-5}dy^3 + \&c.$$
$$= \frac{x^2 dy}{2dx} - \frac{2x^3 ddy}{2.3\,dx^2} + \frac{3x^4 d^3y}{2.3.4dx^3} - \frac{4x^5 d^4y}{2.3.4.5dx^4} + \&c.$$

Quum autem ob dx constantem fit $^2\!\int dy\,dx = \int y dx$, & ante inventum fit integrale
$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2 dy}{2dx} + \frac{x^3 ddy}{2.3dx^2} - \frac{x^4 d^3y}{2.3.4dx^3} + \&c.;$$
aequabuntur idcirco inter se binae series specie tenus immaniter discrepantes, hoc est
$$xy - \frac{x^2 dy}{2dx} + \frac{x^3 ddy}{2.3dx^2} - \&c. = \frac{x^2 dy}{2dx} - \frac{2x^3 ddy}{2.3dx^2} + \frac{3x^4 d^3y}{2.3.4dx^3} - \&c.$$
quarum paullo occultior aequalitas vel ex eo colligitur, quod si utraque bis differentietur, termini omnes utrinque destruuntur unico utrobique manente $dydx$.

ADNOT. ad §. 324. *PART. I.*

Data differentiali aequatione tres variabiles involvente

(A) $\qquad P dx + Q dy + R dz$

deductaque inde *aequatione conditionis*

(B) $\qquad P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$

Auctor noster canonem hunc generatim constituit, quod nimirum ubi aequatio finita (B) nec identica reperitur, nec eam praebet variabilium x, y, z relationem, quae aequationi differentiali (A) satisfaciat, *nulla exhiberi possit aequatio finita*, quae ipsi satisfaciat. At vero canonem hunc non ea gaudere extensione, quam Eulerus ei tribuit, sed circumscriptione aliqua coercendum esse primus acutissime animadvertit Celeberr. De la Place in egregia Dissertatione *Sur les solutions particu-*

lieres

lieres des Equations différentielles, & ſur les inégalités ſéculaires des Planetes. In *Actis Reg. Scient. Pariſ. Acad.* an. 1772. Si enim differentialis aequatio fuerit

$$dx = \{1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}\,[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} + b\sqrt[3]{(x-z-y)}\,]\}\,dy$$
$$+ [1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)}\,]\,dz,$$

quae cum aequatione (A) collata praebet

$$P = 1,\ Q = 1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}\,[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} - b\sqrt[3]{(x-z-y)}\,],$$
$$R = 1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)};$$

atque hi valores ſubſtituantur in aequatione conditionis (B), eruitur poſt moleſtam prolixamque ſupputationem aequatio linearis

$y + z - x + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12} = 0$, quae nec identica eſt, nec differentiali aequationi ſatisfaciens. At nihilominus datur inter variabiles x, y, z relatio, quae hoc ipſum praeſtat; ſiquidem $x = y + z$ propoſitae differentiali aequationi evidentiſſime ſatisfacit. Ex quo luculenter patet, Eulerianum Canonem brevioribus terminis contineri quam ab Auctore ſancitur.

ADNOT. *ad* §. 11. PART. II.

AUctor noſter in hoc loco teſtatur ſe in Introductione oſtendiſſe, *ſeriem utramque*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$\& \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \frac{1}{6.64} + \&c.$$

logarithmum hyperbolicum binarii exhibere. At in citata *Introductio-*

ductione ad Analysim Infinitorum desideratur demonstratio ab EULERO indicata, nec eam ibi invenire omni adhibita diligentia mihi contigit. Quapropter eandem hic supplere non abs re erit. Constat ex logarithmorum theoria, esse

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$$

adeoque posito $x = 1$ erit

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

Est autem assumto $x = -\frac{1}{2}$

$$l(1+x) = l\frac{1}{2} = -\frac{1}{1.2^1} - \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} - \&c.$$

Igitur ob $l2 = -l\frac{1}{2}$, orietur

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$= \frac{1}{1.2^1} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \&c.$$

Q. E. D.

ADNOT. post §§. 45. & seqq. PART. II.

Quamvis insigne ac mirificum Taylorianum Theorema innumeris prope usibus per mathesim universam accommodetur, & elegantissimas pariat, vixque aliunde sperandas Problematum etiam difficillimorum solutiones, sublimiorumque Theorematum demonstrationes; quandoque tamen usuvenit, ut nisi caute & circumspecte adhibeatur in errorem ac fallaciam inducat; fallitur scilicet qui in universum affirmat

 functio-

functionem quamlibet binomiae quantitatis $x+a$, hoc est $\phi(x+a)$ per Taylorianum Theorema semper assumi posse aequalem indefinitae seriei

$$\phi(x)+\frac{ad.\phi(x)}{dx}+\frac{a^2dd.\phi(x)}{2dx^2}+\frac{a^3d^3.\phi(x)}{2.\,3\,dx^3}+\frac{a^4d^4.\phi(x)}{2.\,3.\,4\,dx^4}+\&c.$$

Hoc enim vel in simplicissima hypothesi, qua statuatur $\phi(x+a)=[\sin(x+a)]^{\frac{1}{3}}$, falsum prorsus & absurdum deprehenditur, quum quantitas $[\sin(x+a)]^{\frac{1}{3}}$, quae semper manifesto finita est in Taylorianam seriem conversa, vel in ipso secundo termino valorem adipiscatur infinitum ubi $x=0$, fit quippe series $=$

$$\sin x^{\frac{1}{3}}+\frac{ad.\sin x^{\frac{1}{3}}}{dx}+\&c.=\sin x^{\frac{1}{3}}+\frac{a\cos x}{3\sin x^{\frac{2}{3}}}+\&c.=\infty$$

in hypothesi $x=0$. Vel hoc uno edoctus exemplo magnam semper adhibebit prudens Geometra considerationem & sagacitatem in applicatione atque usu Tayloriani Theorematis, quod incaute usurpatum nonnullis etiam magni nominis Geometris non semel imposuit.

Accidit etiam quandoque, ut ex Tayloriano Theoremate, licet citra errorem usurpato, solutio propositi problematis habeatur non ita generica lateque patens, qualem esse oporteret, vel qualem methodus alia tutior ac melior suppeditaret. En luculentum huiusce rei exemplum. Proponatur invenienda talis functio $\phi(x)$ quantitatis variabilis x, ut habeatur $\phi(x+a)=\phi(x)$, existente a quantitate data. Palam est a formula $\phi(x)$ exhiberi ordinatam eius curvae, in qua, acceptis in axe segmentis $=a$, ordinatae per hanc quantitatem aequidistantes aequales sint: id accidit in Cycloide si a aequetur circuli genitoris circumferentiae. Patet igitur quantitatem $\phi(x)$ infinitis praeditam esse valoribus arbitrariis problemati satisfacientibus, dummodo $\phi(x)$ praedictae curvae ordinatam exhibeat: Vertamus nunc $\phi(x+a)$ in seriem per canonem Taylorianum, eritque

$\phi(x)$

$$\phi(x) = \phi(x+a) = \phi(x) + \frac{a d.\phi(x)}{dx} + \frac{a^2 dd.\phi(x)}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3.\phi(x)}{2.3 dx^3} + \&c.$$

atque hinc habebitur aequatio

$$\frac{a d.\phi(x)}{dx} + \frac{a^2 dd.\phi(x)}{2 dx^2} + \frac{a^3 d^3.\phi(x)}{2.3 dx^3} + \&c. = 0.$$

Sit e logarithmorum hyperbolicorum basis, & accipiatur $\phi(x) = Ae^{bx}$, huiusque valoris fiat in praecedenti aequatione substitutio. Quocirca divisione facta per Ae^{bx} exurgit aequatio $ab + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^3b^3}{2.3} + \&c.$ Erit igitur $e^{ab} - 1 = 0$; adeoque facto regressu a numeris ad logarithmos orietur $ab = l1$. Sed per notissimum Euleri nostri inventum est $l1 = \pm m\pi\sqrt{-1}$, existente m numero quovis integro una cum 0. Igitur $ab = \pm m\pi\sqrt{-1}$; & $b = \pm\frac{m\pi\sqrt{-1}}{a}$, & consequenter

$$\phi(x) = A e^{\pm\frac{m\pi x}{a}\sqrt{-1}} = A\left(\cos\frac{m\pi x}{a} \pm \sin\frac{m\pi x}{a}.\sqrt{-1}\right),$$

seu posito $A\sqrt{-1} = B$ assequimur tandem

$$\phi(x) = A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Iam vero haec functionis $\phi(x)$ forma, seu valor non videtur eam universalitatem habere, quam oportet: capiatur enim circuli arcus ν, & diametri abscissa $1 - \cos\nu$, erigaturque ordinata x ad eam curvam, in qua habeatur $x = \nu - \sin\nu$; sitque adeo curvae abscissa $1 - \cos\nu$ aequalis functioni ipsius ordinatae x, seu $\phi(x)$. Erit itaque

$$x = \nu - \sin\nu = C\nu^3 + D\nu^5 + E\nu^7 + \&c.,$$

& per serierum regressum invenietur

$$\nu = Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.;\ \text{proindeque}\ \phi(x) = 1 - \cos\nu = 1 - \cos(Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.).$$

Si iam valor supra inventus $\phi(x) = A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}$