CAPUT IX.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS RESOLVENDIS.

227.

Constitutionem aequationum ad functionum rationem reduci posse supra iam satis ostensum est. Denotet enim y functionem quamcunque ipsius x, si ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae sive sint algebraicae sive transcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ resolvi dicitur, si is ipsius x valor definiatur qui in functione y substitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiusmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y = 0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros f, g, h, i, &c. esse radices aequationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, ut si in ea loco x vel f, vel g, vel h, &c. substituatur, fiat revera $y = 0$.

228. Quoniam igitur functio y evanescit, si in ea loco x ponatur f, seu $x + (f - x)$, existente f radice aequationis $y = 0$, erit per ea, quae supra de functionibus demonstravimus:

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

ex qua aequatione valor radicis f ita definitur, ut quicquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, &c. substituti, semper resultet aequatio verum valorem ipsius f exhibens. Quo hoc clarius percipiatur, ponamus esse $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; erit

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2; \quad \& \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = 1$$

Quibus valoribus ſubſtitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f - x)(3xx - 4x + 3)$$
$$+ (f - x)^2 (3x - 2) + (f - x)^3$$

ſeu multiplicationibus actu inſtitutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur ſcilicet aequatio ſimilis ipſi propoſitae, quae propterea eaſdem continet radices.

229. Quanquam autem hoc modo ad novam aequationem non pervenitur, ex qua valor radicis f facilius definiri queat; tamen hinc ingentia ſubſidia ad inventionem radicum deduci poſſunt. Si enim pro x aſſumtus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita ut $f - x$ ſit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer convergent, hancque ob cauſam non multum a veritate aberrabitur, ſi praeter binos terminos initiales reliqui reiiciantur. Erit ergo ſi pro x iam valor cuipiam aequationis $y = 0$ radici prope aequalis fuerit aſſumtus, proxime:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} \quad \text{ſeu} \quad f = x - \frac{ydx}{dy},$$

ex qua formula etſi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x ſubſtitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f ſuppeditabit; ſicque continuo propius ad verum radicis f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuſcunque numeris extrahi poſſunt. Sit enim propoſitus numerus $a^n + b$ ex quo radicem poteſtatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ ſeu $x^n - a^n - b = 0$, ut ſit $y = x^n - a^n - b$; erit

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}; \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3};$$

&c.

 Hinc

Hinc si radix quaesita ponatur $=f$, ut sit $f=\sqrt[n]{(a^n+b)}$ erit:
$$0=x^n-a^n-b+n(f-x)x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2x^{n-2}+\&c.$$
Si igitur pro x iam statuatur numerus ad valorem radicis quaesitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x=a$, si quidem b sit numerus tam parvus, ut $a^n+b<(a+1)^n$; erit $b=na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f=a+\frac{b}{na^{n-1}}$, unde valor radicis multo propius cognoscetur. Sin autem adhuc tertium terminum assumere velimus, ut sit
$$b=na^{n-1}(f-a)+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(f-a)^2;\quad \text{fiet}$$
$$(f-a)^2=-\frac{2a}{n-1}(f-a)+\frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}},\quad \text{ideoque}$$
$$f=a-\frac{a}{n-1}\pm\sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2}+\frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)}\quad \text{seu}$$
$$f=\frac{(n-2)a+\sqrt{[aa+2(n-1)b:na^{n-2}]}}{n-1}.$$
Quare ope extractionis radicis quadratae valor radicis f adhuc propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c, *seu sit* $xx-c=y$.

Ponatur ergo numerus radici proximus $=a$, & $b=c-aa$, ob $aa+b=c$, & quia est $n=2$, fiet prior formula $f=a+\frac{c-aa}{2a}=\frac{c+aa}{2a}$; altera vero dat $f=\sqrt{c}$, quae est ipsa radix quaesita. Cum igitur sit proxime radix $=\frac{c+aa}{2a}$, hic ipse valor pro a scribatur, eritque propius radix $f=\frac{cc+6aac+a^4}{4a(c+aa)}$. Sit verbi gratia $c=5$; erit ex priori formula $f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}$. Ponatur ergo $a = 2$; erit $f = 2,25$; nunc ponatur $a = 2,25$; fiet $f = 2,236111$, ſtatuatur porro $a = 2,236111$, erit $f = 2,2360679$, qui valor iam minime a vero diſcrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuſcunque aequationis inveniri poteſt proxime ope aequationis $f = x - \frac{ydx}{dy}$, poſtquam ſcilicet pro x aſſumtus fuerit valor parum a quapiam aequationis radice diſcrepans. Ad huiuſmodi vero valorem pro x inveniendum, ſubſtituantur ſucceſſive pro x varii valores, inter eoſque is eligatur, qui functionis y minimum hoc eſt cyphrae proximum valorem indicat. Sic ſi ſit $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$,

$$\begin{array}{llll} \text{poſito} & x = 0 & \text{fit} & y = -4 \\ & x = 1 & \ldots & y = -2 \\ & x = 2 & \ldots & y = +2 \end{array}$$

unde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2, ipſius x. Cum ergo ſit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$, habebitur pro radice f aequationis $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$ invenienda haec aequatio:

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{x^3 - 2xx + 3x - 4}{3xx - 4x + 3}.$$

Sit ergo $x = 1$; fiet $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nunc ponatur $x = 2$, fiet $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Sit ergo $x = \frac{12}{7}$; erit $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si ulterius progredi velimus, logarithmis commodius utemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

lx

$$\begin{array}{rl|rl} lx &= 0,2182729 & x &= 1,653000 \\ lx^2 &= 0,4365458 & x^2 &= 2,732409 \\ lx^3 &= 0,6548187 & x^3 &= 4,516673 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x^3 &= 4,516673 \\ 3x &= \underline{4,959000} \\ & \ 9,475673 \\ 2xx+4 &= \underline{9,464818} \\ \text{num.} & \ 0,010855 \\ l\,\text{num.} &= 8,0356298 \\ l\,\text{den.} &= \underline{0,6613608} \\ l\,\text{fract.} &= 7,3742690\ ; \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3xx+3 &= 11,197227 \\ 4x &= \underline{6,612000} \\ \text{den.} &= 4,585227 \\ & \\ x &= 1,653000 \\ \text{fractio} &= \underline{0,002367} \\ f &= 2,650633 \end{array}$$

qui valor iam proxime ad verum accedit.

232. Citiores autem approximationes ex generali expressione deducere poterimus. Cum enim posita functione quacunque $y = 0$, si radix huius aequationis fuerit $x = f$, invenerimus esse:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

fit $f - x = z$, ita ut fit radix $f = x + z$, atque ponatur

$$\frac{dy}{dx} = p;\quad \frac{dp}{dx} = q;\quad \frac{dq}{dx} = r;\quad \frac{dr}{dx} = s;\ \text{erit:}$$

$$0 = y + zp + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3r}{6} + \frac{z^4s}{24} + \frac{z^5t}{120} + \&c.$$

in qua aequatione sumto pro x valore quocunque, ex quo simul y, p, q, r, s, &c. determinantur, inveniri debet quantitas z, qua inventa habebitur aequationis propositae $y = 0$, radix $f = x + z$. In id ergo est incumbendum, ut quam commodissime ex hac aequatione valor incognitae z eruatur.

233. Fingatur pro z series convergens haec:

$$z = A + B + C + D + E + \&c.$$

atque facta substitutione erit:

$$\begin{array}{rcllllll}
y & = & y & & & & & \\
pz & = & Ap & +\,Bp & +\,Cp & +\,Dp & +\,Ep & +\,\&c. \\
\tfrac{1}{2}qz^2 & = & & +\,\tfrac{1}{2}A^2q & +\,ABq & +\,ACq & +\,ADq & +\,\&c. \\
 & & & & & +\,\tfrac{1}{2}BBq & +\,BCq & +\,\&c. \\
\tfrac{1}{6}rz^3 & = & & & \tfrac{1}{6}A^3r & +\,\tfrac{1}{2}A^2Br & +\,\tfrac{1}{2}A^2Cr & +\,\&c. \\
 & & & & & & +\,\tfrac{1}{2}AB^2r & +\,\&c. \\
\tfrac{1}{24}sz^4 & = & & & & \tfrac{1}{24}A^4s & +\,\tfrac{1}{6}A^3Bs & +\,\&c. \\
\tfrac{1}{120}tz^5 & = & & & & & \tfrac{1}{120}A^5t & +\,\&c.
\end{array}$$

Unde obtinentur ſequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

&c. ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2q}{2p^3} - \frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit propoſita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2 \quad ; \qquad \frac{dp}{dx} = q = 20x^3 \quad ;$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2 \quad ; \qquad \frac{dr}{dx} = s = 120x \quad ; \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 1$, quia hic valor parum a radice diſcrepat, erit:

$y = 1$; $p = 7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$. unde fiet:

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \cdot 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

ſeu

seu $z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7}$ &c. eritque ergo $z = -0,18$, & radix $f = 0,82$, qui valor si denuo loco x substitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Invenimus ergo seriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo ut tum lex progressionis non pateat, tum ipsa nimis sit perplexa atque ad usum non satis accommodata. Alio igitur modo idem negotium suscipiamus, seriemque magis regularem investigemus, cuiuscunque aequationis propositae radicem exprimentem.

Sit ut ante proposita aequatio $y = 0$, existente y functione quacunque ipsius x; & quaestio huc redit, ut valor ipsius x definiatur, qui loco x substitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y sit functio ipsius x, vicissim x tanquam functio spectari poterit ipsius y, atque hac consideratione adhibita quaerendus est valor ipsius functionis x, quem induit, cum quantitas y evanescit. Si igitur f ponatur designare istum ipsius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0$, quoniam x abit in f, si statuatur $y = 0$, erit per ea quae supra sunt demonstrata:

$$f = x - \frac{ydx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3 x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4 x}{24dy^4} - \text{\&c.}$$

in qua aequatione statuitur differentiale dy constans. Si igitur ponatur: $\frac{dx}{dy} = p$; $\frac{dp}{dy} = q$; $\frac{dq}{dy} = r$; $\frac{dr}{dy} = s$; &c. erit his valoribus introductis, ut consideratio differentialis constantis exuatur:

$$f = x - py + \frac{1}{2} qy^2 - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 + \text{\&c.}$$

235. Tributo ergo ipsi x quocunque valore, simul valores ipsius y, atque quantitatum p, q, r, s, &c. determinabuntur; hisque inventis habebitur series infinita valorem radicis f ex-

f exprimens. Sin autem aequatio $y = 0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, si pro x diversi valores assumantur: quia enim y eundem valorem induere potest, etiamsi ipsi x diversi valores tribuantur, mirum non est eandem seriem saepenumero plures valores suppeditare posse. Quo igitur his casibus ambiguitas tollatur, simulque series convergens reddatur, pro x assumi debet valor iam prope ad valorem eius radicis, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum parvus, seriei que termini vehementer decrescent, ita ut paucis terminis sumendis iam satis iustus valor pro f inveniatur. Hic igitur valor si deinceps loco x substituatur, quantitas y multo minor evadet, seriesque multo magis converget; hocque modo statim radix f tam exacte innotescet, ut error futurus sit minimus. Hincque summa huius expressionis praerogativa prae ea, quam ante elicueramus, manifesto perspicitur.

236. Ponamus extrahendam esse radicem potestatis n ex numero quocunque N. Sumta igitur proxima potestate exponentis n, numerus propositus facile resolvetur in hanc formam $N = a^n + b$. Erit ergo

$$x^n = a^n + b \quad \& \quad y = x^n - a^n - b; \quad \text{unde fit:}$$

$$dy = nx^{n-1}\,dx \quad ; \quad \& \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)\,dx}{nx^n} \quad ; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{nnx^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} \,; \& \quad \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3x^{3n}} \,; \& \quad s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}},$$

&c.

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaesita $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ hoc modo exprimetur:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n.a^{4n-1}} + \&c.$$

sicque prodit eadem series, quae vulgo per evolutionem binomii $(a^n+b)^{\frac{1}{n}}$ erui solet.

237. Postquam ergo in actuali extractione radix proxime vera a fuerit inventa, simulque residuum b fuerit repertum, ad radicem insuper addi oportet valor fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$, quo propius vera radix obtineatur. Erit autem $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, ob $N = a^n + b$. At vero hoc modo radix iusto maior invenietur, quoniam tertius terminus subtrahi debet. Quo igitur per divisionem residui b radix multo propius ad verum accedens inveniatur idoneus divisor debet investigari, qui fingatur esse $na^{n-1} + \alpha b + \beta bb + \gamma b^3 + \&c.$ Cum igitur debeat esse:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.} = \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \&c.$$

fiet multiplicatione per $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.$ instituta:

$$\begin{array}{rllll} b = b & - \dfrac{(n-1)bb}{2na^n} & + \dfrac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} & - \dfrac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} & + \&c. \\ & + \dfrac{\alpha b^2}{na^{n-1}} & - \dfrac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} & + \dfrac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}} & \\ & & + \dfrac{\beta b^3}{na^{n-1}} & - \dfrac{(n-1)\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}} & \\ & & & \dfrac{\gamma b^4}{na^{n-1}} & \end{array}$$

Hinc deducuntur sequentes determinationes:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\beta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

seu $\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$

Fractio ergo ad radicem iam inventam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \frac{(n-1)b}{2a} - \frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}} + \frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n+1}}}$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N, atque inventa iam sit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inventam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b dividatur per

$$2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \&c.$$

Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b dividi debet per $3a^2 + \frac{b}{a} - \frac{2bb}{9a^4} + \frac{b^3}{9a^7} - \&c.$ quarum formularum usum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum sit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea dividi debebit per $28 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7 \cdot 196 \cdot 98}$, eritque ergo divisor $= 28,142135$, per quem si 4 dividatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & ultra.

 EXEM-

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero $N = 10$.

Proximus cubus est 8, & residuum $= 2$, unde $a = 2$ & $b = 2$, atque divisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12{,}9444$.

Quare radix cubica quaesita erit proxime $=$

$$2\frac{2}{12{,}9444} = 2\frac{10000}{64722}.$$

239. Series pro radice inventa etiam considerari potest tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini seriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis constituant, revocabuntur. Sic levi attentione adhibita perspicietur fore proxime:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a + \frac{n+1}{2}b}{a - \frac{n-1}{2}b}$$ atque adhuc propius

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{aa + \frac{n+2}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{n-2}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}.$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri possunt:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^3 + \frac{n+3}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)b^3}{120}}{a^3 - \frac{n-3}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)b^3}{120}}$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi potest, ad quam commode exprimendam sit:

A =

$$A = \frac{m(n+m)}{1.\ 2m} \qquad \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1.\ 2m}$$

$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2\ (2m-1)} A \qquad \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2\ (2m-1)} \mathfrak{A}$$

$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3\ (2m-2)} B \qquad \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3\ (2m-2)} \mathfrak{B}$$

$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4\ (2m-3)} C \qquad \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4\ (2m-3)} \mathfrak{C}$$

&c. &c.

His autem valoribus determinatis erit:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro n substituatur numerus fractus, istae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic si radix quaecunque potestatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, sequentes formulae in usum vocari possunt:

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a. \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a. \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}.$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, ut sit $a^n = N - b$; erit

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a. \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a. \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}.$$

241. Formula igitur generalis pro radice cuiusque aequationis invenienda in aequationibus, quae ex pluribus terminis constant, eundem praestat usum, quem solita regula binomii ad resolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre solet, atque adeo hoc casu in regulam illam ipsam abit. Sin

Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in usum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radicis exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius usum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur $x^n + cx - N = y$, erit $dy = (nx^{n-1} + c)\,dx$, hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}\,dx}{(nx^{n-1}+c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}+c)^3}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$; &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = -\frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1}+c)^7}$$

$$t = +\frac{n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} + n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5}}{(nx^{n-1}+c)^9}$$

&c.

Quibus valoribus inventis, erit aequationis propositae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \&c.$$

quicquid enim pro x substituatur, unde simul litterae y, p, q, r, &c. valores determinatos induunt, summa seriei aequabitur valori unius radicis.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.

Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$. Po-

Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{78}{5^5}$;

$s = -\frac{16.90}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{13}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \&c. = 0,771072.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia est $y = x^3 + 2x - 2$;

$p = \frac{1}{3xx + 2}$; $q = -6p^3 x$; $r = 90xxp^5 - 12p^5$; atque

$s = -2160p^7 x^3 + 720p^7 x$; habebitur logarithmis adhibendis:

$$\begin{array}{rl|rl} lx = & 9,8864907 & x = & 0,77 \\ lx^2 = & 9,7729814 & x^2 = & 0,5929 \\ lx^3 = & 9,6594721 & x^3 = & 0,456533 \\ & & 2x = & \underline{1,54} \\ & & x^3 + 2x = & 1,996533 \\ & & \text{Ergo} \quad y = & -0,003467 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} l-y = & 7,5399538; \quad 3xx + 2 = 3,7787 \\ lp = & 9,4226575; \quad l(3xx + 2) = 0,5773424 \\ l-py = & \underline{6,9626113;} \quad \underline{-py = 0,000917511} \\ lp^3 = & 8,2679725 \\ lx = & 9,8864907 \\ l3 = & 0,4771213 \\ ly^2 = & \underline{5,0799076} \\ l-\frac{1}{2}qyy = & 3,7114922 \qquad -\frac{1}{2}qyy = 0,000000514. \end{array}$$

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in ultima figura a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit proposita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$ Ergo

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{3xx + 1}{4(x^3 - x + 1)^2}$$

$$q = \frac{-3xx + 1}{16(x^3 - x + 1)^3}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{16(x^3 - x + 1)^4}$$

$$\& \quad r = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^5}; \qquad \&c.$$

ex quibus erit radix aequationis propositae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} - \frac{(3xx - 1)yy}{32(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4xx - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} - \&c.$$

Oportet ergo ipsi x idoneum valorem tribui, quo series ista fiat convergens. Primum autem perspicuum est, si ipsi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3 - x + 1 = 0$, tum omnes seriei terminos praeter primum evadere infinitos, neque adeo exinde quicquam concludi posse. Conveniit ergo ipsi x eiusmodi valorem assignare, quo & y fiat exiguum & $x^3 - x + 1$ non admodum parvum. Sit $x = 1$, erit $y = -5$, & $f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ - &c. ubi cum tres termini $\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ congruant cum progressione geometrica, cuius summa est $\frac{5}{9}$ erit circiter $f = \frac{14}{9}$. Statuamus ergo $x = \frac{3}{2}$, erit $y = -\frac{23}{16}$; & $x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}$, unde fit:

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{391}{256.529} - \&c. = 1,61.$$

Ponatur nunc $x = 1,61$; erit: fit $x^3 - x + 1 = z$

$lx = 0,2068259$	$x = 1,61$
$lx^2 = 0,4136518$	$x^2 = 2,5921$
$lx^3 = 0,6204777$	$x^3 = 4,173281$
$lx^4 = 0,8273036$	$x^4 = 6,718983$
	hinc
$l{-y} = 8,4016934$	$y = -0,025217$
$lz = 0,5518502$	$z = 3,563281$
$l\frac{-y}{z} = 7,8498432$	

$l4 =$

$l4 = 0,6020600$	
$l\dfrac{-y}{4z} = 7,2477832$	$\dfrac{-y}{4z} = 0,0017692$
$l(3xx-1) = 0,8309926$	$3xx - 1 = 6,7763$
$ly^2 = 6,8033868$	
$7,6343794$	
$lz^3 = 1,6555506$	
$5,9788288$	
$l32 = 1,5051500$	$\dfrac{(3xx-1)y^2}{32z^3} = 0,000002976$
$4,4736788$	

Ergo $f = 1,6117662$.

242. Methodus haec inveniendi radices aequationum proxime aeque patet ad quantitates transcendentes. Quaeramus numerum x, cuius logarithmus ex quocunque canone desumptus ad ipsum numerum datam habeat rationem ut 1 ad n, atque habebitur ista aequatio $x - nlx = 0$: sit autem k modulus horum logarithmorum, ita ut isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur per k, erit $d.lx = \frac{kdx}{x}$. Ponatur ergo $x - nlx = y$, sitque f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = nlx$. Cum igitur sit $y = x - nlx$, erit $dy = dx - \frac{kndx}{x} = \frac{dx(x-kn)}{x}$ &

$$\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x-kn}; \text{ unde } dp = -\frac{kndx}{(x-kn)^2} \text{ ergo}$$

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3}; \quad dq = \frac{2knxdx + k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^5}; \text{ \&c.} \qquad \text{Quare fiet:}$$

$$f = x - \frac{xy}{x-kn} - \frac{knxyy}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \text{\&c.}$$

 In-

Infra autem ostendemus hoc problema solutionem non admittere, nisi sit $kn > e$, existente e numero cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$; seu debet esse $kn > 2,7182818$.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus praeter 10, cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipsius numeri:

Quia de logarithmis tabularibus quaestio instituitur, erit $k = 0,434294481903 25$, atque ob $n = 10$ habebitur $kn = 4,3429448190325$. Facto iam $x = 1$, erit $y = 1$, fietque $f = 1 + \frac{1}{3,3429} + \frac{2,1714724}{(3,3429)^3} - \&c.$ Statuatur ergo $x = 1,37$, sicque proxime erit $f = 1,37$. & ob $y = x - 10lx$,

erit $lx = 0,1367205671564 06$, &

erit $y = 0,0027943284 3503$. Fiat ergo

$-x + kn = 2,9729448190325$.

$$\begin{aligned} lx &= 0,1367205 \\ ly &= \underline{7,4462773} \\ & \quad 7,5829978 \\ l(kn - x) &= \underline{0,4731866} \\ & \quad 7,1098112 \end{aligned} \qquad \frac{-xy}{x - kn} = 0,0012876 9.$$

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{knxyy}{2(x-kn)^3} = \frac{kny}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{xy}{x-kn}$

erit:

$$\begin{aligned} l\frac{-xy}{x-kn} &= 7,1098112 \\ ly &= 7,4462773 \\ lkn &= \underline{0,6377842} \\ & \quad 5,1938727 \\ l(kn-x)^2 &= \underline{0,9463732} \\ & \quad 4,2474995 \\ l2 &= \underline{0,3010300} \\ l\,\text{tert. term.} &= 3,9464695 \end{aligned}$$

I. term. $x = 1,37$

II.

$$\begin{aligned} \text{II. term.} &= 0,00128769 \\ \text{III. term.} &= 0,00000088 \\ f &= 1,37128857 \\ lf &= 0,137128857. \end{aligned}$$

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x, ut sit $x^x = a$, erit $xlx = la$. Quare posito $y = xlx - la$, fiet

$$dy = dxlx + dx, \quad \& \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+lx}. \quad \text{Tumque}$$

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3},$$

$$dq = \frac{dx}{xx(1+lx)^3} + \frac{3dx}{xx(1+lx)^4}, \quad \text{ideoque}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1+lx)^4} + \frac{3}{xx(1+lx)^5}; \quad \text{porro erit}$$

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6}; \quad \text{ergo}$$

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}, \quad \&$$

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}.$$

Hinc ergo si verus valor ipsius x sit $= f$, ita ut sit $f^f = a$; erit:

$$f = x - \frac{y}{1+lx} - \frac{yy}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2xx(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$
$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$

—

$$-\frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5}-\frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$
$$-\frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$
&c.

Haec ergo expressio in infinitum continuata, quicunque valor pro x statuatur, sumto $y = x\,lx - la$ verum ipsius f dabit valorem. Sic si ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, & $f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} -$ &c. ubi notandum est esse la logarithmum hyperbolicum ipsius a.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus f, *ut sit* $f^f = 100$.

Cum sit $a = 100$, & $y = x\,lx - la = x\,lx - l\,100$, quia patet esse $f > 3$ & < 4, statuatur

$$x = \tfrac{7}{2};\ \text{eritque}\ lx = 1,25276296849$$
$$x\,lx = 4,38467038972$$
$$l100 = 4,60517018599$$
$$y = -0,22049979627$$
$$1 + lx = 2,25276296849$$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$$l - y = 9,3434083$$
$$l(1+lx) = 0,3527156$$
$$8,9906927;\ \frac{-y}{1+lx} = 0,0978797$$
$$ly^2 = 8,6868166$$
$$3l(1+lx) = 1,0581468$$
$$= 7,6286698$$
$$l2x = l7 = 0,8450980$$
$$6,7835718\ \frac{y^2}{2x(1+lx)^3} = 0,0006075$$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$, sequentibus vero insuper terminis sumtis erit $f = 3,5972852$.

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet

bet usum in resolutione aequationum, si quaepiam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x. Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a hae duae radices facile invenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y evanescat, si x significet unam ex radicibus aequationis $y = 0$, evanescet quoque y, si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6dx^3} + \&c.$$

Unde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radicis x, quam alia radix superat quantitate a.

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam undecunque constet, habere duas radices unitate differentes.

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Iam ob $a = 1$ erit:

A

$$\begin{array}{ll}
A \ldots & 5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0. \\
B \ldots & x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0.
\end{array}$$

At est

Multiplicetur superior per x & inferior per 5, alteraque ab altera subtracta relinquet:

$$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0$$

seu

$$C \ldots 5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$$

a qua prima A subtracta relinquet:

$$\begin{array}{ll}
D \ldots & 19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0 \\
D.5x \ldots & 95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0 \\
A.19 \ldots & \underline{95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0} \\
E \ldots\ldots & 415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0 \\
D.415 \ldots\ldots & 7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0 \\
E.19 \ldots\ldots & \underline{7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0} \\
F \ldots\ldots & 1997x^2 - 12581x + 17174 = 0 \\
D.247 \ldots & 4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0 \\
E.32 \ldots & \underline{13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0} \\
 & \underline{8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0} \\
G \ldots\ldots & 8587x^2 - 23701x + 13054 = 0 \\
F.8587 \ldots & 17148239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0 \\
G.1997 \ldots & \underline{17148239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0} \\
 & 60702150x - 121404300 = 0
\end{array}$$

Ex qua aequatione sequitur $x = 2$, ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quorum uterque valor aequationis satisfacit.

245. Potest autem haec operatio absolvi sine subsidio calculi differentialis, propterea quod eadem aequatio, quam calculus differentialis suppeditavit, prodit si in ipsa aequatione proposita ponatur $x + a$ loco x. Ceterum vero haec methodus eliminandi nimium est operosa, &, si aequationes essent altioris gradus, labor penitus foret insuperabilis; ex quo multo minus in aequationibus transcendentibus locum habere potest. Quod si autem ponamus duas aequationis propositae $y = 0$ radices inter se esse aequales, tum ob $a = 0$,

aequa-

aequatio differentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quaepiam aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae praebebunt eum ipsius x valorem, cui binae radices sunt aequales. Unde vicissim si ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$. Evenit autem hoc, si postquam quantitas x ope duarum istarum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata, perveniatur ad aequationem identicam. Sic si proponatur aequatio:

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam additum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ seu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius triplum est $3xx + 12x - 36 = 0$

subtrahatur $\underline{3xx - 4x - 4 = 0}$

$$16x - 32 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Cum ergo prodierit $x = 2$, substituatur hic valor in una praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio identica $12 - 8 - 4 = 0$, unde colligitur aequationem propositam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices aequales; nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quotcumque dimensionum:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

quae duas habeat radices inter se aequales, erit quoque

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \&c. = 0.$$

Scilicet illius aequationis radix duplex simul erit radix istius aequationis. Multiplicetur illa per n, ab eaque haec per x multiplicata subtrahatur, prodibitque haec nova aequatio:

$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} +$ &c. $= 0$. Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicatae erit: $ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} +$ &c. $= 0$ quae aequatio cum ipsa proposita coniuncta monstrabit radices aequales, si quas habet proposita. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu assumi queant, coefficientes a, $a+b$, $a+2b$, &c. progressionem quamcunque arithmeticam repraesentant. Quamobrem si aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae invenientur, si singuli aequationis propositae termini multiplicentur per terminos cuiusvis progressionis arithmeticae respective; nova enim aequatio hoc modo resultans eam radicem, quae in proposita bis inest, quoque continebit. Sic aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{\&c.} = 0$$

si eius termini multiplicentur per progressionem arithmeticam hanc: a; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; $a+4b$; &c. prodibit nova aequatio haec:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \text{\&c.} = 0$$

quae cum illa coniuncta radices aequales ostendet. Haecque est regula satis cognita inveniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247. Si aequatio $y = 0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam erit $\frac{ddy}{dx^2} = 0$; si quidem pro x statuatur eius radicis valor, quae in aequatione $y = 0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y = 0$ tres habere radices huiusmodi x, $x+a$, & $x+b$, quae primum intervallis finitis a & b a se invicem discrepent; & quia y evanescit, si loco x tam $x+a$, quam $x+b$ scribatur, erit:

$$y = 0$$

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{\&c.} = 0$$

$$y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2 ddy}{2dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{\&c.} = 0$$

a quibus

a quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{bddy}{2dx^2} + \frac{b^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{b^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

Subtrahantur quoque hae a se invicem, divisioneque per $a - b$ facta erit:

$$\frac{ddy}{2dx^2} + \frac{(a+b)d^3 y}{6dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0.$$

Ponatur iam $a = 0$ & $b = 0$, ita ut tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos evanescentes:

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habeat radices aequales puta f, f, f, tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

tres contineat radices aequales f, f, f, si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusvis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f: quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat aequatio eamdem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressiones arithmeticae eligantur, quarum vel primus vel ultimus terminus sit $= 0$, tum aequatio prodibit uno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilior evadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y = 0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f, tum posito $x = f$ non solum fieri $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, & $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, sed etiam fore, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Scilicet uti aequatio $y = 0$ quater continet radicem $x = f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio vero $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ bis, & aequatio $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ semel complectetur. Hoc quoque facilius perspicietur, si perpendamus functionem y hoc casu huiusmodi formam $(x-f)^4 X$ habere debere, denotante X functionem quamcumque ipsius x. Hac forma assumta erit: $\frac{dy}{dx} = (x-f)^3 \left(4X + \frac{(x-f)dX}{dx}\right)$, ideoque per $(x-f)^3$ divisibilis. Similiter porro habebit $\frac{ddy}{dx^2}$ factorum $(x-f)^2$, & $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perspicuum est, si radix $x = f$ in aequatione $y = 0$ quater insit, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ter, in aequatione $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ bis, atque in $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ semel adhuc inesse debere.