CAPUT XV.

DE VALORIBUS FUNCTIONUM, QUI CERTIS CASIBUS VIDENTUR INDETERMINATI.

355.

Si functio ipsius x quaecunque y fuerit fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator posito loco x certo quodam valore simul evanescant; tum isto casu fractio $\frac{P}{Q}$ valorem functionis y exprimens evadet $= \frac{0}{0}$, quae expressio cum cuique quantitati sive finitae sive infinitae sive infinite parvae possit esse aequalis, ex ea prorsus valor ipsius y hoc casu colligi nequit, atque ideo videtur indeterminatus. Interim tamen facile perspicitur, quia praeter hunc casum functio y perpetuo valorem determinatum recipit, quicquid pro x substituatur, etiam hoc casu valorem ipsius y indeterminatum esse non posse. Manifestum hoc fiet vel ex hoc exemplo, si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, quo facto $x = a$ fit utique $y = \frac{0}{0}$. Cum autem numeratore per denominatorem diviso fiat $y = a + x$, evidens est si ponatur $x = a$ fore $y = 2a$, ita ut hoc casu fractio illa $\frac{0}{0}$ aequivaleat quantitati $2a$.

356. Quoniam ergo supra ostendimus, inter cyphras rationem quamcunque intercedere posse, in huiusmodi exemplis ratio determinata, quam numerator ad denominatorem teneat, investigari debet. Cum autem in cyphris absolutis ista diversitas perspici nequeat, earum loco quantitates infinite parvae intro-

introduci debent, quae etsi ratione significationis a cyphra non differunt, tamen ex diversis earum functionibus, quae numeratorem & denominatorem constituunt, valor fractionis sponte elucet. Sic si habeatur ista fractio $\frac{a\,dx}{b\,dx}$, etiamsi revera numerator & denominator sit $=0$, tamen patet valorem huius fractionis esse determinatum nempe $=\frac{a}{b}$. Sin autem habeatur haec fractio $\frac{a\,dx^2}{b\,dx}$, huius valor erit nullus, quemadmodum huius valor $\frac{a\,dx}{b\,dx^2}$ est infinite magnus. Si igitur loco nihilorum, quae saepenumero in calculum ingrediuntur, infinite parva introducamus, hunc inde fructum percipiemus, ut rationem, quam illa nihila inter se tenent, mox cognoscamus, nullumque amplius dubium circa significationem huiusmodi expressionum supersit.

357. Quo haec planiora reddantur, ponamus fractionis $y=\frac{P}{Q}$ tam numeratorem quam denominatorem evanescere, si statuatur $x=a$. Ad haec autem nihila, quae inter se comparari non possunt, evitanda, ponamus $x=a+dx$, quae positio revera in priorem $x=a$ recidit ob $dx=0$. Cum vero, si loco x ponatur $x+dx$, functiones P & Q abeant in $P+dP$ & $Q+dQ$; positioni $x=a+dx$ satisfiet, si in his valoribus ubique statuatur $x=a$, quo quidem casu P & Q evanescere assumuntur. Hinc si loco x ponatur $a+dx$, fractio $\frac{P}{Q}$ trasmutabitur in hanc $\frac{dP}{dQ}$, quae propterea valorem functionis $y=\frac{P}{Q}$ exprimit casu $x=a$. Haecque expressio indeterminata amplius esse non poterit, si quidem functionum P & Q differentialia vera sumantur, uti in capite praecedente do-

docuimus. Hoc enim pacto differentialia dP & dQ nunquam in nihilum absolutum abeunt, sed nisi per differentiale dx ipsum exprimantur, saltem per eius potestates exhibebuntur. Quodsi igitur reperiatur $dP = Rdx^m$ & $dQ = Sdx^n$, erit functionis $y = \frac{P}{Q}$ casu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui propterea erit finitus & $= \frac{R}{S}$, si fuerit $m = n$; sin autem sit $m > n$, tum valor fractionis propositae revera erit $= 0$: at si sit $m < n$, iste valor in infinitum excrescit.

358. Quoties ergo huiusmodi fractio occurrit $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator certo casu puta $x = a$ simul evanescant, valor istius fractionis hoc casu $x = a$ per sequentem regulam invenietur:

Quaerantur quantitatum P & Q differentialia casu x = a, eaque loco ipsarum P & Q substituantur, quo facto fractio $\frac{dP}{dQ}$ *exhibebit valorem fractionis* $\frac{P}{Q}$ *quaesitum.*

Si differentialia dP & dQ methodo consueta inventa neque infinita fiant neque evanescant casu $x = a$, tum ea retineri poterunt; sin autem ambo vel $= 0$ fiant vel $= \infty$, tum modo in praecedente Capite exposito haec differentialia completa casu $x = a$ investigari debent. Plerumque etiam calculus mirifice contrahitur, si antea ponatur $x - a = t$ seu $x = a + t$, quo prodeat fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator evanescunt casu $t = 0$; tum enim differentialia dP & dQ habebuntur, si ubique dt loco t substituatur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor fractionis huius $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ *casu* $t = 0$.

Quoniam hoc casu $t = 0$ & numerator & denominator evanescit,

nescit, loco t tantum scribatur dt, atque valor quaesitus exprimetur hac fractione $\frac{b-\sqrt{(bb-dt^2)}}{dt^2}$. Cum vero sit $\sqrt{(bb-dt^2)} = b-\frac{dt^2}{2b}$; ista fractio abit in hanc $\frac{dt^2}{2bdt^2}=\frac{1}{2b}$. Hinc fractio proposita $\frac{b-\sqrt{(bb-tt)}}{tt}$ casu $t=0$ recipit hunc valorem $\frac{1}{2b}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{\sqrt{(aa+ax+xx)}-\sqrt{(aa-ax+xx)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}} \quad \textit{casu } x=0.$$

Hic iterum statim dx loco x substitui potest; quo facto cum sit:

$$\sqrt{(aa+adx+dx^2)} = a+\tfrac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a};$$

$$\sqrt{(aa-adx+dx^2)} = a-\tfrac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a};$$

atque $\sqrt{(a+dx)}=\sqrt{a}+\frac{dx}{2\sqrt{a}}$; $\sqrt{(a-dx)}=\sqrt{a}-\frac{dx}{2\sqrt{a}}$ fiet numerator $=dx$ & denominator $=\frac{dx}{\sqrt{a}}$, ex quo fractionis propositae valor quaesitus erit $=\sqrt{a}$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{(2ax-aa)}}{xx-2ax-aa+2a\sqrt{(2ax-xx)}} \quad \textit{casu } x=a.$$

Si more consueto differentialia sumantur & in loca numeratoris ac denominatoris substituantur, habebitur:

$\frac{3xx-8ax+7a^2-2a^3:\sqrt{(2ax-aa)}}{2x-2a+2a(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}}$, cuius fractionis numerator

merator

merator ac denominator denuo evanescunt, si ponatur $x = a$. Quare ob eandem rationem eorum loco denuo ipsorum differentialia substituantur, prodibitque: $\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$ cuius numerator ac denominator iterum casu $x = a$ evanescunt. Pergamus ergo eorum loco ipsorum differentialia substituere: $\frac{6 - 6a^5 : (2ax - aa)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - aa)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$. Verum & hic posito $x = a$ denuo tam numerator quam denominator evanescunt. Porro igitur differentialibus ipsorum loco substitutis, orietur:

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

Nunc denique loco x ponatur a, prodibitque haec fractio determinata $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, qui est valor quaesitus fractionis propositae.

Quodsi autem antequam haec investigatio suscipiatur, ponatur $x = a + t$, fractio proposita transmutabitur in hanc:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$$

quae cum recipiat formam $\frac{0}{0}$, si ponatur $t = 0$, ponatur dt loco t, & erit:

$$\frac{2a^3 + 3a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2adt)}}{-2aa + dt^2 + 2a\sqrt{(aa - dt^2)}}.$$

Convertantur iam formulae irrationales in series, quae eousque continuentur, quoad termini a membro rationali non amplius destruantur: $\sqrt{(aa + 2adt)} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$

$$\sqrt{(aa - dt^2)} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3},$$

qui-

quibus valoribus substitutis prodibit fractio haec:

$$\frac{5\,dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a,$$

qui est valor fractionis propositae iam ante inventus.

EXEMPLUM IV.

Invenire valorem huius fractionis:

$$\frac{\surd(2aa - 2ax) - \surd(2ax - xx)}{a - x + \surd(aa - xx)} \quad \text{casu } x = a.$$

Substitutis in loca numeratoris & denominatoris eorum differentialibus prodibit haec fractio, quae casu $x = a$ ipsi propositae erit aequalis: $\dfrac{-a : \surd(2aa - 2ax) - (a - x) : \surd(2ax - xx)}{-1 - x : \surd(aa - xx)}$ cuius numerator ac denominator casu $x = a$ fiunt infiniti. Verum si uterque per $-\surd(a - x)$ multiplicetur, habebitur $\dfrac{a : \surd 2a + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \surd(2ax - xx)}{\surd(a - x) + x : \surd(a + x)}$ quae posito $x = a$ dabit hunc valorem determinatum $\dfrac{a : \surd 2a}{a : \surd 2a} = 1$, qui propterea aequalis est fractioni propositae casu $x = a$.

359. Si igitur habeatur fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator casu $x = a$ evanescat, eius valor per consuetas differentiandi regulas assignari poterit, neque opus erit ad differentialia, quae capite praecedente tractavimus, recurrere. Sumtis enim differentialibus fractio proposita $\frac{P}{Q}$ casu $x = a$ aequalis erit fractioni $\frac{dP}{dQ}$; cuius si numerator & denominator posito $x = a$ induant valores finitos, cognoscetur valor fractionis propositae; sin autem alter fiat $= 0$, manente altero finito, tum fractio erit vel $= 0$ vel $= \infty$, prout vel numerator

merator evanescat vel denominator. At si alteruter vel uterque fiat $=\infty$, quod evenit, si dividantur per quantitates casu $x=a$ evanescentes; tum multiplicando utrumque per hos divisores, istud incommodum tolletur, uti in exemplo postremo evenit. Quodsi vero tam numerator quam denominator casu $x=a$ denuo evanescat, tum iterum, uti initio factum est, differentialia erunt capienda, ita ut haec fractio $\frac{ddP}{ddQ}$ prodeat, quae casu $x=a$ propositae adhuc erit aequalis, &, si idem rursus in hac fractione usu veniat, ut fiat $=\frac{0}{0}$, tum in eius locum surrogetur haec $\frac{d^3P}{d^3Q}$, atque ita porro, donec ad fractionem perveniatur, quae valorem determinatum exhibeat, sive finitum sive infinite magnum, sive infinite parvum. Sic in exemplo tertio oportebat ad fractionem $\frac{d^4P}{d^4Q}$ progredi, antequam valorem fractionis propositae $\frac{P}{Q}$ assignari licuerit.

360. Usus huius investigationis elucet in definiendis summis serierum, quas supra Capite II. §. 22. eruimus, si ponatur $x=1$. Ex iis enim, quae ibi tradita sunt, sequitur fore:

$$x+x^2+x^3+\dots+x^n = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$$

$$x+x^3+x^5+\dots+x^{2n-1} = \frac{x-x^{2n+1}}{1-xx}$$

$$x+2x^2+3x^3+\dots+nx^n = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$x+3x^3+5x^5+\dots+(2n-1)x^{2n-1} = \frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

$$x+4x^2+9x^3+\dots+n^2x^n = \frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

&c.

Quod

Quod si nunc harum serierum summae desiderentur casu quo $x = 1$, in expressionibus istis tam numerator quam denominator evanescunt. Valores ergo harum summarum casu $x = 1$ methodo hic exposita definiri poterunt. Quoniam vero eaedem summae aliunde constant, ex consensu veritas huius methodi magis elucebit.

EXEMPLUM I.

Definire valorem huius fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Quoniam casu $x = 1$ numerator ac denominator evanescit, substituantur differentialia in eorum locum, habebiturque $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$, quae posito $x = 1$ dat n pro summa seriei quaesita.

EXEMPLUM II.

Definire valorem fractionis $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Sumtis differentialibus fractio proposita transmutatur in hanc: $\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2x}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= n$.

EXEMPLUM III.

Invenire valorem huius fractionis: $\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ *casu* $x = 1$, *qui exprimet summam seriei* $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, *quam constat esse* $= \frac{nn + n}{2}$.

Sumtis differentialibus pervenietur ad hanc fractionem

 1 —

$\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$, cuius adhuc tam numerator quam denominator casu $x=1$ evanescit. Hinc denuo differentialia sumantur, ut prodeat haec fractio:

$\frac{-n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, quae posito $x=1$ abit in $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$ summam seriei propositae.

EXEMPLUM IV.

Invenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}\quad \textit{casu } x=1,$$

qui exprimet summam seriei $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ *quam constat esse* $=nn$.

Substitutis differentialibus in loca numeratoris & denominatoris provenit haec fractio:

$$\frac{1+3xx-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$$

quae cum adhuc idem incommodum habeat, ut posito $x=1$ abeat in $\frac{0}{0}$, denuo differentialia sumantur,

$$\frac{6x-2n(2n+1)^2x^{2n-1}+(2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4+12xx}$$

quae posito $x=1$ abit in:

$$\frac{6-2n(2n+1)^2+(2n-1)(2n+2)(2n+3)}{8}=nn.$$

EXEMPLUM V.

Invenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

casu $x=1$, *qui dabit summam seriei* $1+4+9+\cdots+n^2$, *quam constat esse* $=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

Sumtis numeratoris ac denominatoris differentialibus, fiet

$$\frac{1 + 2x - (n+1)^3 . x^n + (n+2)(2nn + 2n - 1)x^{n+1} - nn(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}$$

in qua cum numerator ac denominator posito $x = 1$ denuo evanescat, differentialia secunda sumantur:

$$\frac{2 - n(n+1)^3 x^{n-1} + (n+1)(n+2)(2nn+3n-1)x^n - n^2(n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}$$

eodem vero adhuc subsistente incommodo, ad differentialia tertia procedatur, ut prodeat haec fractio:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 x^{n-2} + n(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n-1} - n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6}$$

quae tandem posito $x = 1$ abit in hanc formam determinatam:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 + n(n+1)(n+2)(nn-n-1)}{-6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$; qui est ille ipse valor, quo seriem memoratam exprimi invenimus.

EXEMPLUM VI.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, *cuius valorem casu* $x = 1$ *assignari oporteat.*

Quoniam haec fractio est productum ex his duabus: $\frac{x^m}{1 + x^p} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^p}$, prioris autem factoris casu $x = 1$ valor est $= \frac{1}{2}$, tantum opus est ut alterius factoris $\frac{1 - x^n}{1 - x^p}$ valor eodem casu quaeratur, qui sumtis differentialibus erit $= \frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$: unde fractionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= \frac{n}{2p}$. Idem valor prodit, si immediate differentialia in fractione proposita capiantur: fiet enim $\frac{mx^{m-1} - (m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$, cuius va-

lor

lor posito $x = 1$, erit $= \frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, ut ante:

361. Eadem methodo erit utendum, si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ vel numerator vel denominator vel uterque fuerit quantitas transcendens. Quae operationes, quo clarius explicentur, sequentia exempla adiicere visum est.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$, *cuius valor quaeratur casu* $x = a$.

Sumtis differentialibus statim pervenitur ad hanc fractionem $-\frac{nx^{n-1}}{-1:x} = nx^n$, cuius valor posito $x = a$, erit na^n.

EXEMPLUM II.

Sit proposita ista fractio $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$, *cuius valor quaeritur casu* $x = 1$.

Sumtis differentialibus numeratoris & denominatoris prodit $\frac{1:x}{-1:2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$, cuius valor posito $x = 1$, cum sit $= 0$, sequitur fractionem $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ casu $x = 1$ evanescere.

EXEMPLUM III.

Sit proposita ista fractio $\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$, *cuius valor quaeratur posito* $x = a$, *quo casu numerator & denominator evanescunt.*

Differentiatis secundum regulam numeratore ac denominatore erit $\frac{-1 + a:x}{-(a-x):\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$: ubi etsi numeramerator ac denominator casu $x = a$ adhuc evanescit, tamen quia uterque divisibilis est per $a - x$, habebitur ista fractio $-\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, cuius valor casu $x = a$ est determinatus atque $= -1$; abitque igitur fractio proposita in -1, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM IV.

Sit proposita ista fractio $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1+x)}$, *cuius valor quaeritur posito* $x = 0$.

Sumtis differentialibus habebitur ista functio $\frac{e^x + e^{-x}}{1:(1+x)}$, quae posito $x = 0$ dat 2 pro valore quaesito.

EXEMPLUM V.

Invenire valorem huius fractionis $\frac{e^x - 1 - l(1+x)}{xx}$, *casu quo ponitur* $x = 0$.

Si loco numeratoris ac denominatoris eorum differentialia substituantur, orietur haec fractio $\frac{e^x - 1:(1+x)}{2x}$, quae cum adhuc abeat in $\frac{0}{0}$, si ponatur $x = 0$, denuo differentialia sumantur, ut habeatur $\frac{e^x + 1:(1+x)^2}{2}$, quae posito $x = 0$ praebet $\frac{1+1}{2} = 1$. Quod idem patet si loco x statim $0 + dx$ substituatur: cum enim sit $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ & $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$, $\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1.$

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{lx}$, *casu quo ponitur* $x=\infty$.

Quo ista fractio ad formam, quae hoc casu transeat in $\frac{0}{0}$ reducatur, ita repraesentetur $\frac{1:lx}{1:x^n}$, sic enim casu $x=\infty$, tam numerator quam denominator evanescet. Ponatur vero porro $x=\frac{1}{y}$, ita ut casu $x=\infty$, fiat $y=0$, atque proponetur ista fractio $-\frac{1:ly}{y^n}$, cuius valor casu $y=0$ investigari debet. Sumtis autem differentialibus erit $\frac{1:y(ly)^2}{ny^{n-1}}=\frac{1:(ly)^2}{ny^n}$, quae posito $y=0$, cum abeat in $\frac{0}{0}$, sumantur denuo differentialia, eritque $\frac{-2:(ly)^3}{n^2y^n}$; ubi quia idem incommodum adest, si porro differentialia sumantur prodibit $\frac{6:(ly)^4}{n^3y^n}$, sicque quousque procedamus, perpetuo idem incommodum occurret. Quamobrem ut hoc non obstante valorem quaesitum eruamus, sit s valor fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ casu, quo ponitur $y=0$, & cum eodem casu sit quoque $s=\frac{1:(ly)^2}{ny^n}$; erit ex illa aequatione $ss=\frac{1:(ly)^2}{y^{2n}}$, quae per istam divisa dabit $s=\frac{ny^n}{y^{2n}}$ $=\frac{n}{y^n}$, ex qua perspicitur casu $y=0$ fieri s infinitum. Fit ergo fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ valor casu $y=0$ infinitus, ideoque posito $y=dx$, habebit $\frac{1}{ldx}$ ad dx^n rationem infinitam, uti iam supra innuimus.

EXEM-

EXEMPLUM VII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ *casu* $x = 0$, *quo tam numerator quam denominator evanescit.*

Sit hoc casu $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, erit sumtis differentialibus quoque $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:xx} = \frac{nx^{n+1}}{e^{-1:x}}$, & quia hic idem incommodum occurrit, perpetuoque recurrit, quousque differentiationes continuentur, remedio ante adhibito utamur. Prior aequatio dat $x^n = e^{-1:x}s$ & $x^{n(n+1)} = e^{-(n+1:x)}\, s^{n+1}$ altera aequatio dat $x^{n+1} = e^{-1:x}s:n$, unde fit $x^{n(n+1)} = e^{-n:x}\, s^n : n^n$, qui valor illi aequatus dabit $e^{-1:x}sn^n = 1$ ideoque $s = \frac{1}{n^n\, e^{-1:x}} = \infty$, si $x = 0$. Quare posito x infinite parvo habebit dx^n ad $e^{-1:dx}$ rationem infinite magnam, quicunque numerus finitus pro n statuatur: unde sequitur $e^{-1:dx}$ esse infinite parvum homogeneum cum dx^m, si m fuerit numerus infinite magnus.

EXEMPLUM VIII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ *casu, quo ponitur* $x = \frac{\pi}{2}$ *seu arcui 90 graduum.*

Sumtis differentialibus obtinebitur haec fractio $\frac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$ quae posito $x = \frac{\pi}{2}$ ob $\sin x = 1$ & $\cos x = 0$ abit in 1: ita ut unitas sit valor quaesitus fractionis propositae. Quod idem patet sine differentiatione: cum enim sit

$$\cos x = \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

fractio

fractio proposita abit in hanc $\frac{\surd(1-\sin x)+\surd(1+\sin x)}{\surd(1+\sin x)-\surd(1-\sin x)}$, quae fit evidenter $=1$, si fiat $\sin x = 1$.

EXEMPLUM IX.

Invenire valorem huius expressionis $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ *casu quo ponitur* $x = 1$.

Loco numeratoris & denominatoris eorum differentialibus substitutis prodibit ista fractio : $\frac{x^x(1+lx)-1}{-1+1:x}$, quae cum etiam nunc fiat $=\frac{0}{0}$ posito $x=1$, sumantur denuo differentialia, ut prodeat $\frac{x^x(1+lx)^2+x^x:x}{-1:xx}$, quae posito $x=1$ abit in -2, qui est valor fractionis propositae casu $x=1$.

362. Quoniam hic omnes expressiones, quae quibusdam casibus indeterminatos valores recipere videntur, pertractare constituimus, huc non solum pertinent eae fractiones $\frac{P}{Q}$, quarum numerator ac denominator certo casu evanescunt; sed etiam eiusmodi fractiones, quarum numerator ac denominator certo casu fiunt infiniti, huc sunt referendae: propterea quod earum valores aeque indeterminati videntur. Si scilicet P & Q eiusmodi fuerint functiones ipsius x, ut casu quopiam $x=a$, ambae fiant infinitae, fractioque $\frac{P}{Q}$ induat hanc formam $\frac{\infty}{\infty}$; quoniam infinita aeque ac cyphrae inter se rationem quamcunque tenere possunt, hinc valor verus minime cognosci potest. Hic quidem casus ad praecedentem revocari potest, fractionem $\frac{P}{Q}$ in hanc formam $\frac{1:Q}{1:P}$ transmutando, cuius

fra-

fractionis nunc numerator ac denominator casu $x = a$ evanescunt; ideoque eius valor modo ante tradito inveniri potest. At vero quoque sine hac transformatione valor invenietur, si loco x non a, sed $a + dx$ substituatur, quo facto non eiusmodi infinita absoluta ∞ provenient; sed ita erunt expressa $\frac{1}{dx}$ vel $\frac{A}{dx^n}$; quae expressiones etsi sunt aeque infinitae ac ∞, tamen comparatione inter dx eiusve potestates instituta, valor quaesitus facile colligetur.

363. Ad eandem classem quoque pertinent producta ex duobus factoribus constantia, quorum alter certo casu $x = a$ evanescit, alter vero in infinitum abit: cum enim quaevis quantitas per huiusmodi productum $0 . \infty$ repraesentari possit, eius valor indefinitus videtur. Sit PQ huiusmodi productum, in quo, si ponatur $x = a$, fiat $P = 0$ & $Q = \infty$, eius valor per praecepta ante tradita invenietur, si ponatur $Q = \frac{1}{R}$, tum enim productum PQ transmutabitur in fractionem $\frac{P}{R}$: cuius numerator ac denominator ante casu $x = a$ evanescunt, ideoque eius valor methodo ante exposita investigari poterit. Sic si quaeratur valor huius producti $(1 - x)$ tang $\frac{\pi x}{2}$ casu $x = 1$, quo fit $1 - x = 0$ & tang $\frac{\pi x}{2} = \infty$, convertatur id in hanc fractionem $\frac{1 - x}{\cot \frac{1}{2} \pi x}$, cuius numerator ac denominator casu $x = 1$ evanescunt. Cum igitur sit differentiale numeratoris $1 - x = - dx$, & differentiale denominatoris $\cot \frac{\pi x}{2} = - \frac{\pi dx : 2}{(\sin \frac{1}{2}\pi x)^2}$, casu $x = 1$ valor fractionis propositae erit $= \frac{2}{\pi} . \sin \frac{\pi x}{2} . \sin \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$, ob $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

364. Imprimis autem huc ſunt referendae eiuſmodi expreſſiones, quae dum ipſi x certus quidam valor tribuitur, abeunt in huiuſmodi formam $\infty - \infty$: quoniam enim duo infinita quavis quantitate finita inter ſe diſcrepare poſſunt, manifeſtum eſt hoc caſu valorem expreſſionis non determinari, niſi differentia inter illa duo infinita aſſignari poſſit. Iſte ergo caſus occurrit, ſi proponatur huiuſmodi functio $P - Q$, in qua poſito $x = a$ fiat tam $P = \infty$ quam $Q = \infty$, quo caſu ope regulae ante traditae valor quaeſitus non tam facile aſſignari poteſt. Etſi enim poſito hoc caſu fieri $P - Q = f$, ſtatuatur $e^{P-Q} = e^{f}$, ita ut ſit $e^{f} = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, ubi caſu $x = a$ tam numerator e^{-Q} quam denominator e^{-P} evaneſcit; tamen ſi regula ante tradita huc transferatur, fiet $e^{f} = \frac{e^{-Q}dQ}{e^{-P}dP}$, unde ob $e^{f} = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, fieret $1 = \frac{dQ}{dP}$, ideoque valor quaeſitus ipſius f hinc non innoteſcit. Quoties quidem P & Q ſunt quantitates algebraicae, quoniam hae infinitae fieri nequeunt, niſi ſint fractiones, quarum denominatores evaneſcunt; tum $P - Q$ in unicam fractionem colligi poterit, cuius denominator pariter evaneſcet. Quo facto ſi etiam numerator evaneſcat, valor modo ſupra explicato definietur: ſin autem numerator non evaneſcat, tum eius valor revera erit infinitus. Sic ſi huius expreſſionis $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ valor deſideretur caſu $x = 1$, quia ea abit in $\frac{x-1}{1-xx} = \frac{-1}{1+x}$, patet valorem quaeſitum eſſe $= -\frac{1}{2}$.

365. Verum ſi functiones P & Q fuerint tranſcendentes, tum plerumque haec transformatio ad calculum moleſtiſſimum perduceret. Expediet ergo his caſibus methodo dire-

cta

cta uti, atque loco $x = a$, quo ambae quantitates P & Q in infinitum abeunt, poni $x = a + \omega$, existente ω quantitate infinite parva, pro qua dx accipi poterit. Quo facto si fiat $P = \frac{A}{\omega} + B$ & $Q = \frac{A}{\omega} + C$ manifestum est functionem $P - Q$ abituram esse in $B - C$, qui erit valor finitus. Rationem igitur huiusmodi functionum valores investigandi sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ *casu, quo ponitur* $x = 1$.

Quoniam tam $\frac{x}{x-1}$ quam $\frac{1}{lx}$ fit infinitum posito $x = 1$, statuatur $x = 1 + \omega$, atque expressio proposita transformabitur in $\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$. Cum igitur sit $l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \&c. = \omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)$ habebitur

$$\frac{(1+\omega)(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.) - 1}{\omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)} = \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \&c.}{\omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega + \&c.}{1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.}$$

Posito nunc ω infinite parvo seu $\omega = 0$, manifestum est valorem quaesitum esse $= \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM II.

Denotantibus e *numerum cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$, *&* π *semicircumferentiam circuli, cuius radius est* $= 1$, *investigare valorem huius expressionis:*

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}, \text{ casu } x = 0.$$

Expressio ista proposita exhibet summam huius seriei:

1

$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{4+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{16+xx}+\frac{1}{25+xx}+$ &c. unde si ponatur $x=0$, prodire debet summa seriei huius $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ &c. quam constat esse $=\frac{\pi\pi}{6}$. Facto autem $x=0$ expressionis propositae $\frac{\pi x-1}{2xx}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ valor maxime videtur indeterminatus, ob omnes terminos infinitos. Ponatur ergo $x=\omega$, existente ω quantitate infinite parva, atque membrum prius $\frac{\pi x-1}{2xx}$ abit in $-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{\pi}{2\omega}$. Cum deinde sit $e^{2\pi\omega}-1=2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+$ &c. alterum membrum $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ abit in

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\&c.)}=\frac{1}{2\pi^2(1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\&c.)}$$

At est $\frac{1}{1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\&c.}=1-\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2-$ &c. unde posterius membrum fit $=\frac{1}{2\omega^2}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{1}{6}\pi^2-$ &c. ad quod si prius addatur prodit $\frac{1}{6}\pi^2$, qui est valor quaesitus expressionis propositae casu $x=0$.

Idem quoque per methodum fractionum, quarum numerator ac denominator certo casu evanescunt, praestari potest: expressio enim proposita in hanc fractionem transmutatur:

$$\frac{\pi x e^{2\pi x}-e^{2\pi x}+\pi x+1}{2xxe^{2\pi x}-2xx},$$

cuius numerator ac denominator casu $x=0$ evanescunt. Sumtis ergo differentialibus oritur:

$$\frac{\pi e^{2\pi x}+2\pi\pi x e^{2\pi x}-2\pi e^{2\pi x}+\pi}{4xe^{2\pi x}+4\pi xxe^{2\pi x}-4x}$$

sive

ſive haec $\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4x e^{2\pi x} + 4\pi x x e^{2\pi x} - 4x}$

cuius, ſi ponatur $x = 0$, adhuc numerator ac denominator evaneſcunt. Quare ſumtis denuo differentialibus habebitur:

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4 e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x x e^{2\pi x} - 4}$$

ſeu $$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

ſeu $$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$$

cuius numerator ac denominator adhuc evaneſcunt caſu $x = 0$. Quocirca iterum differentialia ſumantur

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

quae fractio poſito $x = 0$ abit in $\frac{\pi^2}{6}$, ut ante.

EXEMPLUM III.

Retinentibus e & π eosdem valores, quaeratur valor expreſſionis huius $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$ *caſu* $x = 0$

Expreſſio haec tranſmutatur in hanc: $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$ cuius numerator ac denominator caſu $x = 0$ evaneſcunt. Ponatur ergo $x = \omega$, & cum ſit

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$$

formula propoſita tranſmutatur in hanc:

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \&c.}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \&c.}$$

quae poſito ω infinite parvo ſtatim dat $\frac{1}{8}\pi^2$, qui eſt valor quaeſitus expreſſionis propoſitae caſu $x = 0$. At vero expreſ-

ſio

sio proposita $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$, exhibet summam huius seriei

$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{25+xx} + \frac{1}{49+xx} + \&c.$ cuius summa posito $x = 0$ utique fit $= \frac{1}{8}\pi^2$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,tang\,\pi x}$ *casu* $x = 0$.

Formula haec proposita $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\pi x}$ exprimit summam huius seriei infinitae $\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$ Si igitur ponatur $x = 0$, prodire debet summa seriei

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ quae est $= \frac{1}{6}\pi\pi$.

Quoniam est $\text{tang}\,\pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$, expressio proposita induet hanc formam: $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi \cos \pi x}{2x \sin \pi x} = \frac{\sin \pi x - \pi x \cos \pi x}{2xx \sin \pi x}$ cuius numerator ac denominator evanescit posito $x = 0$. Ponatur ergo $x = \omega$ & cum sit

$\sin \pi x = \pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$

$\cos \pi x = 1 - \frac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \&c.$ expressio proposita fiet:

$$\frac{\pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c. - \pi\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\omega^3 - \frac{1}{3}\pi^3\omega^5 + \&c.} = \frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\ \omega^3 - \&c.}$$

quae ob ω infinite parvum dat $\frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM V.

Cum sit summa huius seriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \&c. = \frac{\pi \sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}$$

invenire eius summam, si fuerit $x = 0$.

Quia est $\sin\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{48}\pi^3 x^3 + \&c.$ & $\cos\frac{1}{2}\pi x = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 x^2 + \&c.$ erit expressio proposita

$$fiet = \frac{\frac{1}{2}\pi^2 x - \frac{1}{48}\pi^4 x^3 + \&c.}{4x - \frac{1}{2}\pi^2 x^3 + \&c.} = \frac{\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{48}\pi^4 x^2 + \&c.}{4 - \frac{1}{2}\pi^2 x^2 + \&c.}$$

in qua si fiat $x = 0$, valor erit manifesto $= \frac{1}{8}\pi^2$, quam esse summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ supra pluribus modis est demonstratum. Sin autem pro x sumatur numerus par quicunque, summa seriei propositae semper est $= 0$.

366. In his seriebus, quas binis ultimis exemplis tractavimus, aliisque litteram variabilem x continentibus, ipsi x eiusmodi valores tribui possunt, ut quidam termini in infinitum excrescant, quibus quidem casibus summa totius seriei fiet infinita. Sic series:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$ si pro x ponatur numerus quicunque integer, unus perpetuo terminus ob denominatorem evanescentem fit infinitus; hancque ob causam ipsa seriei summa infinita evadet. Quodsi autem iste terminus infinitus ex serie tollatur, tum summa reliqua sine dubio erit finita, exprimeturque summa priori infinita termino isto infinito mulctata, hoc modo $\infty - \infty$: quemnam ergo habitura sit valorem determinatum modo hic exposito inveniri poterit; id quod clarius ex subiunctis exemplis perspicietur.

EXEMPLUM I.

Invenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu $x = 1$, & demto termino primo, qui hoc casu in infinitum augetur.

Quia in genere summa est $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \operatorname{tang} \pi x}$, erit summa quaesita $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \operatorname{tang} \pi x} - \frac{1}{1-xx}$ posito $x = 1$. Sit $x = 1 + \omega$, & habebitur pro summa quaesita

$\frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega)\,\mathrm{tang}\,(\pi+\omega\pi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}$. At est $\mathrm{tang}\,(\pi+\omega\pi) = \mathrm{tang}\,\omega\pi = \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$ Unde cum primus terminus $\frac{1}{2xx}$ posito $x=1$ determinatum habeat valorem $\frac{1}{2}$, duo reliqui tantum termini sunt spectandi, qui erunt $\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\pi}{2\omega(1+\omega)(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^2)} = \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2)}$. Si quidem ω sit infinite parvum, quo casu etiam terminus $\frac{1}{3}\pi^2\omega^2$ negligi poterit. Proveniet autem $\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$ posito $\omega=0$, estque ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ summa seriei: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\&c.$ uti aliunde constat.

EXEMPLUM II.

Invenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\&c.$$

casu quo pro x *ponitur numerus quicunque integer* n *&* *demto ex serie termino illo* $\frac{1}{nn-xx}$, *qui fit infinitus*

Summa ergo haec, quae quaeritur, ita erit expressa $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\mathrm{tang}\,\pi x} - \frac{1}{nn-xx}$, si quidem statuatur $x=n$, quo quidem casu primus terminus $\frac{1}{2xx}$ abit in $\frac{1}{2nn}$, bini vero reliqui ambo fiunt infiniti. Ponatur ergo $x=n+\omega$, & cum sit $\mathrm{tang}\,(\pi n+\pi\omega) = \mathrm{tang}\,\pi\omega = \pi\omega$, posito ω infinite parvo, habebimus pro summa quaesita: $\frac{1}{2nn} - \frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega} + \frac{1}{2n\omega+\omega\omega}$ seu $\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n+2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n+\omega)} = \frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$ unde

unde si fiat $\omega = 0$, prodibit summa quaesita $= \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}$. Quo circa erit

$$\frac{3}{4nn} = \frac{1}{1-nn} + \frac{1}{4-nn} + \frac{1}{9-nn} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2-nn} + \frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \&c.$$

in infinitum, sive erit istius seriei infinitae summa:

$$\frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \frac{1}{(n+3)^2-nn} + \&c. = \frac{3}{4nn} + \frac{1}{nn-1} + \frac{1}{nn-4} + \frac{1}{nn-9} + \ldots + \frac{1}{nn-(n-1)^2},$$

EXEMPLUM III.

Invenire summam huius seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \&c.$$

si ponatur $x=1$, *atque terminus primus* $\frac{1}{1-xx}$ *qui hoc casu sit infinitus, auferatur.*

Cum huius seriei summa sit in genere $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x \cos \frac{1}{2}\pi x}$ erit summa quaesita $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4\pi x \cos \frac{1}{2}\pi x} - \frac{1}{1-xx}$, si ponatur $x = 1$. Quia vero uterque terminus sit infinitus, ponatur $x = 1 - \omega$, & cum sit $\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega) = \cos \frac{1}{2}\pi\omega = 1 - \frac{1}{8}\pi^2\omega^2$, & $\cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega) = \sin \frac{1}{2}\pi\omega = \frac{1}{2}\pi\omega$ ob ω infinite parvum, habebitur ista expressio: $\frac{\pi(1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega} - \frac{1}{2\omega-\omega\omega} = \frac{1}{\omega(2-2\omega)} - \frac{1}{\omega(2-\omega)}$ quae fit $= \frac{1}{4}$ posito $\omega = 0$, estque propterea

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \&c.$$

EXEMPLUM IV.

Invenire summam seriei huius:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\ \&c.$$ *si pro x ponatur numerus quicunque integer impar* $2n-1$ *isque terminus* $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ *qui hoc casu fit infinitus, e medio tollatur.*

Erit ergo summa, quae quaeritur, $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x\cos \frac{1}{2}\pi x} - \frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ posito $x = 2n-1$. Statuamus ergo $x = 2n-1-\omega$, existente ω infinite parvo, fietque $\sin \frac{1}{2}\pi x = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \pm \cos \frac{1}{2}\pi\omega$, ubi signum superius valet, si sit n numerus impar, inferius vero si sit par. Simili modo erit $\cos \frac{1}{2}\pi x = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \pm \sin \frac{1}{2}\pi\omega$; ideoque sive n sit par sive impar, erit

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\pi x}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\pi\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi\omega}.$$ Hinc summa quaesita ita exprimetur: $\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)} - \frac{1}{\omega[2(2n-1)-\omega]}$, eritque propterea $= \frac{1}{4(2n-1)^2}$. Sic si sit $n=2$, erit $\frac{1}{36} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{40}+\frac{1}{72}+\frac{1}{112}+\ \&c.$ cuius summationis veritas aliunde constat.

CA-