CAPUT XIV.

DE DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM IN CERTIS TANTUM CASIBUS.

337.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x, atque haec quantitas variabilis x augeatur incremento ω, ut x abeat in $x+\omega$, tum functio y induet hunc valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque capiet hoc incrementum:

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

uti supra demonstravimus. Quare si fiat $\omega = dx$, ita ut x suo differentiali dx crescat, tum functio y incrementum accipet $= dy + \frac{1}{2} ddy + \frac{1}{6} d^3y + \frac{1}{24} d^4y + \&c.$ quod erit verum differentiale ipsius y. Quoniam vero huius seriei quilibet terminus ad sequentes habet rationem infinitam, prae primo omnes evanescunt, ita ut dy more consueto sumtum praebeat verum differentiale ipsius y. Simili modo vera differentialia secunda, tertia, quarta, &c. ipsius y ita se habebunt:

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3} d^3y + \frac{7}{3.4} d^4y + \frac{15}{3.4.5} d^5y + \frac{31}{3.4.5.6} d^6y + \&c.$$

$$d^3.y = d^3y + \frac{6}{4} d^4y + \frac{25}{4.5} d^5y + \frac{90}{4.5.6} d^6y + \frac{301}{4.5.6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^4.y = d^4y + \frac{10}{5} d^5y + \frac{65}{5.6} d^6y + \frac{350}{5.6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^5.y = d^5y + \frac{15}{6} d^6y + \frac{140}{6.7} d^7y + \&c.$$

$$d^6.y = d^6y + \frac{21}{7} d^7y + \&c.$$

quae

quae sequuntur ex §. 56. si loco ω ponatur dx. Erunt ergo haec differentialia ipsius y completa, quippe in quibus ne ii quidem termini, qui respectu primi evanescunt, negliguntur. Inveniuntur autem singuli isti termini, si functio y continuo differentietur, ponendo dx constans. Sic posito $y = ax - xx$ ob $dy = adx - 2xdx$ & $ddy = -2dx^2$; erunt ipsius y differentialia completa: $dy = adx - 2xdx - dx^2$; $ddy = -2dx^2$; sequentia autem sunt nulla

338. Quanquam autem generatim in his expressionibus differentialium sequentes termini prae primis pro nihilo reputantur; tamen in casibus specialibus, quibus ipse terminus primus evanescit, haec ratio cessat, neque terminus secundus amplius negligi poterit. Sic in exemplo praecedente etiamsi formulae $y = ax - xx$ differentiale in genere est $= (a - 2x)dx$ reiecto termino $-dx^2$, quippe qui est infinities minor quam primus $(a - 2x)dx$: hic tamen ista conditio manifesto subintelligitur, nisi primus terminus per se evanescat. Quocirca si ipsius $y = ax - xx$ quaeratur differentiale, casu quo $x = \frac{1}{2}a$, tum id dicendum erit esse $= -dx^2$; scilicet si variabilis x differentiali dx crescat, tum functionis y casu $x = \frac{1}{2}a$ decrementum erit dx^2. Hoc autem solo casu excepto perpetuo functionis y differentiale erit $= (a - 2x)dx$; nisi enim sit $x = \frac{1}{2}a$, terminus secundus $-dx^2$ prae primo semper recte negligitur. Neque vero neglectio termini dx^2 etiam in casu $x = \frac{1}{2}a$ in errorem inducere potest: comparari enim differentialia prima inter se solent; unde quia $dy = -dx^2$ casu $x = \frac{1}{2}a$, prae differentialibus primis dx evanescit, perinde est sive hoc casu habeamus $dy = 0$ sive $dy = -dx^2$.

339. Denotante y functionem quamcunque ipsius x, sit differentialibus continuis sumtis:

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \&c.$$

Hinc ergo differentialia completa, in quibus nihil negligatur, ipsius y erunt:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \&c.$$
$$d^2.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \tfrac{1}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^3.y = rdx^3 + \tfrac{3}{2}sdx^4 + \tfrac{5}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^4.y = sdx^4 + 2\,tdx^5 + \&c.$$
$$d^5.y = tdx^5 + \&c.$$

Nisi ergo primi termini harum expressionum evanescant, ii soli differentialia ipsius y exhibebunt; sin autem quopiam casu primus terminus fiat $= 0$, tum sequens differentiale quaesitum exprimet. Atque si etiam secundus terminus evanescat, tum tertius terminus valorem differentialis quaesiti praebebit, sin autem & hic evanescat, quartus & ita deinceps. Unde intelligitur nullius functionis ipsius x differentiale primum unquam penitus evanescere; etiamsi enim fiat $p = 0$, quo casu vulgo dy evanescere censetur, tum hoc differentiale per altiorem ipsius dx potestatem exprimetur. Uti vel per $\frac{1}{2}qdx^2$, vel si etiam sit $q = 0$, per $\frac{1}{6}rdx^3$; & ita porro.

340. Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saepenumero eius veram expressionem nosse iuvat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat maximum vel minimum. Si enim fuerit:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \&c.$$

quo y nanciscatur maximum minimumve valorem, necesse est ut sit $p = 0$; erit ergo hoc casu $dy = \frac{1}{2}qdx^2$, & functio y, si loco x ponatur $x \pm dx$, abit in $y + \frac{1}{2}qdx^2$, eritque propterea minima, si q habeat valorem affirmativum, at maxima si q habeat valorem negativum. At si simul fiat $q = 0$, erit $dy = \frac{1}{6}rdx^3$, & functio y ponendo $x \pm dx$ loco x abibit in $y \pm \frac{1}{6}rdx^3$, neque hoc casu maximum neque minimum prodit; sin autem fiat & $r = 0$, tum posito $x \pm dx$ loco x functio y evadet $= y + \frac{1}{24}sdx^4$, quae maximum exhibet, si s fuerit quantitas negativa, minimum vero, si s sit quantitas affirmativa. Aliae occasiones, quibus differentialium

lium completa expressio usum habet, infra occurrent.

341. Ponamus p evanescere casu $x = a$, quod evenit si fuerit $p = (x - a)P$. Talis autem valor prodit, si fuerit $y = (x - a)^2 P + C$, denotante C quantitatem constantem quamcunque. Cum enim sit $pdx = (x-a)^2 dP + 2(x-a)Pdx$, erit utique $p = 0$, posito $x = a$. Tum ergo ob $dpdx = qdx^2 = (x - a)^2 ddP + 4(x - a)dPdx + 2Pdx^2$, posito $x = a$, fiet $qdx^2 = 2Pdx^2$, atque differentiale completum hoc casu $x = a$, erit $d.y = Pdx^2$, nisi forte & P evanescat posito $x = a$, quos casus postea contemplabor. Praesens autem casus generalius hoc modo exhiberi potest. Sit $z = (x - a)^2 P + C$, atque y sit functio quaecunque ipsius z, ita ut fiat $dy = Zdz$, denotante Z functionem quamcunque ipsius $z = (x - a)^2 P + C$. Erit ergo $dz = (x-a)^2 dP + 2(x - a)Pdx$, & $pdx = Z(x - a)^2 dP + 2Z(x - a)Pdx$, quod membrum fit $= 0$ si $x = a$; eodemque casu neglectis terminis, qui continent factorem $x - a$, erit $qdx^2 = 2PZdx^2$, ideoque casu $x = a$, fiet $dy = PZdx^2$; postquam in PZ ubique loco x positum fuerit a. Quare si fuerit y functio quaecunque ipsius $z = (x - a)^2 P + C$, ita ut sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^2$. Fiet ergo haec functio y maxima casu $x = a$, si eodem casu fiat PZ quantitas negativa, minima vero, si PZ fiat quantitas affirmativa.

342. Si fuerit $p = (x - a)^2 P$, casu $x = a$ quoque q evanescit, talis autem expressio pro p oritur, si fuerit $y = (x - a)^3 P + C$. Erit ergo $pdx = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$; $qdx^2 = (x - a)^3 ddP + 6(x - a)^2 dPdx + 6(x - a)Pdx^2$, quorum utrumque membrum casu $x = a$ evanescit; at vero sequens erit $rdx^3 = (x - a)^3 d^3 P + 9(x - a)^2 ddPdx + 18(x - a)dPdx^2 + 6Pdx^3 = 6Pdx^3$, posito $x = a$. Quare cum & p & q casu $x = a$ evanescat, fiet $dy = \frac{1}{6} rdx^3 = Pdx^3$. Simili modo si ponatur $z = (x - a)^3 P + C$, fueritque y functio quaecunque ipsius z; ita ut sit $dy = Zdx$, ob $dz = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$, fiet quoque $p = 0$ & $q = 0$, eritque $rdx^3 = 6PZdx^3$; unde

Dddd casu

casu $x = a$, erit $dy = PZdx^3$. Quare ista functio y, etiamsi casu $x = a$, fiat $p = 0$, tamen neque maximum neque minimum valorem recipit.

343. Haec differentialia facilius inveniri possunt ex ipsa differentialium natura. Cum enim differentiale ipsius y oriatur, si y a statu sequenti proximo subtrahatur, qui prodit, si loco x ponatur $x + dx$; ponamus casu primo, quo erat $y = (x - a)^2 P + C$, $x + dx$ loco x, eritque $y^I = (x - a + dx)^2 P^I + C$, unde fiet $dy = (x - a + dx)^2 P^I - (x - a)^2 P$. Casu igitur quo $x = a$, erit $dy = P^I dx^2$, & cum P^I ad P rationem aequalitatis habeat, erit $dy = Pdx^2$. Simili modo si fuerit $z = (x - a)^2 P + C$; erit $dz = Pdx^2$; quare si sit y functio quaecunque ipsius z, ita ut sit $dy = Zdz$, erit $dy = PZdx^2$ casu, quo ponitur $x = a$. Deinde si sit $z = (x - a)^3 P + C$, erit $z^I = (x - a + dx)^3 P^I + C$, & propterea casu $x = a$, fiet $z^I - z = dz = Pdx^3$. Hinc si fuerit y functio quaecunque ipsius z, atque $dy = Zdz$, erit quoque casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^3$, si quidem in functionibus P & Z loco x ubique substituatur a. Quoniam vero hoc casu fit $z = C$, atque Z est functio ipsius z, evadet Z quantitas constans, talis scilicet functio ipsius C, qualis ante erat ipsius z.

344. Si igitur generaliter fuerit $y = (x - a)^n P + C$, quia est $y^I = (x - a + dx)^n P^I + C$, casu $x = a$, fiet $dy = Pdx^n$; unde si fuerit $n > 1$, hoc differentiale respectu aliorum differentialium primorum, quae ipsi dx sunt homogenea, evanescet. Ex praecedentibus ergo manifestum est, functionem y fieri casu $x = a$, vel maximam vel minimam, si fuerit n numerus par: tum enim si posito $x = a$ fiat P quantitas affirmativa, fiet y minimum, sin autem P fit quantitas negativa, fiet y maximum. Hocque ergo modo ratio maximorum & minimorum multo facilius invenitur, quam methodo supra exposita quia non opus est ad differentialia altiora progredi. Quod si vero sit $z = (x - a)^n P + C$, atque y fuerit functio quaecunque ipsius z, ut sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$

diffe-

differentiale $dy = PZdx^n$. Notandum autem est, hic n sumi pro numero affirmativo seu o maiore, si enim n esset numerus negativus, tum posito $x = a$, non evanesceret $(x-a)^n$, uti assumsimus, sed adeo fieret infinite magnum.

345. Iam vidimus hoc pacto differentiale multo expeditius inveniri, quam ope seriei, qua ante differentiale completum expressimus; si enim sit n numerus integer, tot seriei illius termini perlustrari deberent, quot n contineat unitates. Verum si n sit numerus fractus, tum series ista nequidem verum differentiale unquam exhibebit. Ponamus enim esse $y = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, si seriem

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \&c.$$

spectemus, fiet $p = \frac{3}{2}\sqrt{(x-a)}$, $q = \dfrac{3}{4\sqrt{(x-a)}}$,

$$r = \frac{-3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}},\quad s = \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}},\ \&c.$$

Quare si ponatur $x = a$ fiet quidem $p = 0$, at sequentes termini omnes q, r, s, &c. evadent infiniti; unde valor differentialis dy hoc casu omnino definiri non potest. At vero methodus ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium relinquit. Cum enim sit $y = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, posito $x+dx$ loco x fiet $y^{I} = (x-a+dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, eritque, si $x = a$ ponatur, $dy = dx\sqrt{dx}$. Evanescit ergo hoc differentiale prae dx, at vero differentialia secunda cum dx^2 homogenea prae eo evanescent.

346. Evolvamus hos casus, quibus exponens n est numerus fractus aliquanto accuratius, sitque $y = P\sqrt{(x-a)} + C$, ob $y^{I} = P^{I}\sqrt{(x-a+dx)} + C$, fiet $dy = P\sqrt{dx}$ casu $x = a$; unde hoc differentiale ad dx, & ad differentialia cum dx homogenea rationem tenebit infinitam. Hinc etiam patet, quid hoc casu de ratione maximi ac minimi sit tenendum. Cum enim

 posito

posito $x + dx$ loco x, abeat y in $P\sqrt{(x-a)} + C + P\sqrt{dx}$, ob $\sqrt{dx}$ ambiguum, functio y geminum induet valorem, alterum maiorem quam C, quem recipit posito $x = a$, alterum minorem; unde casu $x = a$ neque maximum neque minimum fiet. Praeterea si dx capiatur negative tum valor ipsius y adeo fiet imaginarius. Idem tenendum est si sit $z = P\sqrt{(x-a)} + C$, & y functio quaecunque ipsius z, ut sit $dy = Zdz$, tum enim erit $dy = PZ\sqrt{dx}$ casu $x = a$.

347. Si proposita fuerit ista functio $y = (x-a)^{\frac{m}{n}}P + C$, cuius differentiale quaeritur casu $x = a$, erit uti ex antecedentibus colligitur $dy = Pdx^{\frac{m}{n}}$. Quocirca si fuerit $m > n$ hoc differentiale prae dx evanescet; sin autem sit $m < n$, ratio $\frac{dy}{dx}$ erit infinita magna. Praeterea vero si n sit numerus par, differentiale dy geminum habebit valorem, alterum affirmativum, alterum negativum; sicque functio y, quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$ binos habebit valores alterum maiorem quam C alterum vero minorem; sin autem poneretur $x = a - dx$, tum y adeo fieret imaginarium; unde hoc casu y neque maximum fit neque minimum. Ponamus nunc denominatorem n esse numerum imparem, erit numerator m vel par vel impar. Sit primo m numerus par; quia dy eundem valorem retinet, sive dx sumatur affirmative sive negative, perspicuum est, functionem y casu $x = a$ fieri sive maximam sive minimam, prout hoc casu fuerit P vel quantitas negativa vel affirmativa. Sin autem uterque numerus m & n fuerit impar, differentiale dy in sui negativum abibit, posito dx negativo; hocque ergo casu functio y neque maximum erit neque minimum, si ponatur $x = a$.

348. Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis, quorum singuli sint divisibiles per $x - a$, constet, ita ut sit $y = (x-a)^{m}P + (x-a)^{n}Q + C$, tum eius differentiale casu $x = a$ erit $dy = Pdx^{m} + Qdx^{n}$; in qua expressione,

si

si fuerit $n > m$, terminus secundus prae primo evanescit, ita ut tantum prodeat $dy = Pdx^m$. Sin autem n sit fractio denominatorem habens parem, tum etiamsi Qdx^n prae Pdx^m evanescat, tamen omnino negligi non potest. Ex eo enim apparet, si capiatur dx negative, valorem ipsius dy fieri imaginarium, quod ex solo termino primo Pdx^m non patet. Cum ergo si n sit fractio denominatorem habens parem, dx negative accipi nequeat, sin autem affirmative capiatur, terminus Qdx^n geminum praebeat valorem: functio $y = (x-a)^m P + (x-a)^n Q + C$ quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$, erit $y = C + Pdx^m \pm Qdx^n$, quorum valorum uterque cum vel maior sit vel minor quam C, prout P fuerit quantitas vel affirmativa vel negativa, erit functio y casu $x = a$ vel minimum vel maximum secundae speciei.

349. His igitur casibus differentialia functionum vera non per regulas differentiationis consuetas inveniri possunt; quippe quae tantum valent, quamdiu differentiale functionis est homogeneum cum dx. Sin autem casu quopiam singulari differentiale functionis exprimatur per eius potestatem dx^n, tum regula praebet pro hoc differentiali o, si n fuerit numerus unitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, si n sit exponens unitate minor. Sic si ipsius $y = \sqrt{(a-x)}$ differentiale quaeratur casu $x = a$, quia est $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, facto $x = a$ prodit $dy = -\frac{dx}{0}$. Atque si differentialia sequentia in subsidium vocare velimus, omnia pariter ob denominatores $= 0$ in infinitum excrescunt, ita ut inde nihil concludi possit. At vero hoc casu vidimus esse $dy = \sqrt{-dx}$, atque adeo imaginarium. Sin autem loco x ponatur $x - dx$, erit $dy = \sqrt{dx}$, atque adeo erit infinities maius quam dx, ita ut dx prae dy evanescat. Quare regula consueta etiam hoc casu in errorem non inducit, cum valorem ipsius dy infinitum exhibeat.

350. A regula ergo consueta differentiationis recedendum est, quoties in serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. qua differentiale completum functionis y exprimitur, primus terminus p vel fit $= 0$ vel in infinitum excrescit, eoque casu differentiale ex primis principiis derivari debet. Quoties ergo functionis y differentiale quaeritur dato ipsius x valori respondens, quo littera p vel infinite parva evadit vel infinite magna, toties recurrendum est ad ipsa prima differentiationis principia. Omnibus vero reliquis casibus, quibus fit neque $p = 0$ neque $p = \infty$, consueta regula veros differentialis valores praebebit. Interim tamen casus ante (348) memoratus non est negligendus, si functio y contineat huiusmodi membrum $(x-a)^n Q$ existente n fractione denominatorem parem habente; etiamsi enim adsint differentialia inferiora quam Qdx^n, prae quibus hoc evanescat; tamen quoniam Qdx^n si sit dx negativum, fit imaginarium, hoc membrum Qdx^n reliqua omnia, prae quibus evanescit, quoque transmutat in imaginaria: cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda. Huiusmodi ergo casus particulares, quibus verum differentiale communi regula non indicatur, in adiunctis exemplis explicabo.

EXEMPLUM I.

Quaeratur differentiale functionis

$$y = a + x - \sqrt{[xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)}]}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Differentiale istius functionis casu $x = a$ per regulam receptam non reperiri, ex differentiatione patet, fit enim:

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2}adx + \frac{1}{2}dx\sqrt{(2ax-xx)} + (axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax-xx)}}{\sqrt{[xx + ax - x\sqrt{(2ax-xx)}]}}$$

posito enim $x = a$ erit $dy = dx - \frac{adx}{a} = 0$. Ordiamur ergo a principiis differentiationis, ac primo quidem posito $x + dx$ loco x fiet:

$$y^1 = a + x + dx - \sqrt{[xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx - (x+dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)}]}$$

Posi-

Posito autem $x = a$ erit:

$$y^{I} = 2a + dx - \sqrt{[2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)\sqrt{(aa - dx^2)}]}$$

Nam cum sit $\sqrt{(aa - dx^2)} = a - \frac{dx^2}{2a}$, sequentes enim termini tuto negligi poterunt, quia non omnes, qui sunt infinities maiores, destruentur, ut mox patebit: erit $y^{I} = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \frac{3}{2}dx^2)}$, porroque radicem extrahendo fiet $y^{I} = 2a + dx - \left(a + dx + \frac{dx^2}{4a}\right) = a - \frac{dx^2}{4a}$. At casu $x = a$, erit $y = a$; unde cum sit $y' = y + dy$ obtinebitur $dy = -\frac{dx^2}{4a}$: ex quo simul perspicitur functionem propositam y fieri maximum, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale huius functionis

$$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$$

casu, quo ponitur $x = a$.

Facta differentiatione more consueto fit $dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, quod posito $x = a$ in infinitum abit, neque ergo hoc modo indicatur. Differentialia vero sequentium ordinum pariter omnia fient infinita, ita ut ex iis nequidem ex serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. verus valor differentialis inveniri queat. Ponamus ergo $x + dx$ loco x, atque habebimus $y' = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2 + a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2)}$ & posito $x = a$ erit: $y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(-2adx - dx^2)}$ At eodem casu fit $y = aa$; unde erit $dy = -dx^2 + a\sqrt{-2adx}$, & cum dx^2 prae $\sqrt{-2adx}$ evanescat, erit $dy = a\sqrt{-2adx}$. Quare si differentiale dx affirmative capiatur, erit dy imaginarium; sin autem pro x scribatur $x - dx$, erit $dy = a\sqrt{2adx}$, cuius cum duplex sit valor alter affirmativus, alter negativus, functio y casu $x = a$ neque maxima fiet neque minima.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Invenire differentiale functionis:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a-x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Quoniam haec functio in istam formam transformatur $y = a^3 - (a-x)^3 + (a-x)^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, posito $x = a + dx$ fit $y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, eodemque casu est $y = a^3$. Erit ergo $dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, & cum dx^3 evanescat prae $dx^{\frac{7}{3}}$, erit $dy = - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$. Casu ergo $x = a$ functio y neque maximum fit neque minimum.

EXEMPLUM IV.

Invenire differentiale functionis:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x} \quad casu \ x = 0.$$

Quoniam casus $x = 0$ proponitur, eoque fit $y = 0$, loco x tantum dx scribatur, & habebitur $dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$, seu $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$; unde primum patet dx negative accipi non posse. Tum vero etiamsi alias $\sqrt{dx}$ geminum valorem prae se ferat, alterum affirmativum alterum negativum, tamen hoc casu, quia eius radix $\sqrt[4]{dx}$ occurrit, non nisi affirmative accipi potest. At vero $\sqrt[4]{dx}$ utrumque significatum recipit, eritque $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$ & $y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, ob $y = 0$. Cum igitur uterque ipsius y' valor maior fit, quam ipsius y, sequitur casu $x = 0$ fieri y minimum. Quod autem functio $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ non complectatur hanc $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$, utramque ad rationalitatem perducendo patebit. Prior enim fusa in hanc formam $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, & qua-

quadrata dat, $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ seu $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$, quae denuo quadrata praebet $y^4 - 2y^2x - 4xxy + xx - x^3 = 0$. Altera vero $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ dabit $y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$ & porro $y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$ quae ab illa est diversa. At vero alterum membrum $\sqrt[4]{x^3}$ ambiguitatem signi retinet. Quamobrem ista circumstantia probe est notanda, quod etiamsi communiter radices potestatum parium utrumque signum + & − includant, tamen haec ambiguitas cesset, si in eadem expressione earumdem radicum ulteriores radices potestatum parium occurrant; quippe quae fierent imaginariae, si radices priores negative acciperentur. Atque ex hoc fonte maxima & minima secundae speciei sequuntur, quando talia non locum habere videantur.

EXEMPLUM V.

Invenire differentiale functionis:

$$y = a + \sqrt{(x-f)} + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

casu quo ponitur $x = f$.

Ponamus $x - f = t$, & cum sit $y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + tt\sqrt[8]{t}$ huius differentiale quaeritur casu $t = 0$, quo fit $y = a$. Posito ergo $t + dt$ seu $0 + dt$ loco t fiet $y' = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$, ideoque habebitur $dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$. Ubi primo patet differentiale dt negative accipi non posse, quin dy fiat imaginarium. Tum verum non solum $\sqrt{dt}$, sed nequidem $\sqrt[4]{dt}$ negative accipi potest; fieret enim $\sqrt[8]{dt}$ imaginarium: unde differentiale dy geminum tantum habet valorem, $dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$, quorum cum uterque maior sit nihilo, sequitur functionem y fieri minimum secundae speciei posito $t = 0$ seu $x = f$. Quanquam

quam ergo his casibus termini $dt\sqrt[4]{dt}$ & $dt^2\sqrt[8]{dt}$ prae primo $\sqrt{dt}$ evanescant; tamen eorum ratio est habenda, si multiplicitas valorum spectetur, ut imaginaria evitentur.

EXEMPLUM VI.

Invenire differentiale functionis:

$$y = ax + bxx + (x - f)^n + (x - f)^{m + \frac{1}{2}n}$$

casu $x = f$.

Si ponatur $x = f$ fiet $y = af + bff$, & si loco x ponatur $x + dx$ seu $f + dx$, prodibit valor proximus $y' = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$, ita ut sit $dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m \sqrt{dx^n}$. Nisi ergo sit n numerus par, differentiale dx negative sumi nequit. Ultimus autem terminus $dx^m \sqrt{dx^n}$ signum habet ambiguum; unde valor ipsius y' erit duplex uterque maior quam ipsius y, si quidem $a + 2bf$ fuerit quantitas affirmativa, atque exponentes n & $m + \frac{1}{2}n$ unitate fuerint maiores. Fiet ergo valor functionis y casu $x = f$ minimus: hocque evenit sive n sit numerus integer sive fractus, dummodo numerator hoc casu, & ipse numerus illo casu non fuerit par.

351. Imprimis autem haec methodus differentialia ex ipsis principiis deducendi usum habet in functionibus transcendentibus, cum quibusdam casibus differentiale more consueto inventum vel evanescit, vel in infinitum excrescere videtur. Occurrunt autem hic eiusmodi infinitorum & infinite parvorum species, quae in algebraicis nunquam inveniuntur. Cum enim si i denotet numerum infinitum, li sit quoque infinitus quidem, sed tamen ad ipsum numerum i, eiusque adeo potestatem quamcunque i^n, quamtumvis exiguus statuatur exponens n rationem tenens infinite parvam, erit fractio $\frac{li}{i^n}$ infinite parva, neque ante finita esse poterit, quam exponens n fiat infinite parvus. Erit ergo li homogeneum cum i^n, si exponens n fuerit infinite parvus. Ponamus nunc $i = \frac{1}{\omega}$,

exi-

existente ω quantitate infinite parva, erit $-l\omega$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, si exponens n sit infinite parvus, ideoque $-\frac{1}{l\omega}$ homogeneum erit cum ω^n; hincque $-\frac{1}{ldx}$, erit infinite parvum comparandum cum dx^n, existente n fractione infinite parva. Ita si fuerit $y = -\frac{1}{lx}$ differentiale ipsius y casu $x = 0$, erit $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcunque ipsius dx potestatem tenebit rationem infinitam: atque prae $-\frac{1}{ldx}$ evanescunt omnes omnino potestates ipsius dx, quantumvis exigui fuerint earum exponentes.

352. Deinde quoque vidimus, si a fuerit numerus unitate maior, & i infinitus, tum a^i fore infinitum tam excelsi gradus, ut prae eo non solum i, sed etiam quaevis ipsius i potestas evanescat; neque i^n ante homogeneum cum a^i evadet, quam exponens n in infinitum fuerit auctus. Sit nunc $i = \frac{1}{\omega}$, ita ut ω infinite parvum denotet, erit $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, existente n numero infinite magno: ideoque $a^{\frac{-1}{\omega}}$ seu $\frac{1}{a^{1:\omega}}$, erit infinite parvum comparandum cum ω^n. Hinc $\frac{1}{a^{1:dx}}$, erit infinite parvum, quod autem prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescit; cum homogeneum sit cum potestate dx^n existente n numero infinite magno. Quare si quaeratur differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ casu $x = 0$; quoniam fit $y = 0$, erit $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$, ideoque infinities minus est quam potestas quantumvis alta ipsius dx.

353.

353. Sin autem a ſit numerus unitate minor, tum quia $\frac{1}{a}$ ſit unitate maior, quaeſtio ad caſum praecedentem reducitur. Scilicet ſi habeatur expreſſio $a^{\frac{1}{\omega}}$, ea ponendo $a = 1:b$ tranſmutabitur in $b^{-\frac{1}{\omega}}$, ſeu $\frac{1}{b^{1:\omega}}$, quae homogenea erit ob $b > 1$ cum ω^n, exiſtente n numero infinite magno. His igitur praemiſſis ſequentia exempla reſolvere poterimus.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale functionis: $y = xx - \frac{1}{lx}$, *caſu* $x = 0$.

Quoniam poſito $x = 0$ fit $y = 0$, ſi ponamus $x + dx$, ſeu $0 + dx$ loco x, fiet $y' = dy = dx^2 - \frac{1}{ldx}$. Cum autem $-\frac{1}{ldx}$ homogeneum ſit cum dx^n, denotante n numerum infinite parvum, prae eo dx^2 evaneſcet, eritque $dy = -\frac{1}{ldx} = dx^n$. At vero quia logarithmi numerorum negativorum ſunt imaginarii, dx negative accipi non poterit; eritque adeo caſu $x = 0$ functio y mininum, ſed neque ad primam neque ad ſecundam ſpeciem pertinens. Ad primam ſcilicet ſpeciem non pertinet, quia y nullos habet valores antecedentes proximos, ſed tantum minus eſt valoribus ſequentibus, ſi x nihilo maius ſtatuatur. Ad ſecundam autem ſpeciem ideo non pertinet, quia valores ſequentes, quibuſcum comparatur, non ſunt gemini: ſic itaque prodit tertia ſpecies maximorum minimorumve, quae in functionibus logarithmicis & tranſcendentibus tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam occurrit; de qua in ſequente parte de lineis curvis fuſius agetur.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale functionis: $y = (a - x)^n - x^n (la - lx)^n$ *caſu quo* $x = a$.

Differentiale hoc ſi n ſit numerus integer, ex formula generali $dy = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 +$ &c. inveniri poteſt, erit enim:

$$pdx = -n(a-x)^{n-1} dx - nx^{n-1} dx (la - lx)^n + nx^{n-1} (la - lx)^{n-1} dx$$

qui valor poſito $x = a$ utique evaneſcit: nam etiamſi ſit $n = 1$, erit $pdx = - dx + dx = 0$. Si igitur ulterius progrediamur, erit: $\frac{1}{2} qdx^2 =$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-x)^{n-2} dx^2 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^n + \frac{n^2}{2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 (la-lx)^{n-2}$$

Hinc ergo ſi fuerit $n = 1$, erit $\frac{1}{2} qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$ poſito $x = a$.

Simili modo ſi ſit $n = 2$, ad terminum tertium $\frac{1}{6} rdx^3$ eſſet pergendum, & ita porro. Facilius ergo utemur ipſis differentiationis principiis, & cum poſito $x = a$ fiat $y = 0$, ſi ponamus $x + dx$ ſeu $a + dx$ loco x, erit

$$y = (-dx)^n - (a + dx)^n [la - l(a + dx)]^n = y + dy = dy \text{ ob } y = 0.$$

Eſt vero $l(a + dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} -$ &c. unde fit

$$dy = (-dx)^n - \left(a^n + na^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} dx^2\right) \times$$
$$\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3}\right)^n = \frac{n}{2a} (-dx)^{n+1}$$

Caſu igitur $x = a$ erit formulae propoſitae differentiale quaeſitum dy, ut ſequitur:

ſi

si $n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$ ut ante invenimus
si $n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
si $n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
si $n = 4$	$dy = -\frac{4dx^5}{2a}$
&c.	&c.

Si ergo n fuerit numerus impar, functio y casu $x = a$ fit minimum, sin autem n sit numerus par, neque maximum neque minimum: quod idem valet, si n fuerit fractio denominatorem habens imparem. Sin autem n fuerit fractio denominatorem habens parem, tum dx negative accipi debet, ne in imaginaria incidamus; & ob ambiguitatem significationis functio quoque neque maxima neque minima evadet.

EXEMPLUM III.

Invenire differentiale functionis: $y = x^x$ *casu* $x = \frac{1}{e}$ *denotante* e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$.

Quia fit in genere $dy = x^x dx(lx + 1)$, hoc differentiale casu $x = \frac{1}{e}$ seu $l\,x = -1$ evanescit. Comparetur ergo hoc differentiale cum forma generali $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 +$ &c. erit $p = x^x(lx + 1)$ & $q = x^x(lx + 1)^2 + x^{x-1}$, & posito $lx = -1$ seu $x = \frac{1}{e}$, erit $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Quare differentiale quaesitum erit $dy = \frac{1}{2}e^{(e-1):e}dx^2$, evaditque ergo functio $y = x^x$ minimum casu $x = \frac{1}{e}$.

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Invenire differentiale functionis huius: $y = x^n + e^{-1:x}$ *casu quo* $x = 0$.

Quia facto $x = 0$ fit $y = 0$, si ponatur $x = 0 + dx$, erit $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Vidimus autem $\frac{1}{e^{1:dx}}$ homogeneum esse cum potestate ipsius dx infinita, seu cum dx^{∞}, ideoque prae dx^n evanescet; ita ut sit $dy = dx^n$.

354. Quod in differentialibus primis certis casibus usu venit, ut consueta differentiationis regula non prodeant, idem quoque in differentialibus secundi ac tertii superiorumque ordinum evenit, iis casibus, quibus in forma differentiali completa:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \&c.$$

quantitatum q, r, s, &c. nonnullae vel evanescunt, vel in infinitum abeunt. Scilicet cum sit:

$$dd.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \&c.$$

si quo casu fiat $q = 0$, tum erit $ddy = rdx^3$; sin autem eodem casu & r evanescat, tum erit $ddy = \frac{7}{12}sdx^4$, & ita porro. Sin autem vel q vel r vel s &c. fiat infinitum, tum ex ista serie differentiale secundum prorsus inveniri nequit, sed confugiendum erit ad principia differentialium: scilicet ponendo $x + dx$ loco x quaeratur valor y', & ponendo $x + 2dx$ loco x valor ipsius y'', quo facto erit verus valor differentialis secundi $ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y$. Simili modo si de differentiali tertio quaestio proponatur, tum praeterea in y loco x scribatur $x + 3dx$, inventoque valore y''' erit $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$, sicque deinceps. Quos casus sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale secundum functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$

casu quo ponitur $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Quaerendo differentiale completum ipsius y, ex forma $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \&c.$ prodibunt pro p, q, r, s &c. sequentes valores: $p = -\frac{4aax}{(aa+xx)^2}$; $q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa+xx)^3}$; atque $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$.

Cum nunc sit $ddy = qdx^2 + rdx^3 + \frac{7}{12}sdx^4 + \&c.$ ob $q = 0$ casu $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eodemque casu sit $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$, fiet differentiale secundum quaesitum $ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$.

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale tertium functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$

casu $x = a$.

Quaerendo ut ante differentiale completum $dy = \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 + \&c.$ quia est differentiale tertium $d^3y = rdx^3 + \frac{3}{2}sdx^4$, ob $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$, fiet $r = 0$ casu $x = a$; quare ad valorem s est progrediendum, qui erit: $s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa+xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa+xx)^5}$ facto ergo $x = a$, erit $s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}$; unde hoc casu erit $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Invenire differentialia cuiusque gradus functionis
$y = ax^m + bx^n$ *casu* $x = 0$.

Ponendo successive $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; &c. loco x valores sequentes functionis y erunt:

$$y' = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$
$$y'' = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$
$$y''' = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n$$
&c.

Posito ergo $x = 0$, erit $y = 0$, eiusque differentialia erunt:

$$dy = adx^m + bdx^n$$
$$ddy = (2^m - 2)adx^m + (2^n - 2)bdx^n$$
$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)adx^m + (3^n - 3.2^n + 3)bdx^n$$
$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)adx^m + (4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4)bdx^n$$
&c.

Si igitur exponens n fuerit maior quam m, termini secundi in his expressionibus evanescunt prae primis. Interim tamen eorum ratio erit habenda, si n fuerit numerus fractus, ut casus, quibus haec differentialia vel fiunt imaginaria, vel ambigua, diiudicari queant. Ulteriorem vero horum casuum evolutionem in doctrinam de lineis curvis reservari convenit.