CAPUT XIII.

DE CRITERIIS RADICUM IMAGINARIARUM.

313.

In Capite praecedenti modum exhibuimus naturam radicum cuiusque aequationis explorandi, ita ut eius beneficio, si proponatur aequatio quaecunque, inveniri possit, quot ea radices habeat reales, & quot imaginarias. Plerumque quidem haec investigatio difficillime instituitur, cum aequatio differentialis ita est comparata, ut eius radices exhiberi nequeant. Quanquam autem his casibus eadem operatio ad aequationem differentialem ipsam accommodari, eiusque radicum natura ex ipsius differentiali indagari, hincque illius radices proxime assignari possent; tamen labor nimium saepissime fieret molestus. Quamobrem in hoc negotio saepenumero sufficit eiusmodi criteria nosse, ex quorum praesentia tuto concludi possit, inesse in aequatione proposita radices imaginarias; etiamsi ex eorum absentia vicissim inferri nequeat, omnes prorsus radices esse reales. Quae cognitio etsi est imperfecta, tamen frequenter usu non destituitur; quocirca his criteriis explicandis praesens caput destinavimus.

314. In capite igitur praecedenti vidimus, si aequatio quaecunque:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum etiam eius differentialem

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

omnes suas radices habituram esse reales. Simul vero ostendimus, etiamsi aequatio differentialis omnes habeat radices reales; tamen inde non sequi, ipsius aequationis propositae omnes

radi-

radices futuras esse reales. Interim tamen, si aequatio differentialis habeat radices imaginarias, tum semper recte concludimus, aequationem ipsam propositam ad minimum totidem habere debere radices imaginarias. Ad minimum dico: fieri enim potest, ut ipsa aequatio plures habeat radices imaginarias. Hoc ergo modo ex aequatione differentiali plus concludi non potest, quam, si ea habeat radices imaginarias, ipsam propositam aequationem eiusmodi radices quoque habere debere, & quidem ad minimum totidem.

315. Si aequatio proposita multiplicetur per potestatem quamcumque x^m, denotante m numerum integrum affirmativum; tum quia haec nova aequatio omnes radices habebit reales, si quidem propositae radices omnes fuerint reales: tum quoque eius differentialis, postquam per x^{m-1} fuerit divisa, radices erunt reales omnes. Hinc si haec aequatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque ista aequatio

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

omnes radices habebit reales. Ob eandem rationem, si haec multiplicetur per x^k & denuo differentietur aequatio resultans

$$(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

omnes adhuc radices habebit reales: sicque quousque libuerit, ulterius progredi licet. Sin autem huiusmodi aequatio radices imaginarias habere deprehendatur, tum simul certum erit, ipsam aequationem propositam saltem totidem radices imaginarias esse habituram.

316. Si aequatio proposita antequam differentietur, per nullam potestatem ipsius x multiplicetur, tum iudicium ad aequationem uno gradu inferiorem deducitur. Ita si aequatio proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque eius differentiales omnium ordinum omnes radices habebunt reales. Quare & sequentium aequationum omnium radices erunt reales:

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\&c.=0,$$
$$n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}-\&c.=0,$$
$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+\&c.=0,$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5}+\&c.=0,$$

quae aequationes ad sequentes formas revocantur:

$$x^{n-1}-\frac{n-1}{n}Ax^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}Bx^{n-3}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-4}+\&c.=0$$
$$x^{n-2}-\frac{n-2}{n}Ax^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}Bx^{n-4}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-5}+\&c.=0$$
$$x^{n-3}-\frac{n-3}{n}Ax^{n-4}+\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}Bx^{n-5}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-6}+\&c.=0$$
$$x^{n-4}-\frac{n-4}{n}Ax^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}Bx^{n-6}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-7}+\&c.=0$$
&c.

317. Hoc igitur modo iudicium ad aequationem dati gradus inferioris, quam est ipsa proposita, reduci potest. Sic si m fuerit numerus quicunque minor quam n, tum si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque huius aequationis gradus m omnes radices erunt reales:

$$x^m-\frac{m}{n}Ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{n(n-1)}Bx^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{m-3}+\&c.=0.$$

Quare si ponatur $m=2$, prodibit ista aequatio:

$$x^2-\frac{2}{n}Ax+\frac{2.1}{n(n-1)}B=0,$$

cuius radices debebunt esse reales, si quidem aequatio proposita $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\&c.=0$, omnes habeat radices reales. Cum autem ista aequatio quadratica radices reales habere nequeat, nisi sit $\frac{AA}{nn}>\frac{2.1}{n(n-1)}B$, sequitur, aequationis propositae radices omnes reales esse non posse, nisi sit $AA>\frac{2n}{n-1}B$. Quamobrem si fuerit $AA<\frac{2n}{n-1}B$, hoc certum erit signum, aequationis propositae ad minimum duas radices fore imaginarias.

318. Hinc ergo assecuti sumus affectionem necessariam, qua coefficientes trium primorum terminorum affecti esse debent, si quidem aequationis propositae omnes radices fuerint reales. Hocque est eiusmodi criterium, uti initio meminimus: scilicet etiamsi casu $AA > \frac{2n}{n-1}B$, nihil pro realitate radicum sequatur, at si sit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, hoc tamen certum sit signum duarum saltem radicum imaginariarum. Sic ut omnes radices sint reales, successive pro n numero 2, 3, 4, 5, &c. substituendo requiritur, ut sequitur:

$x^2 - Ax + B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A^2 > 4B$

$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \quad \ldots\ldots \quad A^2 > \frac{6}{2}B$

$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \quad \ldots \quad A^2 > \frac{8}{3}B$

$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0 \quad . \quad A^2 > \frac{10}{4}B$

Hinc si terminus secundus desit, tertiique coefficiens B sit affirmativus, ut aequatio sit huiusmodi:

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0,$$

haec omnes radices reales habere nequit, sed ad minimum duae erunt imaginariae.

319. Huiusmodi vero criteria pro coefficientibus sequentium terminorum erui possunt, si perpendamus aequationem hanc:

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$$

totidem habere radices tam reales quam imaginarias, quot ipsa aequatio proposita contineat. Haec enim aequatio ex illa oritur, si ponatur $x = \frac{1}{y}$, ita ut ex radicibus huius aequationis simul radices illius habeantur. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque reciproce istius differentialis, scilicet huius

— A

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - \&c. = 0$$

radices omnes erunt reales. Substituatur in hac iterum x pro $\frac{1}{y}$, atque emerget ista aequatio:

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \&c. = 0,$$

cuius radices propterea omnes erunt reales, si radices aequationis propositae fuerint tales. Hinc iam patet, si fuerit $n = 3$, necesse esse ut sit $BB > 3AC$.

320. Differentietur autem ista aequatio ulterius atque prodibunt

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} - \&c. = 0$$

&c.

Generaliter ergo, si m sit numerus minor quam n, erit $Ax^m - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2} - \&c. = 0$.

Si iam ponatur $m = 2$, habebitur ista aequatio:

$$Ax^2 - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)}C = 0,$$

cuius radices ut sint reales, oportet esse $\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$. Quare si aequatio proposita omnes habeat radices reales erit $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$. Atque si fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, hoc certum est signum, aequationem propositam ad minimum duas habere radices imaginarias. Si igitur sit $n = 3$, criterium erit $BB > 3AC$; si sit $n = 4$; erit $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}AC$; si

$n = 5$,

$n = 5$, erit $BB > \frac{3.4}{2.3} AC$, & ita porro.

321. Ut haec criteria ad sequentes coefficientes transferamus, resumamus aequationem differentialem in y inventam

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \&c. = 0$$

hancque denuo differentiemus, ut habeamus:

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \&c. = 0$$

quae restituto $\frac{1}{x}$ loco y dabit:

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

ex cuius ulteriori differentiatione sequuntur hae aequationes;

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2} Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)} Dx^{n-5} - \&c. = 0$$

& generaliter

$$Bx^{m} - \frac{3m}{n-2} Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)} Dx^{m-2} - \&c. = 0$$

Quodsi igitur ponamus $m = 2$ prodibit aequatio quadrata:

$$Bx^2 - \frac{2.3}{n-2} Cx + \frac{6.2}{(n-2)(n-3)} D = 0$$

cuius radices erunt reales, si fuerit $\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6.2BD}{(n-2)(n-3)}$ seu $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, erit $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, atque si haec conditio deficiat, aequatio certo duas ad minimum habebit radices imaginarias.

322. Si aequationem superiorem $2B - 6Cy + 12Dy^2 -$ &c. $= 0$ denuo differentiemus, prodibit:

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \&c. = 0, \text{ sive}$$

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \&c. = 0,$$

 quae

quae restituto x loco $\frac{1}{y}$ abibit in hanc:

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

ex cuius ulteriori differentiatione sequuntur:

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{n-3}Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \&c. = 0$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)}{n-3}Dx^{n-6} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-7} - \&c.$$

& generaliter

$$Cx^{m} - \frac{4m}{n-3}Dx^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{m-2} - \&c. = 0.$$

Ponamus $m = 2$, eritque $Cx^2 - \frac{2.\ 4}{n-3}Dx + \frac{2.\ 10}{(n-3)(n-4)}E = 0$ ex qua si eius radices sint reales sequitur fore:

$$\frac{4.\ 4}{(n-3)^2}DD > \frac{2.\ 10}{(n-3)(n-4)}CE \text{ seu } DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE.$$

323. Ex his iam satis perspicitur relatio omnium coefficientium. Generatim ergo si aequatio haec:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales; erit

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DF$$

&c.

Qua-

Quarum conditionum si una desit, aequatio ad minimum duas habebit radices imaginarias. Atque si ista criteria a se invicem non pendeant, facile perspicitur, quotquot eorum non conveniant, totidem dari paria radicum imaginariarum. Quamvis autem hae conditiones omnes in quapiam aequatione locum habeant, tamen inde non sequitur, nullas dari radices imaginarias; quin potius evenire potest, ut hoc non obstante omnes radices sint imaginariae. Cavendum ergo est, ne his criteriis plus tribuatur, quam ipsis vi principiorum, unde sunt deducta, tribui potest.

324. Facile autem apparet non singula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare posse; in aequatione enim n dimensionum, quia habentur $n+1$ termini, atque ex singulis praeter primum & ultimum criterium desumi potest, omnino criteria habebuntur $n-1$; neque tamen si singula deficiant, aequatio $2n-2$ radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices. Unum autem criterium semper duas radices imaginarias patefacit, & quia fieri potest, ut duo criteria huiusmodi radicum non plures ostendant, videndum est utrum haec duo criteria sint contigua nec ne: priori casu numerus radicum imaginariarum non augebitur, posteriori vero, quia criteria litteras prorsus diversas involvunt, unumquodque binas radices imaginarias monstrabit. Ita etiamsi fuerit

$AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AB$, tamen hinc non necessario quatuor radices imaginariae indicantur, sed utrumque fortasse easdem binas indicat. Quodsi vero fuerit $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, existente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, quatuor radices imaginariae indicabuntur.

325. Ex criteriis ergo radicum imaginariarum se immediate

 inse-

inſequentibus plus non ſequitur quam ex uno; ſin autem ea ordine interrupto procedant, ut inter bina quaeque criterium unum vel plura contraria interiaceant, tum ex unoquoque binae radices imaginariae concludi poterunt. Quae conſideratio ſequentem regulam ſuppeditat. Aequationis propoſitae ſingulis terminis, praeter primum & ultimum, inſcribantur coefficientes criteriorum ante inventi, hoc modo:

$$\frac{2n}{1(n-1)} \quad \frac{3(n-1)}{2(n-2)} \quad \frac{4(n-2)}{3(n-3)} \quad \frac{5(n-3)}{4(n-4)} \quad \&c.$$
$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$
$$+ \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad \&c.$$

Tum examinetur quadratum cuiuſque coefficientis, utrum ſit maius an minus, quam fractio inſcripta per productum adiacentium coefficientium multiplicata, priori caſu termino ſubſcribatur ſignum $+$, poſteriori ſignum $-$; primo vero termino & ultimo perpetuo ſignum $+$ ſubſcribatur. Quo facto, quot ſignorum horum ſubſcriptorum variationes occurrunt, totidem radices imaginarias aequatio ad minimum habere cenſenda erit.

326. Haec eſt regula a *Neutono* inventa ad radices imaginarias cuiuſque aequationis explorandas; de qua autem probe tenendum eſt, quod iam annotavimus, ſaepenumero fieri poſſe, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam hac methodo deteguntur. Hinc alii operam dederunt, ut ſimiles regulas alias invenirent, quae numerum radicum imaginariarum exactius praeberent, ita ut verus iſtiuſmodi radicum numerus minus ſaepe eum, quem regula oſtendat, excederet. In hoc genere imprimis proſtat regula *Campbelli* Arithmeticae *Neutoni* univerſali ſubiuncta, quam propterea hic explicari conveniet, etiamſi non ſit perfecta. Nititur autem hoc lemmate: Si fuerint α, β, γ, δ, ε, &c. quantitates; earumque numerus ſit m, ponatur ſumma harum quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c. $= S$, ſumma quadratorum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ &c. $= V$, erit utique $V > 0$.

Sed

Sed cum ſit productum ex binis $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \&c.$ $= \frac{SS - V}{2}$; erit $(m - 1)\,V > SS - V$ ſeu $m\,V > SS$. Nam ſi differentiarum inter binas quantitates quadrata ſumantur, erit eorum ſumma

$$= (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + \&c.$$
$$= (m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c.) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \&c.)$$
$$= (m - 1)\,V - 2\,\frac{SS - V}{2} = m\,V - SS.$$

Cum igitur ſumma quadratorum realium ſit ſemper affirmativa, erit $m\,V - SS > 0$ ideoque $m\,V > SS$.

327. Hoc lemmate praemiſſo ſi habeatur haec aequatio:
$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0,$$
eiuſque omnes radices fuerint reales numero n, quae ſint a, b, c, d, e, &c. erit uti conſtat ex natura aequationum:

	numerus termin.
$A = a + b + c + d + \&c.$	n
$B = ab + ac + ad + bc + bd + \&c.$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$D = abcd + abce + abde + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

&c.

Sumantur iam ſingulorum harum ſerierum terminorum quadrata, ac ponatur:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.$$
$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \&c.$$
$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \&c.$$
$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \&c. \qquad \&c.$$

erit ex natura combinationum:

$$P = A^2 - 2B$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$

R =

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H \quad \&c.$$

328. Vi igitur lemmatis praemissi habebimus:

$$n\,P > AA$$
$$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\,Q > BB$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\,R > CC$$
$$\frac{n(-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,S > DD \quad \&c.$$

Quodsi ergo loco P, Q, R, &c. valores ante inventi substituantur, obtinebimus sequentes radicum realium proprietates:

$$nAA - 2nB > AA \text{ seu } AA > \frac{2n}{n-1}B$$

$$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}BB - \frac{2n(n-1)}{1.\ 2}AC + \frac{2n(n-1)}{1.\ 2}D > BB, \text{ sive}$$

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1.\ 2}}{\frac{n(n-1)}{1.\ 2.} - 1}(AC - D)$$

similique modo aequationes sequentes praebent:

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} - 1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - 1}(CE - BF + AG - H)$$

Hinc ergo cuiusque coefficientis quadratum non solum cum pro-

producto proxime adiacentium comparatur, ſed etiam cum rectangulis binorum quorumque utrinque aeque diſtantium; ita tamen ut horum rectangulorum ſigna alternatim mutentur.

329. Singulis igitur aequationis terminis praeter primum, & ultimum inſcribi debent fractiones, quarum numeratores ſint unciae binomii ad ſimilem dignitatem elevati duplicatae; denominatores vero eaedem unciae unitate minutae. Ita conſiderando aequationes quadratas, cubicas, biquadratas &c. ſi earum radices omnes fuerint reales, erit:

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0 \quad ; \quad A^2 > 4B$$

Pro aequatione cubica:

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

erit $A^2 > 3B$ & $B^2 > 3AC$.

Pro aequatione biquadrata:

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

erit $A^2 > \frac{8}{3}B$; $B^2 > \frac{12}{5}(AC - D)$; $C^2 > \frac{8}{3}BD$

Pro aequatione poteſtatis quintae:

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

erit $AA > \frac{10}{4}B$; $B^2 > \frac{20}{9}(AC - D)$; $C^2 > \frac{20}{9}(BD - AE)$ & $D^2 > \frac{10}{4}CE$.

Pro aequatione poteſtatis ſextae:

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{5}}{E}x + F = 0$$

erit $A^2 > \frac{12}{5}B$; $B^2 > \frac{30}{14}(AC - D)$; $C^2 > \frac{40}{19}(BD - AE + F)$; $D^2 > \frac{30}{14}(CE - BF)$; $E^2 > \frac{12}{5}DF$; &c.

330. Si igitur quodpiam criterium fallat, id erit indicium duas ad minimum ineſſe radices imaginarias in aequatione propoſita. Cum autem ſi ſingula fallant, aequatio ideo non

non duplo plures habere queat radices imaginarias, simili modo iudicium his casibus erit absolvendum, quem ante pro Neutoniana regula indicavimus. Scilicet si cuiusque termini quadratum maius fuerit quam fractio inscripta per producta terminorum adiacentium & utrinque aequidistantium multiplicata, tum isti termino subscribatur signum $+$, contra vero signum $-$; primo vero & ultimo termino constanter subscribatur signum $+$. Quo facto inspiciatur ordo signorum horum subscriptorum, & quoties occurrit variatio, toties radix imaginaria indicabitur. Quoties ergo haec regula plures radices imaginarias indicat, quam Neutoniana, toties quoque ad veritatem magis accedit. Interim tamen fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam per utramque regulam indicantur.

331. Falleremur ergo, si his criteriis tanquam perfectis signis radicum realium & imaginariarum uti vellemus, propterea quod fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant: error autem eo maior esse posset, quo altioris gradus fuerit aequatio proposita. Nam in aequatione quadrata haec criteria ita veritati sunt consentanea, ut si nullas radices imaginarias indicent, etiam aequatio nullas sit habitura. Aequatio autem cubica duas radices imaginarias habere potest, etiamsi neutro regula, (ambae autem hoc casu adhuc conveniunt) eas exhibeat. Hos igitur casus investigaturi, sit proposita haec aequatio cubica generalis:

$$x^3 - \overset{3}{A}x^2 + \overset{3}{B}x - C = 0$$

in qua si fuerit $AA > 3B$ & $BB > 3AC$ neutra regula radices imaginarias indicat. Supra autem (306) vidimus ad id, ut nullae radices imaginariae adsint requiri primo ut sit $B > \frac{1}{3}AA$, quam conditionem quoque ambae regulae requirunt. Sit igitur $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, atque necesse est ut C contineatur intra hos limites: $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Utraque autem regula tantum postulat;

ut

ut sit $C < \frac{BB}{3A}$, hoc est $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$. Quae conditio locum habere potest, etiamsi C non intra dictos limites contineatur.

332. Sit enim $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$: atque regulae nullas radices imaginarias indicabunt. Interim tamen inerunt duae radices imaginariae, si fuerit vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 \text{ vel}$$

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$$

Si igitur fuerit vel $gg > \frac{(ff+Af)^2}{27A}$ vel $gg < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$, aequatio cubica duas habebit radices imaginarias, etiamsi neutra regula eas indicet. Sumimus autem hic esse A quantitatem affirmativam, si enim esset negativa, ponendo $x = -y$ aequatio in eiusmodi formam transmutaretur, in qua A esset affirmativa. Hinc infinitae aequationes cubicae formari possunt, quae habeant duas radices imaginarias, etiamsi per regulam non indicentur. Sit enim $gg = \frac{(ff+Af)^2}{27A} + bb$, erit

$$C = \frac{(AA-ff)^2}{27A} - gg = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 - bb, \ \& \ B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff.$$

Vel sit $gg = \frac{(Af-ff)^2}{27A} - bb$ existente $bb < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$; erit $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 + bb$ & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Utroque casu prodibit aequatio duas habens radices imaginarias, neutra regula indicandas. Ponamus verbi gratia $A = 4$, $f = 1$, erit $B = 5$; & ob $gg = \frac{25}{108} + bb$; erit $C = \frac{225}{108} - \frac{25}{108} - bb = \frac{50}{27} - bb$. Quare si sit $C < \frac{50}{27}$; aequatio $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ semper habebit duas radices imaginarias. At sumto $gg = \frac{1}{12} - bb$

debebit eſſe $bb < \frac{1}{12}$, fietque $C = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} + bb = 2 + bb$. Sit $bb = \frac{1}{16}$; atque aequatio $x^3 - 4xx + 5x - \frac{33}{16} = 0$ duas habebit radices imaginarias, etiamſi nulla regulis prodatur:

333. Quin etiam eiuſmodi aequationes generales formari poſſunt, in quibus neutra regula radices imaginarias exhibeat, etiamſi tamen ſaepiſſime duae pluresve inſint. Evenit hoc ſi perpetuo duo ſigna ſimilia ſe mutuo excipiant, uti: $x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$ vel $x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \&c. = 0$, hic utraque regula nullam unquam radicem imaginariam prodit. Quod autem ſaepiſſime huiuſmodi radices continere queant, vel ex aequatione cubica elucet $x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$, quae poſito $ff = AA + 3B$ ſemper habeat duas radices imaginarias, ſi fuerit vel $-C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ vel $-C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Interim tamen & hos caſus ex regulis elicere licet, ſi aequatio ope ſubſtitutionis in aliam formam transformetur:

Ponatur $x = y + k$, fietque:

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3ky^2 + 3kky + k^3 \\ \quad - Ayy - 2Aky - Akk \\ \qquad\quad - B\,y - Bk \\ \qquad\qquad\quad + C \end{array}\right\} = 0$$

quae ſecundum regulas examinata dabit primo quidem ſponte $(3k - A)^2 > 3(3kk - 2Ak - B)$; at quo ſit $(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - Akk - Bk + C)$, quod eſt alterum criterium, neceſſe eſt ut ſit:

$$BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0,$$

quicunque valor ipſi k tribuatur. Sumatur ergo k ita, ut haec expreſſio minimum valorem adipiſcatur, quod fiet ponendo $k = \dfrac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$ & ſi iſta expreſſio adhuc fuerit > 0, probabile erit aequationem propoſitam nullas habere radices imaginarias. Fiet autem $BB + 3AC - \dfrac{(AB - 9C)^2}{(AA + 3B)} + \dfrac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0$

ſeu

seu $BB + 3AC > \frac{(AB-9C)^2}{4(AA+3B)}$. Cum ergo sit $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$,
erit $4ff(\frac{1}{9}f^4 - \frac{2}{9}AAff + \frac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\frac{1}{3}Aff - \frac{1}{3}A^3 - 9C)^2$ seu
$4f^6 - 8A^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff > A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$
vel $4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$
unde factoribus sumtis esse debebit:
$(2f^3 + A^3 - 3Aff + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Aff - 27C) > 0$.
Hincque regulae radices imaginarias ostendent, si fuerit vel
$C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$ vel
$C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$.
Quae sunt eaedem conditiones, quas supra invenimus. Patet ergo idonea aequationis propositae transmutatione regulas hoc capite traditas ita perfici posse, ut a veritate non diffideant, etiamsi convertantur.

334. Ex his principiis quoque regula *Harriotti*, qua quaelibet aequatio tot radices affirmativas habere praedicatur, quot dentur signorum variationes, tot vero negativas, quot dentur eiusdem signi successiones, demonstrari potest, quae quidem regula pro radicibus tantum realibus valet. Ponamus ergo aequationem $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$ omnes radices habere reales atque affirmativas, atque eius differentialis $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c. = 0$ non solum omnes suas radices quoque habebit reales & affirmativas, sed etiam huius radices constituent limites radicum illius aequationis. Praeterea vero posito $x = \frac{1}{y}$ haec aequatio $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$ omnes quoque radices habebit reales affirmativas, sed reciprocas illius, ita ut quae radices in illa aequatione sint maximae, hae in ista fiant minimae. His positis si illa aequatio proposita continuo differentietur, donec ad aequationem primi ordinis perveniatur, quae erit $x - \frac{1}{n}A = 0$, (317) huius radix adhuc

 erit

erit affirmativa, ideoque coefficiens secundi termini habebit signum — uti assumsimus. Sin autem iste coefficiens haberet signum +, tum certo sequeretur, aequationem propositam non omnes radices habere affirmativas, sed unam ad minimum fore negativam, & quidem eam, quae limitibus hucusque perductis respondeat.

335. Si aequatio proposita in sui reciprocam convertatur & differentietur, tum vero iterum x restituatur atque differentiationes continuentur, donec perveniatur ad aequationem simplicem, quae ex §. 320. erit huiusmodi $Ax - \frac{2}{n-1}B = 0$, cuius propterea radix quoque debet esse affirmativa, si quidem proposita omnes suas radices habeat reales affirmativas, hincque secundus & tertius terminus diversa signa habebunt. Quodsi ergo hi duo termini similia habeant signa, ad minimum una radix negativa indicabitur, respondens limiti hac aequatione signato, qui diversus erit a limite praecedente aequatione indicato, propterea quod hic radices semel sunt in suas reciprocas conversae: unde concluditur, si tres termini aequationis initiales paria habuerint signa, tum duas radices negativas indicari.

336. Simili modo si conversiones & differentiationes secundum §. 321. instituantur, atque eousque continuentur, donec ad aequationem simplicem $Bx - \frac{3}{n-2}C = 0$ perveniatur, & huius aequationis radix esse debet affirmativa, si quidem propositae aequationis omnes radices fuerint tales; unde si termini tertius & quartus paria habeant signa, indicabitur una radix negativa. Sicque perpetuo, si duo quicunque termini contigui aequalibus signis fuerint affecti, una radix negativa proditur; ideoque quotcunque fuerint eiusdem signi successiones, totidem ad minimum aequatio proposita habebit radices negativas, quoniam haec singula criteria ad diversos limites referuntur. Quod si autem aequatio proposita omnes radi-

ces

ces negativas habere ponatur, tum quia radices omnium aequationum differentialium ex ea deductarum debent eſſe pariter negativae, omnes termini aequalibus ſignis affecti eſſe debebunt. Quare ſi duo termini contigui diverſa habeant ſigna, ex iis una ad minimum radix affirmativa concludetur. Atque ſimili modo, quotcunque in aequatione occurrant binorum terminorum variationes ſignorum, totidem ad minimum radices affirmativae ineſſe dicendae ſunt. Cum igitur aequatio omnis tot habeat radices, quot dantur duorum ſignorum contiguorum combinationes, neque plures, ſequitur quamvis aequationem, cuius omnes radices ſint reales, tot habere radices affirmativas, quot fuerint ſignorum contiguorum variationes, tot vero negativas, quot fuerint eiuſdem ſigni ſucceſſiones.

CA-