# CAPUT XII.

## DE USU DIFFERENTIALIUM IN INVESTIGANDIS RADICIBUS REALIBUS AEQUATIONUM.

294.

Natura maximorum ac minimorum viam nobis patefacit ad indolem radicum aequationum, utrum ſint reales an imaginariae, cognoſcendam. Sit enim propoſita aequatio cuiuſcunque ordinis:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

cuius radices ponamus eſſe $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, &c. ita ut $p$ ſit minima, $q$ ea quae ratione magnitudinis ſequitur, ſicque & reliquae radices ſecundum ordinem quantitatis ſint diſpoſitae: ſcilicet ſit $q > p$; $r > q$; $s > r$; $t > s$ &c. Aſſumamus autem omnes radices aequationis eſſe reales, eritque exponens maximus $n$ ſimul numerus radicum $p$, $q$, $r$, &c. Conſideremus quoque has radices omnes tanquam inter ſe inaequales; hinc tamen aequales radices non excluduntur, propterea quod radices inaequales, ſi earum differentia abeat in infinite parvam, fiant aequales.

295. Quoniam propoſita expreſſio $x^n - Ax^{n-1} + \&c.$ tum ſolum fit nihilo aequalis, cum loco $x$ aliquis valor ex $p$, $q$, $r$, &c. ſubſtituitur, reliquis vero caſibus omnibus non evaneſcit, ponamus generatim:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = z$$

ita ut $z$ ſpectari poſſit tanquam functio ipſius $x$. Fingamus nunc pro $x$ ſucceſſive ſubſtitui valores determinatos, incipiendo a minimo $x = -\infty$, atque continuo maiores in locum ipſius $x$ collocari; perſpicuumque eſt $z$ nacturum hinc eſſe valores vel nihilo maiores vel nihilo minores, neque prius eſſe evaniturum, quam ponatur $x = p$; quo caſu fiet $z = 0$.

Augeantur valores ipsius $x$ ultra $p$, atque valores ipsius $z$ vel affirmativi vel negativi fient, donec perveniatur ad valorem $x = q$; quo casu iterum erit $z = 0$. Necesse ergo est, ut cum valores ipsius $z$ ab o iterum ad o accesserint, interea $z$ habuerit valorem vel maximum vel minimum; maximum scilicet si valores ipsius $z$, dum $x$ intra limites $p$ & $q$ versabatur, fuerint affirmativi, minimum, si fuerint negativi. Simili modo dum $x$ ultra $q$ ad $r$ usque augetur, functio $z$ maximum vel minimum attinget: maximum nimirum si ante fuerit minimum, & contra. Supra enim vidimus maxima & minima se mutuo alternatim excipere.

296. Quare cum inter binas quasvis radices ipsius $x$ existat casus, quo functio $z$ fit maximum vel minimum; erit numerus maximorum & minimorum, quae in functione $z$ implicantur, unitate minor, quam numerus radicum realium; atque ita quidem alternatim se excipient, ut maximi ipsius $z$ valores sint affirmativi, minimi negativi. Quod si vicissim functio $z$ habeat maximum vel saltem valorem affirmativum casu $x = f$, atque minimum seu saltem negativum casu $x = g$; quoniam dum valores ipsius $x$ ab $f$ ad $g$ transeunt, functio $z$ ab affirmativo abit in negativum, necesse est ut interea per o transierit, & hancobrem dabitur radix ipsius $x$ intra limites $f$ & $g$ contenta. Nisi autem haec conditio adsit, ut valores maximi minimique ipsius $z$ fiant alternatim affirmativi & negativi, illa conclusio non sequitur. Si enim dentur functionis $z$ minima, quae quoque sint affirmativa, fieri potest ut valor ipsius $z$ a maximo ad sequens minimum transeat, cum tamen interea non evanescat. Ceterum ex dictis intelligitur, etiamsi aequationis propositae non omnes radices fuerint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum; etiamsi propositio conversa generatim non valeat, ut inter bina quaevis maxima seu minima radix realis contineatur: valet autem adiecta conditione, si alter valor ipsius $z$ fuerit affirmativus, alter negativus.

297.

297. Quoniam ergo supra vidimus, valores ipsius $x$, quibus functio:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c.$$

fit maximum vel minimum, esse radices aequationis differentialis huius:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

manifestum est, si aequationis $z = 0$ omnes radices, quarum numerus est $= n$ fuerint reales, tum quoque omnes radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fore reales. Cum enim functio $z$ tot habeat maxima vel minima, quot numerus $n - 1$ continet unitates, necesse est ut aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ totidem habeat radices reales; ideoque omnes eius radices erunt reales. Ex quo simul perspicitur, functionem $z$ plura maxima minimave habere non posse, quam $n - 1$. Habemus ergo hanc regulam latissime patentem, si aequationis $z = 0$ omnes radices fuerint reales, tum quoque aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices habebit reales. Unde vicissim sequitur, si aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ non omnes radices fuerint reales, tum quoque non omnes aequationis $z = 0$ radices reales fore.

298. Quia inter binas quasvis aequationis $z = 0$ radices reales datur unus casus, quo functio $z$ fit maximum vel minimum; sequitur si aequatio $z = 0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx} = 0$ necessario unam radicem habituram esse realem. Pariter si aequatio $z = 0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ certo duas habebit radices rea-

reales. Atque generatim si aequatio $z=0$ habeat $m$ radices reales, necesse est ut aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ ad minimum sint $m-1$ radices reales. Quare si aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ pauciores habeat radices reales quam $m-1$, tum vicissim aequatio $z=0$ certo pauciores quam $m$ habebit radices reales. Cavendum autem est, ne propositio conversa pro vera habeatur; etiamsi enim aequatio differentialis $\frac{dz}{dx}=0$ aliquot vel adeo omnes radices suas habeat reales, tamen non sequitur, aequationem $z=0$ ullam habituram esse radicem realem. Fieri enim potest, ut aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ omnes radices sint reales, cum tamen aequationis $z=0$ omnes radices sint imaginariae.

299. Interim tamen, si conditio supra memorata adiiciatur, propositio conversa ita proponi poterit, ut ex radicibus realibus aequationis $\frac{dz}{dx}=0$, numerus radicum realium aequationis $z=0$ certo cognosci possit. Ponamus enim $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. esse radices reales aequationis $\frac{dz}{dx}=0$, inter quas $\alpha$ sit maxima, reliquae vero ordine magnitudinis se invicem sequantur. His igitur valoribus loco $x$ substitutis functio $z$ obtinebit vel maximos vel minimos valores alternatim. Cum autem functio $z$ fiat $=\infty$, si ponatur $x=\infty$, patet eius valores continuo decrescere debere, dum valores ipsius $x$ ab $\infty$ usque ad $\alpha$ diminuuntur; ex quo, casu $x=\alpha$, fiet $z$ minimum. Quodsi ergo hoc casu $x=\alpha$ functio $z$ valorem induat negativum, necesse est ut ante alicubi fuerit $=0$, sicque aequationis $z=0$ radix dabitur realis $x>\alpha$; sin autem posito $x=\alpha$ functio $z$ adhuc retineat valorem affirmativum,

tivum, ante nuſquam potuit eſſe minor, alias enim quoque daretur minimum antequam $x$ ad $\alpha$ uſque diminueretur, quod eſſet contra hypotheſin; hinc aequatio $z = 0$ nullam habere poterit radicem realem maiorem quam $\alpha$. Si ergo ponamus poſito $x = \alpha$ fieri $z = \mathfrak{A}$, hoc modo iudicari poterit: ſi fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas affirmativa, tum aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem $\alpha$ maiorem; ſin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negativa, tum aequatio $z = 0$ unam perpetuo habebit radicem realem $\alpha$ maiorem, neque plures.

300. Ad hoc iudicium ulterius perſequendum

$$\begin{array}{ccc|ccc} & \text{ſi ponatur} & & & \text{fiat} & \\ x & = & \alpha & z & = & \mathfrak{A} \\ x & = & \beta & z & = & \mathfrak{B} \\ x & = & \gamma & z & = & \mathfrak{C} \\ x & = & \delta & z & = & \mathfrak{D} \\ x & = & \varepsilon & z & = & \mathfrak{E} \\ & \&c. & & & \&c. & \end{array}$$

Quia ergo $\mathfrak{A}$ fuit minimum, erit $\mathfrak{B}$ maximum, & quidem ſi $\mathfrak{A}$ fuerit affirmativum, erit quoque $\mathfrak{B}$ affirmativum, neque ergo inter limites $\alpha$ & $\beta$ dabitur radix realis aequationis $z = 0$. Quare ſi haec aequatio nullam habeat radicem realem $\alpha$ maiorem, neque ullam habebit; quae eſſet maior quam $\beta$. Sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negativa, quo caſu una datur aequationis radix $x > \alpha$; diſpiciatur utrum valor ipſius $\mathfrak{B}$ ſit affirmativus an negativus, priori caſu dabitur radix $x > \beta$, poſteriori vero nulla dabitur radix intra limites $\alpha$ & $\beta$ contenta. Simili modo cum $\mathfrak{B}$ fuerit maximum, erit $\mathfrak{C}$ minimum; quare ſi $\mathfrak{B}$ habuerit valorem negativum, multo magis $\mathfrak{C}$ erit negativum, nullaque hoc caſu dabitur radix intra limites $\beta$ & $\gamma$ contenta. Ad ſi $\mathfrak{B}$ fuerit affirmativum, radix dabitur realis inter limites $\beta$ & $\gamma$, ſi $\mathfrak{C}$ fiat negativum: ſin autem $\mathfrak{C}$ quoque ſit affirmativum tum nulla dabitur radix inter limites $\beta$ & $\gamma$ contenta ſimilique modo iudicium ulterius erit inſtituendum.

301. Quo haec iudicia facilius intelligantur, ea in sequenti tabella complexus sum:

| Aequatio $z = 0$ unam habebit radicem realem, quae continetur intra limites | Si fuerit |
|---|---|
| $x = \infty$ & $x = \alpha$ | $\mathfrak{A} = -$ |
| $x = \alpha$ & $x = \beta$ | $\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$ |
| $x = \beta$ & $x = \gamma$ | $\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$ |
| $x = \gamma$ & $x = \delta$ | $\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$ |
| $x = \delta$ & $x = \varepsilon$ | $\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$ |
| &c. | &c. |

Harumque propositionum conversae & in negantes transmutatae pariter in omni rigore locum obtinent. Scilicet

| Aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem, quae contineatur inter limites: | Si non fuerit |
|---|---|
| $x = \infty$ & $x = \alpha$ | $\mathfrak{A} = -$ |
| $x = \alpha$ & $x = \beta$ | $\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$ |
| $x = \beta$ & $x = \gamma$ | $\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$ |
| $x = \gamma$ & $x = \delta$ | $\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$ |
| $x = \delta$ & $x = \varepsilon$ | $\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$ |
| &c. | &c. |

Ope harum ergo regularum ex radicibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, si eae fuerint cognitae, non solum numerus radicum realium aequationis $z = 0$ colligitur, sed etiam limites innotescunt, intra quos singulae istae radices contineantur.

## EXEMPLUM.

*Sit proposita ista aequatio:* $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ *quae an habeat radices reales & quot quaeritur.*

Aequatio differentialis erit $4x^3 - 28x + 24 = 0$, seu $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuius radices sunt $1$, $2$, & $-3$, quae secundum ordinem magnitudinis dispositae dabunt

$\alpha =$

$$\begin{array}{lll|l} & & & \text{unde erit} \\ \alpha = & & 2 & \mathfrak{A} = - \; 4 \\ \beta = & & 1 & \mathfrak{B} = - \; 1 \\ \gamma = & - & 3 & \mathfrak{C} = - \; 129 \end{array}$$

Ob $\mathfrak{A}$ negativum ergo aequatio proposita habebit radicem realem $> 2$, at ob $\mathfrak{B}$ negativum, neque inter limites $2$ & $1$, neque inter limites $1$ & $-3$ radicem habebit realem. Cum autem posito $x = -3$ fiat $z = \mathfrak{C} = -129$, ac si statuatur $x = -\infty$, fiat $z = +\infty$ necesse est, ut radix detur realis inter limites $-3$ & $-\infty$ contenta. Habebit ergo aequatio proposita duas radices reales, alteram $x > 2$, alteram $x < -3$; ex quo duae radices erunt imaginariae. Simili modo ergo ex ultimo aequationis propositae maximo vel minimo iudicari debet, quo ex primo solo. Scilicet si aequatio proposita fuerit ordinis paris, ultimum sive maximum sive minimum (erit autem hoc casu minimum), si fuerit negativum radicem realem, sin affirmativum radicem imaginariam indicat. At pro aequationibus imparium graduum, quia posito $x = -\infty$ fit $z = -\infty$, si ultimum maximum fuerit affirmativum, radix realis, sin negativum, imaginaria indicatur.

302. Regula ergo pro cognoscendis radicibus realibus & imaginariis hoc modo commode exprimi poterit. Proposita aequatione quacunque $z = 0$, consideretur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$, cuius radices reales secundum ordinem quantitatis dispositae sint $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, &c. tum posito

$$\begin{array}{lcccccccc} & x = & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \&c. \\ \text{fiat} & z = & \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \&c. \\ \text{Iam si signa sint:} & & -, & +, & -, & +, & -, & +, & \&c. \end{array}$$

tot aequatio $z = 0$ habebit radices reales, quot habentur litterae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, &c. & insuper unam. Sin autem una ex his litteris maiusculis non habeat signum infrascriptum, tum binae radices imaginariae indicabuntur. Ita si $\mathfrak{A}$ haberet signum

 $+$,

+, tum nulla daretur radix intra limites $\alpha$ & $\beta$ contenta. Si $\mathfrak{B}$ habeat signum $-$, nulla dabitur radix inter limites $\alpha$ & $\gamma$; & si $\mathfrak{C}$ habeat signum $+$, nulla erit radix inter limites $\beta$ & $\delta$, & ita porro. Generatim autem praeter radices imaginarias hoc modo indicatas, aequatio $z = 0$ insuper tot habebit imaginarias, quot aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$.

303. Si eveniat, ut valorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. aliquis evanescat, tum eo loco aequatio $z = 0$ duas habebit radices aequales. Scilicet si fuerit $\mathfrak{A} = 0$, tum habebit duas radices ipsi $\alpha$ aequales; sin sit $\mathfrak{B} = 0$, duae erunt radices $= \beta$. Hoc enim casu aequatio $z = 0$ unam habebit radicem communem cum aequatione differentiali $\frac{dz}{dx} = 0$; supra autem demonstravimus, hoc esse indicium duarum radicum aequalium. Sin autem aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ duas pluresve radices habeat aequales, tum si earum numerus fuerit par, neque maximum neque minimum indicabitur: unde pro praesenti instituto radices aequales numero pares negligi poterunt. Sin autem numerus radicum aequalium aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fuerit impar, tum omnes praeter unam in formatione indicii reiiciendae sunt; nisi forte hoc casu ipsa quoque functio $z$ evanescat. Si enim hoc eveniat aequatio $z = 0$ quoque habebit radices aequales & quidem una plures, quam aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$. Sic si fuerit $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, ita ut haec aequatio habeat $n$ radices aequales ipsi $\zeta$, si posito $x = \zeta$ quoque evanescat $z$, tum aequatio $z = 0$ habebit $n + 1$ radices aequales ipsi $\zeta$.

304. Applicemus haec praecepta ad aequationes simpliciores, ac primo quidem a quadratica incipiamus. Sit igitur propo-

proposita haec aequatio: $z = x^2 - Ax + B = 0$: erit eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 2x - A$, qua facta $= 0$, erit $x = \frac{1}{2}A$, seu $x = \frac{1}{2}A$. Substituatur hic valor loco $x$, fietque $z = -\frac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A}$; unde colligimus, si iste valor ipsius $\mathfrak{A}$ fuerit negativus, hoc est si sit $AA > 4B$, aequationem $xx - Ax + B = 0$ habituram esse duas radices reales, alteram maiorem quam $\frac{1}{2}A$ alteram minorem. Sin autem valor ipsius $\mathfrak{A}$ fuerit affirmativus seu $AA < 4B$, tum ambae aequationis propositae radices erunt imaginariae. At si fuerit $\mathfrak{A} = 0$ seu $AA = 4B$, tum aequatio proposita habebit duas radices aequales, utramque scilicet $= \frac{1}{2}A$. Quae cum ex natura aequationum quadraticarum sint notissima, veritas horum principiorum non mediocriter illustratur, simulque eorum utilitas in hoc negotio perspicitur.

305. Progrediamur ergo ad aequationes cubicas simili modo inquirendas. Sit ergo proposita aequatio
$x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = 0$: cuius differentialis cum sit $3xx - 2Ax + B = \frac{dz}{dx}$, si haec ponatur $= 0$, fiet

$xx = \frac{2Ax - B}{3}$, cuius aequationis vel ambae radices sunt imaginariae, vel aequales, vel reales inaequales. Cum igitur hinc sit $x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$, ambae radices erunt imaginariae, si fuerit $AA < 3B$: hoc ergo casu aequatio cubica proposita unicam habebit radicem realem, cuius alii limites non patent praeter $+\infty$ & $-\infty$. Sint iam ambae radices inter se aequales, seu $AA = 3B$, erit $x = \frac{A}{3}$. Nisi ergo simul fiat $z = 0$, hae duae radices pro nullis reputari debebunt, habebitque aequatio ut ante unicam radicem realem;

sin autem casu $x = \frac{A}{3}$ simul fiat $z = o$, quod evenit, si fuerit $-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = o$, seu $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$; hoc est si fuerit $B = \frac{1}{3}A^2$ & $C = \frac{1}{27}A^3$, aequatio habebit tres radices aequales, singulas scilicet $= \frac{1}{3}A$. Evolvamus nunc tertium casum, quo ambae radices aequationis differentialis sunt reales & inter se inaequales, quod evenit si $AA > 3B$. Sit ergo $AA = 3B + ff$, seu $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, erunt ambae illae radices $x = \frac{A \pm f}{3}$. Fiet ergo $\alpha = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Quaerantur ergo valores ipsius $z$ his respondentes $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$; & cum ambae radices contineantur in hac aequatione $xx = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, fiet $z = -\frac{1}{3}Axx + \frac{2}{3}Bx - C = -\frac{2}{9}AAx + \frac{1}{9}AB + \frac{2}{3}Bx - C$. Hinc itaque oritur:

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^2 f + \tfrac{2}{9}Bf - C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - C$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB + \tfrac{2}{27}A^2 f - \tfrac{2}{9}Bf - C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 - C$$

ob $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Si igitur fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas negativa, quod evenit, si fuerit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, aequatio $z = o$ unam habebit radicem realem $> \alpha$, hoc est maiorem quam $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Ponamus ergo esse $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ seu esse $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 + gg$; atque ut vidimus, aequatio proposita cubica habebit radicem realem $> \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Quales autem futurae sint reliquae radices, ex valore $\mathfrak{B}$ intelligetur: erit autem $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3 - gg$; qui si fuerit affirmativus, aequatio insuper duas habebit radices reales, priorem intra limites $\alpha$ & $\beta$, hoc est intra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ contentam, alteram vero minorem quam $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Sin autem fuerit $gg > \frac{4}{27}f^3$, seu $\mathfrak{B}$ negativum, tum aequatio habebit duas radices imaginarias. At si fuerit $\mathfrak{B} = o$ seu $\frac{4}{27}f^3 = gg$ tum duae radices evadent aequales, utraque $= \beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Denique si sit valor ipsius $\mathfrak{A}$ affirmativus seu $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, tum aequatio duas habebit radices imaginarias, tertiaque erit realis & $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Atque si sit valor ipsius $\mathfrak{A} = o$, duae erunt radices aequales $= \alpha$, manente tertia $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306.

306. Quo igitur aequationis cubicae $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ omnes tres radices ſint reales, requiruntur tres conditiones. Primo ut ſit $B < \frac{1}{3}AA$: ſit ergo $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Secundo ut ſit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$. Tertio ut ſit $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Quae duae poſteriores conditiones eo redeunt, ut C contineatur intra hos limites $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$ ſeu intra hos limites $\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f)$ & $\frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$. Quod ſi ergo harum conditionum unica deſit aequatio duas habebit radices imaginarias. Sic ſi fuerit $A = 3$, $B = 2$, erit $\frac{1}{3}ff = \frac{1}{3}AA - B = 1$ & $ff = 3$; unde iſta aequatio: $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ omnes radices reales habere nequit, niſi C contineatur intra limites $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ & $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Quare ſi fuerit vel $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ſeu $C < -0,3849$, vel $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ſeu $C > 0,3849$ aut coniunctim $CC > \frac{4}{27}$, aequatio unicam habebit radicem realem.

307. Quoniam in omni aequatione ſecundus terminus tolli poteſt, ponamus eſſe $A = 0$, ita ut habeamus hanc aequationem cubicam $x^3 + Bx - C = 0$. Ut igitur huius aequationis omnes tres radices ſint reales, neceſſe eſt ut primo ſit $B < 0$, ſeu B debet eſſe quantitas negativa. Sit ergo $B = -kk$, erit $ff = 3kk$, atque inſuper requiritur, ut quantitas C contineatur intra hos limites $-\frac{2}{27}f^3$ & $+\frac{2}{27}f^3$; hoc eſt inter hos $-\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$ & $+\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$. Erit ergo $CC < \frac{4}{27}k^6$, ſeu $CC < -\frac{4}{27}B^3$. Unica ergo conditione natura aequationum cubicarum, quae omnes tres radices habeant reales comprehendi poterit, dum dicemus eſſe oportere $4B^3 + 27CC$ quantitatem negativam. Sic enim iam poſtulatur, ut ſit B quantitas negativa, quia alioquin $4B^3 + 27CC$ negativum fieri non poſſet. Quocirca generatim affirmamus, aequationem $x^3 + Bx \pm C = 0$ omnes tres radices habituram eſſe reales, ſi fuerit $4B^3 + 27CC$ quantitas negativa. Sin autem haec quantitas fuerit affirmativa, tum unicam fore realem, reliquas binas imaginarias; at ſi

fiat

fiat $4B^3 + 27CC = 0$, tum omnes quidem radices futuras esse reales, at binas inter se aequales.

308. Progrediamur ad aequationes biquadratas, in quibus etiam secundum terminum deesse ponamus. Sit ergo $x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$. Statuamus, $x = \frac{1}{u}$, eritque $1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$, cuius aequatio differentialis est $2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0$, quae unam habet radicem $u = 0$, tum vero erit $uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$ & $u = \frac{3C \pm \sqrt{(9CC - 32BD)}}{8D}$. Ut igitur omnes quatuor radices sint reales, primo requiritur, ut sit $9CC > 32BD$. Ponamus ergo esse $9CC = 32BD + 9ff$, erit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Hic C semper pro quantitate affirmativa sumere poterimus, nisi enim talis fuerit, ponendo $u = -v$ talis evadet. Mox autem demonstrabimus omnes radices reales esse non posse, nisi sit B quantitas negativa. Sit ergo $B = -gg$, eritque $9CC = 9ff - 32ggD$, & $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Atque duo casus erunt perpendendi, prout D sit quantitas affirmativa vel negativa.

I. Sit D quantitas affirmativa, eritque $f > C$, ac tres ipsius $u$ radices secundum quantitatis ordinem dispositae erunt 1°; $u = \frac{3C + 3f}{8D}$, 2°; $u = 0$, 3°; $u = \frac{3C - 3f}{8D}$. Aequatio autem $u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$, his valoribus loco $u$ substitutis dabit sequentes tres valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3\,(C-3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}\ ; \qquad \mathfrak{B} = \frac{1}{D}\ ;$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C-f)^3\,(C+3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

quo-

quorum primus ac tertius debet esse negativus: uterque quidem ob C affirmativum & $C < f$ fit minor quam $\frac{1}{D}$: oportet itaque esse $\frac{1}{D} < \frac{27(C+f)^3(3f-C)}{4096\,D^4}$ & $\frac{1}{D} < \frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096\,D^4}$, seu $4096D^3 < 27(f+C)^3(3f-C)$ & $4096D^3 < 27(f-C)^3(C+3f)$. At prior quantitas semper longe maior est posteriori; unde sufficit, si fuerit $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, existente $B = \frac{9CC-9ff}{32\,D}$ & $f > C$, atque $D > 0$. Si igitur fuerit D quantitas affirmativa, C affirmativa, B negativa, ut sit $f > C$, atque $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, hoc est $D < \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, tum aequatio omnes radices habebit reales. Sin autem fuerit $D > \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, attamen $D < \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$; tum duae radices erunt reales & duae imaginariae. At si adeo fuerit $D > \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

II. Sit D quantitas negativa puta $= -F$, manente C affirmativa ac B negativa, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32\,D} = \frac{9ff-9CC}{32\,F}$, erit $C > f$. Cum igitur sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = \frac{-3C \mp 3f}{8F}$ tres valores ipsius $u$ secundum ordinem magnitudinis dispositi erunt 1°; $u = 0$; 2°, $u = \frac{-3C+3f}{8F}$; 3°, $u = \frac{-3C-3f}{8F}$, qui dabunt sequenquentes valores $\mathfrak{A} = -\dfrac{1}{F}$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3\,(C+3f)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C+f)^3\,(C-3f)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

Cum igitur $\mathfrak{A}$ sit quantitas negativa, aequatio iam certo unam, ac propterea quoque duas habebit radices reales. Ut autem omnes radices sint reales, oportet ut $\mathfrak{B}$ sit quantitas affirmativa, ideoque $27(C-f)^3(C+3f) > 4096\,F^3$; tum vero necesse est, ut sit $\mathfrak{C}$ quantitas negativa seu $27(C+f)^3\,(C-3f) < 4096\,F^3$. Quocirca ut omnes radices fiant reales, requiritur ut $F^3$ contineatur intra hos limites $\dfrac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f)$ & $\dfrac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$ seu ut F contineatur intra limites $\dfrac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{(C-3f)}$ & $\dfrac{3}{16}(C-f)\sqrt[3]{(C+3f)}$; & nisi F contineatur intra hos limites, duae radices erunt imaginariae.

III. Ponamus iam B esse quantitatem affirmativam, & D pariter affirmativam, ob $B = \dfrac{9CC-9ff}{32D}$, erit $C > f$, & cum sit $u = \dfrac{3C \pm 3f}{8D}$, radices ordine magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \dfrac{3(C+f)}{8D}$; 2°, $u = \dfrac{3(C-f)}{8D}$ & 3°, $u = 0$; unde sequentes oriuntur valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3\,(C-3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D};$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3\,(C+3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}; \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{D}; \text{ ubi}$$

ubi cum $\mathfrak{C}$ sit quantitas affirmativa, certo duae radices erunt imaginariae. Sin autem fuerit $\mathfrak{A}$ negativum quod evenit, si $4096\,D^3 < 27\,(C+f)^3\,(3f-C)$, duae radices erunt reales: sin fuerit $4096\,D^3 > 27\,(C+f)^3\,(3f-C)$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

IV. Maneat B affirmativum, sit autem D negativum $=-F$, ob $B=\frac{9ff-9CC}{32\,F}$, erit $f>C$ & ob $u=\frac{-3C\mp 3f}{8F}$, tres ipsius $u$ radices secundum ordinem magnitudinis dispositae erunt 1°, $u=\frac{3(f-C)}{8F}$; 2°, $u=0$; & 3°, $u=\frac{-3(C+f)}{8F}$, unde isti valores nascuntur.

$$\mathfrak{A}=\frac{-27(f-C)^3\,(C+3f)}{4096\,F^4}-\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B}=-\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{-27(C+f)^3\,(3f-C)}{4096\,F^4}-\frac{1}{F}$$

ubi ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negativa aequatio certo duas habet radices reales, at ob $\mathfrak{B}$ negativum, duae radices erunt imaginariae.

309. Si igitur ponamus litteras B, C, D quantitates affirmativas denotare, sequentes oriuntur casus diversi diiudicandi, qui ob $f=\sqrt{}\,(CC-\frac{32}{9}BD)$ huc redeunt.

I. Si aequatio sit $x^4-Bx^2\pm Cx+D=0$. Omnes radices erunt reales, si fuerit

$$D<\tfrac{3}{16}[\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}BD)-C]\sqrt[3]{}[3\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}BD)+C].$$

Duae radices erunt reales, duaeque imaginariae, si fuerit

$$D>\tfrac{3}{16}[\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}BD)-C]\sqrt[3]{}[3\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}BD)+C]$$

at $D<\tfrac{3}{16}[\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}BD)+C]\sqrt[3]{}[3\sqrt{}(CC+\tfrac{32}{9}CD)-C]$

Omnes autem radices erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}\left[\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)} + C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)} - C\right]}.$$

II. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Duae radices semper sunt reales, reliquae binae quoque erunt reales, si quantitas D contineatur intra hos limites.

$$D > \tfrac{3}{16}\left[\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} + C\right]\sqrt[3]{\left[C - 3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)}\right]}$$

$$D < \tfrac{3}{16}\left[C - \sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)}\right]\sqrt[3]{\left[C + 3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)}\right]}$$

nisi autem D contineatur intra hos limites, duae reliquae radices erunt imaginariae.

III. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Duae radices semper erunt imaginariae. Reliquae vero duae erunt reales, si fuerit

$$D < \tfrac{3}{16}\left[\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} + C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} - C\right]}$$

Reliquae vero duae quoque erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}\left[\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} + C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} - C\right]}$$

IV. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Huius aequationis duae radices semper erunt reales, duae reliquae vero semper imaginariae.

## EXEMPLUM I.

*Si proponatur haec aequatio* $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$ *quaeratur natura radicum, utrum sint reales an imaginariae.*

Quia hoc exemplum ad casum primum pertinet, est $B = +2$; $C = 3$ & $D = 4$; unde $CC + \frac{32}{9}BD = 9 + \frac{32.8}{9} = \frac{337}{9}$ & $\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} = \frac{\sqrt{337}}{3}$ unde conditiones ut omnes radices sint reales, sunt

$$4 < \frac{3}{16}\left(3 + \frac{\sqrt{337}}{3}\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)} = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{337})\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)}$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{337}}{3} - 3\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)} = \frac{1}{16}(\sqrt{337} - 9)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)}$$

Adhi-

Adhibitis, approximationibus examinari debet ergo, utrum sit $4 < \frac{69}{16}$ & $4 < \frac{24}{16}$; quare cum prior tantum conditio locum habeat, aequatio habebit duas radices reales, & duas imaginarias.

EXEMPLUM II.

*Proposita sit haec aequatio:* $x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0$.

Quae cum pertineat ad casum secundum, duas habebit radices reales. Ad reliquarum naturam investigandam, ob $B = 9$, $C = 12$ & $D = 4$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(144 - 32 \cdot 4)} = 4$. Ideoque videndum est, utrum sit

$$4 > \frac{3}{16} \cdot 16 \sqrt[3]{0} \quad \text{hoc est } 4 > 0$$

$$\& \; 4 < \frac{3}{16} \cdot 8 \sqrt[3]{24} \quad \text{hoc est } 4 < 3\sqrt[3]{3}$$

quorum utrumque cum eveniat, aequatio proposita quatuor habebit radices reales.

EXEMPLUM III.

*Proposita sit haec aequatio:* $x^4 + xx - 2x + 6 = 0$.

Quae cum pertineat ad casum tertium, duae radices certo erunt imaginariae. Tum vero est $B = 1$; $C = 2$ & $D = 6$, ideoque $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{\left(4 - \frac{64}{3}\right)}$, quae quantitas cum sit imaginaria, & duae reliquae radices certo erunt imaginariae.

EXEMPLUM. IV.

*Sit proposita aequatio haec:* $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0$.

Eliminetur primo secundus terminus, substituendo $x = y + 1$ fiet

$$
\begin{array}{rcl}
x^4 & = & y^4 + 4y^3 + 6yy + 4y + 1 \\
-4\,x^3 & = & -4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 \\
+8\,x^2 & = & +8y^2 + 16y + 8 \\
-16\,x & = & -16y - 16 \\
+20 & = & +20 \\
\hline
\text{Ergo} & & y^4 + 2yy - 8y + 9 = 0
\end{array}
$$

quae cum pertineat ad casum tertium, duas radices habebit imaginarias. Tum vero ob $B = 2$, $C = 8$, $D = 9$, erit $\surd\left(CC - \frac{32}{9}.\ BD\right) = \surd(64 - 64) = 0$. Comparetur ergo $D = 9$ cum $\frac{3}{16}.\ 8\sqrt[3]{-8} = -3$. Cum ergo sit $D = 9 > -3$, etiam duae reliquae radices erunt imaginariae.

## EXEMPLUM V.

*Sit proposita haec aequatio:* $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$ *cuius radices constant esse* $1, 2, 4$ & $-3$.

Quod si autem regulas applicemus, sublato secundo termino ponendo $x = y + 1$ fiet: $y^4 - 13yy + 12y + 0 = 0$ quae cum casu secundo comparata dat $B = 13$, $C = 12$; $D = 0$. Debet ergo esse $D > \frac{3}{16}.\ 24.\ \sqrt[3]{-24}$; seu $0 > -9\sqrt[3]{3}$ & $D < 0$; cum igitur $D$ non sit maius quam $0$, aequatio quatuor radices reales habere indicatur. Si enim sit $D = 0$, altera aequatio abit in $D < \frac{3}{16}\left(\frac{16\,BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$ ideoque $1 < \frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$, seu $27CC < 4B^3$: est vero $27 \cdot 144 < 4.13^3$ seu $36.27 < 13^3$.

310. Opus foret maxime difficile, si simile iudicium ad aequationes altiorum graduum transferre vellemus, propterea quod aequationum differentialium radices plerumque exhiberi non possunt; quoties autem has radices assignare licet, ex traditis principiis facile colligitur, quot aequatio proposita habeat radices reales & imaginarias. Hinc omnis aequationis, quae tantum ex tribus terminis constat, radices, utrum

trum sint reales an imaginariae, definiri poterunt. Sit enim proposita haec aequatio generalis:

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0 = z$$

Sumatur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$, qua nihilo aequali posita, erit primo $x^{n-1} = 0$; unde si $n$ fuerit impar numerus, nulla radix maximum minimumve exhibens oritur: sin autem sit $n$ numerus par, una radix in computum ducenda erit $x = 0$. Tum vero erit $(m+n)x^m + nA = 0$; quae aequatio, si $m$ sit numerus par, & A affirmativa quantitas, nullam habet radicem realem. Hinc sequentes casus erunt expendendi.

I. Sit $m$ numerus par & $n$ numerus impar, & radix $x = 0$ non valebit. Si igitur fuerit A quantitas affirmativa, nulla prorsus habebitur radix maximum minimumve exhibens; unde ob $m+n$ numerum imparem aequatio proposita unicam habebit radicem realem. Sin autem fuerit A quantitas negativa; puta $A = -E$, erit $x = \pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$: unde $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$. Ex quibus valoribus fit:

$$\mathfrak{A} = (x^m - E)x^n + B = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B \text{ atque}$$

$$\mathfrak{B} = +\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B.$$ Si igitur fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas negativa, seu $\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} > B$, aequatio unam habebit radicem realem $> \alpha$.

Si insuper fuerit $B > -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}$, hoc est ambas conditiones in unam complectendo, si fuerit $(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$, tum aequatio tres habe-

hit

bit radices reales: &, nisi haec conditio locum habeat, aequationis unica radix erit realis. Valent haec de aequatione $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, si fuerit $m$ numerus impar: ubi si E fuerit numerus negativus, aequatio semper unicam radicem habebit realem.

II. Sint ambo numeri $m$ & $n$ impares, ut sit $m+n$ numerus par, nullaque radix $x=0$ in computum veniat. Quia est $(m+n)x^m + nA = 0$, erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$, quae unica radix si sit $=\alpha$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{mA}{m+n}\alpha^n + B = -\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Qui valor si fuerit negativus, aequatio proposita duas habebit radices reales, contra nullam. Aequatio ergo proposita $x^{m+n} + Ax^n + B = 0$ duas habebit radices reales, si fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$; sin fuerit $m^m n^n A^{m+n} < (m+n)^{m+n} B^m$, nulla prorsus radix erit realis.

III. Sint ambo numeri $m$ & $n$ pares, erit $m+n$ pariter numerus par: unaque radix $x=0$ maximum minimumve praebebit: quae erit unica, si A fuerit quantitas affirmativa, unde facto $\alpha = 0$, erit $\mathfrak{A} = B$. Quare si fuerit B quoque quantitas affirmativa, aequatio nullam habebit radicem realem; sin autem B sit quantitas negativa, duae habebuntur radices reales, neque plures, si quidem A fuerit quantitas affirmativa. At ponamus esse A quantitatem negativam seu $A = -E$, erit $x = \pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; habebimusque tria maxima vel minima: nempe $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; $\beta = 0$; $\gamma = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$. Quibus ipsius $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$ respondent valores

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B;$$

$$\mathfrak{B} = B;$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B.$$

Si

Si igitur B ſit quantitas negativa, ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negativas, aequatio duas tantum habebit radices reales, propterea quod quoque $\mathfrak{B} = B$ ſit negativum. At ſi B fuerit quantitas affirmativa, aequatio quatuor habebit radices reales, ſi ſit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$. Nullam autem habebit radicem realem, ſi fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^n n^n E^{m+n}$.

IV. Sit $m$ numerus impar & $n$ numerus par: atque radix $x = 0$ dabit maximum vel minimum. Praeterea vero erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Si ergo A ſit numerus affirmativus, fiet $\alpha = 0$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$; hincque $\mathfrak{A} = B$, & $\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Quare ſi ſit B quantitas negativa, puta $B = -F$, atque inſuper fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} F^m$, aequatio tres habebit radices reales; contra unica tantum erit realis. Sin autem ſit A quantitas negativa puta $A = -E$, fiet $x = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = 0$, quibus reſpondent $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$ & $\mathfrak{B} = B$. Quare aequatio tres habebit radices reales; ſi fuerit B quantitas affirmativa, & $m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$, quae proprietas niſi locum inveniat, aequatio unicam habebit radicem realem.

311. Sint omnes coefficientes $= 1$, atque denotantibus $\mu$ & $\nu$ numeros integros, aequationes ſequentes ita diiudicabuntur:

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ unicam habebit radicem realem:

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$, tres habebit radices reales, ſi fuerit $(2\mu+2\nu-1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu-1)^{2\nu-1}$, quod cum nunquam fieri poſſit, aequatio ſemper unicam radicem realem habebit:

$x^{2\mu}$

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0$ duas habet radices reales.
$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.
$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.
$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$ duas habet radices reales.
$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$ unicam habet radicem realem.
$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$ unicam habet radicem realem.

Ceterum quia in casu tertio ambo exponentes sunt pares: is ponendo $xx = y$ ad formam simpliciorem reduci potest, ideoque hic casus praetermitti posset. Quo facto affirmari poterit, nullam aequationem tribus terminis constantem plures tribus habere posse radices reales.

EXEMPLUM.

*Quaerantur casus, quibus aequatio haec* $x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$ *tres habeat radices reales.*

Quia haec aequatio pertinet ad casum quartum, patet quantitates A & B, esse debere signis contrariis affectas. Quare nisi huiusmodi habeat formam, unicam habebit radicem realem: sin autem aequatio proposita fuerit huiusmodi $x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0$, quo ea habeat tres radices reales, necesse est ut sit $3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3$ seu $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$. Quod si ergo fuerit $B = 1$, oportet esse, $A^5 > \frac{3125}{108}$, seu $A > 1,960132$. Si ergo sit $A = 2$ ista aequatio $x^5 - 2x^2 + 1 = 0$ tres habet radices reales, quarum cum una sit $x = 1$; sequitur hanc aequationem biquadratam $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ duas habere radices reales. Quod quidem tum ex his datis praeceptis intelligi potest, tum ex iis, quae in libro superiori sunt demonstrata, manifestum est, ubi ostendimus, quamvis aequationem paris gradus, cuius terminus absolutus sit numerus negativus, habere semper duas radices reales.

312. Ex his principiis quoque aequationes, quae constant quatuor terminis, diiudicari poterunt, dummodo aequationis

tionis differentialis radices commode exhiberi queant, quod evenit, si exponentes ipsius $x$ vel in tribus anterioribus, vel in tribus posterioribus terminis sint in arithmetica progressione. Cum autem haec diiudicatio in genere suscepta ad plures perducatur casus, eam in nonnullis exemplis absolvamus.

## E X E M P L U M I.

*Sit proposita haec aequatio* $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Facto $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, erit $\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3xx$, quo valore nihilo aequali posito fiet primo $xx = 0$, qui duplex valor pro nullo reputandus. Tum vero erit $7x^4 = 10x^2 - 3$, unde fit $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$; & quatuor valores pro $x$ emergent, qui secundum magnitudinem ordinati sequentes pro $z$ praebebunt valores:

| | |
|---|---|
| $\alpha = 1$ | $\mathfrak{A} = -a.$ |
| $\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}}$ | $\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$ |
| $\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ | $\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$ |
| $\delta = -1$ | $\mathfrak{D} = -a.$ |

Si ergo sit $a$ numerus affirmativus, erit vel $a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, vel $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, priori casu ob $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, omnes negativas, aequatio proposita unicam habebit radicem realem $x > 1$. Posteriori casu si $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$ aequatio tres habebit radices reales, primam $> 1$, secundam contentam inter limites $1$ & $\sqrt{\frac{3}{7}}$, & tertiam intra limites $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ & $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Sin $a$ sit quantitas negativa ponendo $x = -y$, aequatio perducetur ad formam priorem. Quo ergo aequatio propoſita tres habeat radices reales, neceſſe eſt ut ſit $a < 0,091634$ vel $a < \frac{1}{11}$.

## EXEMPLUM II.

*Sit propoſita haec aequatio*: $ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0$. Quia hic exponentes trium poſteriorum terminorum ſunt in arithmetica progreſſione, ponatur $x = \frac{1}{y}$ atque aequatio transmutabitur in hanc:

$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0$, ponatur ergo
$z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$, eritque differentiando
$\frac{dz}{dy} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0$, ex qua aequatione primo fit $y = 0$; tum vero erit $y^6 = \frac{50y^3 - 6}{96}$ & $y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$, ideoque vel $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ vel $y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$. His ergo tribus radicibus ſecundum magnitudinem diſpoſitis, reſpondentes ipſius $z$ valores ita ſe habebunt:

$$\begin{array}{ll|l}
\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} & & \mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a \\
\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}} & & \mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a \\
\gamma = 0 & & \mathfrak{C} = -a.
\end{array}$$

Quodſi ergo fuerit $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, aequatio propoſita duas habebit radices reales, alteram $> \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, alteram $< 0$: at praeter has inſuper habebit duas radices reales, ſi ſimul fuerit $\mathfrak{B}$ quantitas affirmativa, hoc eſt, ſi fuerit $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Quamobrem quobrem aequatio propoſita quatuor habebit radices reales, ſi quantitas $a$ contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ & $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; qui limites proxime ſunt: 0, 48075 & 0, 50674. Poſito ergo $a=\frac{1}{2}$, haec aequatio $x^8-6x^6+20x^3-24=0$ quatuor habet radices reales intra limites $\infty$; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$; 0; $-\infty$; ergo tres erunt affirmativae & una negativa.