CAPUT XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM MULTIFORMIUM PLURESQUE VARIABILES COMPLECTENTIUM.

273.

SI y fuerit functio multiformis ipsius x, ita ut pro unoquoque valore ipsius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x plures illi ipsius y valores ita inter se connectentur, ut plures series valorum successivorum repraesentent. Si enim y tanquam applicatam lineae curvae consideremus, x existente abscissa, quot y habuerit valores reales diversos, totidem diversi eiusdem curvae rami eidem abscisae x respondebunt, atque hinc illi ipsius y valores successivi, qui eundem ramum constituunt, cohaerere censendi sunt; valores autem ad diversos ramos relati erunt inter se disiuncti. Tot igitur series valorum cohaerentium ipsius y habebimus, quot diversos valores reales pro quovis ipsius x valore receperit; atque in qualibet serie valores ipsius y, dum x crescens assumitur, vel crescent vel decrescent, vel postquam creverint iterum decrescent, vel vice versa. Ex quo perspicuum est, in unaquaque valorum cohaerentium serie aeque dari maxima minimave, atque in functionibus uniformibus.

274. Ad haec maxima minimave determinanda eadem quoque methodus valebit, quam capite praecedente pro functionibus uniformibus tradidimus. Cum enim, si variabilis x incremento ω augeatur, functio y perpetuo recipiat hanc formam $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} +$ &c. necesse est ut casu maximi minimive terminus $\frac{\omega dy}{dx}$ evanescat, fiatque $\frac{dy}{dx} = 0$.

Radi-

Radices ergo huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipſius x valores indicabunt, quibus in ſingulis valorum ipſius y cohaerentium ſeriebus, maxima minimave reſpondeant. Neque vero ambiguum erit, in quanam valorum cohaerentium ſerie detur maximum minimumve. Cum enim in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambae inſint variabiles x & y, valores ipſius x definiri nequeunt, niſi ope aequationis, qua relatio functionis y ab x continetur, variabilis y eliminetur; antequam autem hoc fit, pervenitur ad aequationem, qua valor ipſius y per functionem rationalem ſeu uniformem ipſius x exprimitur. Hinc inventis valoribus ipſius x, cuique reſpondens valor ipſius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in ſerie valorum ſucceſſivorum cohaerentium, ad quam pertinet.

275. Iudicium autem, utrum iſti valores ipſius y ſint maximi an minimi inſtituetur eodem modo, quem ante indicavimus. Scilicet quaeratur valor ipſius $\frac{ddy}{dx^2}$ finitis terminis expreſſus, in eoque loco x ſubſtituatur unuſquiſque ipſius x valor inventus ſucceſſive, ſimul autem pro y ponatur valor, qui ipſi pro quolibet ipſius x valore convenit; quo facto diſpiciatur, utrum expreſſio $\frac{ddy}{dx^2}$ adeptura ſit valorem affirmativum an negativum, priorique caſu minimum, poſteriori vero maximum indicabitur. Quodſi vero & $\frac{ddy}{dx^2}$ evaneſcat, tum procedendum erit ad formulam $\frac{d^3y}{dx^3}$, quae ſi eodem caſu non evaneſcat, neque maximum habebitur neque minimum: ſin autem quoque $\frac{d^3y}{dx^3}$ evaneſcat, iudicium formari

opor-

oportebit ex formula $\frac{d^4y}{dx^4}$ eodem modo, quo ratione formulae $\frac{ddy}{dx^2}$ praecipimus. Atque si quoque $\frac{d^4y}{dx^4}$ quopiam casu evanescat, ad differentiale quintum ipsius y erit progrediendum: perpetuo autem quousque progredi necesse fuerit, iudicia ex differentialibus ordinum imparium similia sunt illi, quod de formula $\frac{d^3y}{dx^3}$ dedimus. His scilicet casibus in formulis $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. eousque erit pergendum, quoad perveniatur ad talem, quae proposito casu non evanescat; quae si fuerit differentialis ordinis imparis, neque maximum neque minimum indicabitur, sin autem fuerit ordinis paris, eius valor affirmativus minimum, negativus vero maximum inuet.

276. Ponamus functionem y determinari ex x per aequationem quamcunque: quae aequatio si differentietur, induet huiusmodi formam $Pdx + Qdy = 0$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $\frac{P}{Q} = 0$, ideoque vel $P = 0$ vel $Q = \infty$. Posterior quidem aequatio, si relatio inter x & y exprimatur per aequationem rationalem integram, locum habere nequit; quia vel x vel y vel utramque fieri oporteret infinitam. Quare iudicium relinquetur aequationi $P = 0$, cuius radices, seu valores ipsius x, quos adipiscitur, postquam ope aequationis propositae variabilis y penitus fuerit eliminata, indicabunt casus, quibus valores ipsius y fiunt maximi vel minimi. Ad iudicium vero, utrum prodeat maximum an minimum absolvendum, examinetur formula $\frac{ddy}{dx^2}$. Aequatio vero differentialis $Pdx + Qdy = 0$ denuo differentiata, si ponamus

dP

$dP = Rdx + Sdy$ & $dQ = Tdx + Vdy$, dabit (posito dx constante):

$$R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dx\,dy + V\,dy^2 + Q\,ddy = 0.$$

Cum autem iam sit $\frac{dy}{dx} = 0$, aequatione per dx^2 divisa fiet $R + \frac{Q\,ddy}{dx^2} = 0$, ideoque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Hinc in aequatione differentiali $P\,dx + Q\,dy = 0$, differentietur tantum quantitas P, ponendo y constans, prodibitque $R\,dx$, tum indagetur, valor fractionis $\frac{R}{Q}$, qui si fuerit affirmativus, maximum, sin negativus minimum indicabit.

277. Sit y functio biformis ipsius x, quae determinetur per hanc aequationem $yy + py + q = 0$, denotantibus p & q functiones quascunque ipsius x uniformes. Erit ergo differentiando $2y\,dy + p\,dy + y\,dp + dq = 0$, ideoque $P\,dx = y\,dp + dq$. Posito igitur $P = 0$ erit $y\,dp + dq = 0$ prodibitque $y = -\frac{dq}{dp}$, sicque y per functionem ipsius x uniformem exprimitur, ita ut, quicunque valor pro x fuerit inventus, ex eo & y valorem determinatum unicum acquirat. Eliminatio vero nunc ipsius y erit facilis; nam si in aequatione proposita $yy + py + q = 0$ loco y valor $-\frac{dq}{dp}$ substituatur, habebitur $dq^2 - p\,dp\,dq + q\,dp^2 = 0$, quae aequatio divisa per dx^2 & resoluta praebebit valores ipsius x omnes, quibus maxima vel minima respondent: quod clarius fiet sequentibus exemplis.

EXEMPLUM I.

Proposita aequatione $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$ *definire maxima vel minima functionis* y.

Differentiata aequatione habebimus:

$$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$$

unde fit $P = my + b + 2nx$, & $Q = 2y + mx$. Posito ergo $P = 0$ fiet $y = \frac{-b - 2nx}{m}$; qui valor in ipsa aequatione substitutus dat:

$$\begin{array}{l} \frac{4nn}{mm}xx + \frac{4nb}{mm}x + \frac{bb}{mm} \\ - 2nxx - bx + aa = 0 \\ + nxx + bx \end{array}$$

seu $xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn}$; unde fit

$$x = \frac{2nb \pm \sqrt{[mmnbb + mmn(mm-4n)aa]}}{mmn - 4nn}$$

seu $$x = \frac{2nb \pm m\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{n(mm-4n)}$$

& $$y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{mm - 4n}.$$

Tum posito solo x variabili fit $dP = 2ndx$, ideoque $R = 2n$. At est $Q = 2y + mx = \pm \frac{\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{n}$, unde $\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2nn}{\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}$, cuius numerator $2nn$ cum sit perpetuo affirmativus, si signum superius valeat, prodibit pro y valor maximus, sin inferius prodibit minimus. Ubi sequentia annotari debent.

I. Si fuerit $m = 0$, ex aequatione $P = 0$ statim sequitur $x = -\frac{b}{2n}$, ut nulla eliminatione opus sit. Huicque valori geminus ipsius y respondet ob $y = \pm \frac{1}{2n}\sqrt{(nbb - 4nnaa)}$ quorum alter affirmativus est maximus, alter negativus minimus.

II. Si sit $n = 0$, fit $y = -\frac{b}{m}$ & x in infinitum excrescit, atque y per spatium infinitum eundem valorem retinet, ita ut neque maximus sit neque minimus.

III. Si sit $mm = 4n$, erit $4nbx + bb + mmaa = 0$ seu $x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}$; fietque $y = \frac{-b - 2nx}{m} = \frac{-2b - mmx}{m} = -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$.

Huic ergo valori ipsius $x = \frac{-mmaa - bb}{mmb}$ alter ipsius y valor, qui respondet $\frac{mmaa - bb}{mb}$, erit maximus vel minimus. Quia autem, ut iste ipsius y valor prodeat, in expressione $y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{[nbb + n(mm - 4n)aa]}}{mm - 4n}$ signum inferius valere debet, erit valor ipsius y minimus.

EXEMPLUM II.

Proposita aequatione $yy - xxy + x - x^3 = 0$ *definire valores ipsius* y *maximos vel minimos.*

Differentiata aequatione prodit:
$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3xxdx = 0$. Fitque $P = 1 - 3xx - 2xy$ & $Q = 2y - xx$. Quare posito $P = 0$, erit $y = \frac{1 - 3xx}{2x}$; ideoque hoc valore substituto:

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

seu $1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0$. Cuius una radix est $x = -1$, cui respondet $y = 1$. At posito y constante fit $R = -6x - 2y$, ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$; quod casu $x = -1$ & $y = 1$ abit in -4, ita ut valor ipsius $y = 1$ sit

ſit maximus. Ipſi $x = -1$ autem geminus valor ipſius y reſpondet ex aequatione $yy - y = 0$: alter ergo eſt $y = 0$, qui neque maximus eſt neque minimus. Quodſi aequatio illa quinti gradus per $x + 1$ dividatur, prodit aequatio, cuius radices ſimpliciter exhiberi nequeunt.

EXEMPLUM III.

Sit propoſita haec aequatio: $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ *ex qua maximi minimive valores ipſius* y *requiruntur.*

Per differentiationem ergo prodibit haec aequatio:

$$2y\,dy + 2xx\,dy + 4xy\,dx + 4dx = 0$$

Factoque $\frac{dy}{dx} = 0$ erit $xy + 1 = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{x}$, quo valore ſubſtituto in ipſa aequatione propoſita oritur,

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

cuius radices ſunt $x = 1$; $x = 1$; & $x = -\frac{1}{2}$. Quia nunc eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy - 4}{2y + 2xx} = \frac{-2xy - 2}{y + xx}$, erit differentiando $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y + xx}$, poſito y conſtanti ob $dy = 0$ & facto $xy + 1 = 0$. Quare iſti valores ita ſe habebunt

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$	
1	-1	∞	
1	-1	∞	
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$	pro maximo.

Quoniam pro radicibus aequalibus fit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, utrum hoc caſu maximum an minimum prodeat non determinatur. Quia autem ſimul fit $y + xx = 0$; nequidem hoc caſu erit

 dy

$\frac{dy}{dx} = 0$; ob $P = 0$ & $Q = 0$ in fractione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$; quare cum primaria proprietas desit, neque maximum nec minimum habet locum. Indicatur autem hoc casu $x = 1$, ambos ipsius y valores inter se fieri aequales. Quam indolem infra fusius sumus expositurі, cum ad usum calculi differentialis in doctrina de lineis curvis perveniemus. Etiamsi enim haec materia & huc pertineat; tamen ne eam bis attingere opus sit, eam totam sequenti tractationi reservamus.

278. Datur vero insuper in functionibus multiformibus alia species maximorum ac minimorum; quae methodo hactenus tradita non invenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari potest. Sit enim y functio quaecunque biformis ipsius x, ita ut, quicunque valor ipsi x tribuatur, pro y oriantur bini valores vel ambo reales vel ambo imaginarii. Ponamus hos ipsius y valores fieri imaginarios, si ponatur $x > f$, reales autem esse, si statuatur $x < f$; atque posito $x = f$ ambo ipsius y valores in unum coalescent, qui sit $y = g$. Cum igitur si sumatur $x > f$; functio y nullum habeat valorem realem: si eveniat, ut posito $x < f$ ambo ipsius y valores fiant vel maiores quam g; vel minores quam g: priori casu valor $y = g$ erit minimus, posteriori maximus; quoniam illo casu minor est, quam ambo praecedentes, hoc vero maior. Neque hoc maximum minimumve methodo hactenus tradita reperietur, propterea quod hic non fit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sunt autem quoque haec maxima vel minima generis diversi, cum talia non sint ratione valorum antecedentium & consequentium in serie cohaerentium; sed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum.

279. Evenit hoc si aequatio proposita fuerit huiusmodi $y = p \pm (f - x)\sqrt{(f - x)q}$, existentibus p & q functionibus ipsius x per $f - x$ non divisibilibus; obtineatque q valo-

valorem affirmativum, si ponatur vel $x=f$ vel aliquanto maius minusve. Fiat $p=g$ posito $x=f$: & manifestum est, casu $x=f$ ambos ipsius y valores in unum $y=g$ coalescere; posito autem $x>f$ ambo valores ipsius y fient imaginarii. Si igitur ponamus x aliquanto minus quam f, puta $x=f-\omega$, functio p abibit in $g-\frac{\omega dp}{dx}+\frac{\omega^2 ddp}{2dx^2}-$ &c. & q in $q-\frac{\omega dq}{dx}+\frac{\omega^2 ddq}{2dx^2}-$ &c. unde hoc casu erit

$$y=g-\frac{\omega dp}{dx}+\frac{\omega^2 ddp}{2dx^2}-\&c.\pm\omega\sqrt{\omega\left(q-\frac{\omega dq}{dx}+\frac{\omega^2 ddq}{2dx^2}-\&c.\right)}.$$

Ponamus ω minimum, ut prae ω altiores eius potestates evanescant, eritque $y=g-\frac{\omega dp}{dx}\pm\omega\sqrt{\omega q}$; qui valores ambo ipsius y minores erunt quam g, si $\frac{dp}{dx}$ fuerit affirmativum, maiores autem, si negativum. Unde valor duplex ipsius $y=g$ illo casu erit maximus, hoc vero minimus.

280. Haec igitur maxima atque minima inde ortum suum habent, quod primo posito $x=f$ ambo ipsius y valores fiant aequales: posito autem $x>f$ imaginarii, at posito $x<f$ reales. Deinde quod posito $x=f-\omega$ alterum membrum irrationale praebeat altiores potestates ipsius ω, quam membrum rationale. Hoc ergo evenit quoque si fuerit $y=p\pm(f-x)^n\sqrt{(f-x)q}$, dummodo sit n numerus integer >0. Cum autem non solum radix quadrata sed etiam quaecunque alia radix potestatis paris eandem ambiguitatem signorum introducat; idem eveniet, si fuerit $y=p\pm(f-x)^{\frac{2n+1}{2m}}q$, dummodo sit $2n+1>2m$, erit ergo $(y-p)^{2m}=(f-x)^{2n+1}q^{2m}$ seu $(y-p)^{2m}=(f-x)^{2n+1}Q$. Quoties ergo functio y per huiusmodi aequationem exprimitur, ita ut sit $2n+1>2m$, toties posito $x=f$, valor ipsius y fiet maximus vel mini-

mus:

mus: prius quidem si fuerit $\frac{dp}{dx}$ quantitas affirmativa, posterius vero si sit $\frac{dp}{dx}$ quantitas negativa posito $x=f$. Sin autem fiat hoc casu $\frac{dp}{dx}=0$, tum erit $y=g+\frac{\omega^2 ddp}{2dx^2}\pm\omega^{\frac{2n+1}{2m}}q$. Nisi ergo sit $\frac{2n+1}{2m}>2$, neque maximum neque minimum locum habebit; at si $\frac{2n+1}{2m}>2$, tum $y=g$ erit maximum, si $\frac{ddp}{dx^2}$ habuerit valorem negativum, minimum vero, si affirmativum: sicque ulterius si quoque $\frac{ddp}{dx^2}$ evanescat, iudicium erit instituendum.

281. Si igitur y fuerit huiusmodi functio ipsius x, fieri potest, ut praeter maxima & minima, quae prior methodus exhibet, etiam maxima minimave huius alterius speciei adsint, quae modo hic exposito explorari poterunt. Id quod sequentibus exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Determinare maxima ac minima functionis y, *quae definitur hac aequatione:*

$$yy-2xy-2xx-1+3x+x^3=0.$$

Ad maxima minimave primae speciei investiganda differentietur aequatio, eritque

$$2ydy-2xdy-2ydx-4xdx+3dx+3xxdx=0,$$

positoque $\frac{dy}{dx}=0$, erit $y=\frac{3}{2}-2x+\frac{3}{2}xx$, qui valor in prima aequatione substitutus dat:

$9x^4-32x^3+42xx-24x+5=0$, quae resolvitur in

$$9xx-14x+5=0 \;\;\&\;\; xx-2x+1=0.$$

Poste-

posterior bis dat $x = 1$, fitque $y = 1$, unde hoc casu in fractione $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$ denominator quoque evanescit, sicque maximum minimumve primi generis non datur: prior vero aequatio $9xx - 14x + 5 = 0$ dabit $x = 1$ & $x = \frac{5}{9}$, quorum valorum ille eodem incommodo laborat, quo praecedentes. Posito autem $x = \frac{5}{9}$, fit $y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{+4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$ ob $dy = 0$ & numeratorem $= 0$. Erit ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}$, unde hic valor $x = \frac{5}{9}$ dat minimum primi generis. Deinde cum sit $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, erit $y = x \pm (1 - x)\sqrt{(1 - x)}$; ideoque posito $x = 1$ prodit maximum secundae speciei: facto enim $x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, quorum uterque minor est quam unitas, siquidem ω sumatur minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire maxima ac minima functionis:

$$y = 2x - xx \pm (1 - x)^2 \sqrt{(1 - x)}.$$

Pro primi generis maximis & minimis differentietur aequatio eritque:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1 - x)\sqrt{(1 - x)}$$

quo valore posito $= 0$ prodit primo $x = 1$ & cum sit $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1 - x)}$, erit y hoc casu maximum primi generis, fitque $y = 1$. Aequatione vero $\frac{dy}{dx} = 0$ per

$1 - x$

$1 - x$ divisa erit $4 \mp 5\sqrt{(1-x)} = 0$ seu $16 = 25 - 25x$, unde fit $x = \frac{9}{25}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. Quare si signum superius valet, erit $y = \frac{2869}{3125}$ minimum; sin autem signum inferius valeat, erit $y = \frac{821}{3125}$, quod maximum videatur: at vero tantum signum superius locum habere potest, quoniam $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nequit esse $= 0$, nisi sit $\sqrt{(1-x)} = +\frac{4}{5}$. Primi ergo generis invenimus maximum casu $x = 1$ & $y = 1$, atque minimum casu $x = \frac{9}{25}$ & $y = \frac{2869}{3125}$. Ex genere vero altero maximum quoque prodit; si $x = 1$, quo casu fit $y = 1$. Nam posito $x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega\omega \pm \omega^2\sqrt{\omega}$ utroque casu < 1. Hic itaque, si $x = 1$ maxima duo primae & alterius speciei coalescunt, maximumque quasi mixtum constituunt.

282. Ex his exemplis non solum natura huius alterius speciei maximorum & minimorum elucet; sed etiam pro lubitu istiusmodi functiones formari possunt, quae maxima vel minima secundae speciei admittant. Quemadmodum autem, si proposita fuerit functio quaecunque, explorari possit, utrum eiusmodi maximis minimisve sit praedita nec ne, id in sequenti sectione ostendemus: propterea quod natura linearum curvarum hac investigatione maxime illustratur. Ceterum vero facile intelligitur, si fuerit y eiusmodi functio ipsius x, quae maximum minimumve secundae speciei recipiat, tum quoque vicissim x eiusmodi fore functionem ipsius y. Nam quia ex hac aequatione $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, facto $x = 1$, obtinet y valorem maximum secundae speciei; si variabiles y & x permutentur, haec aequatio $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ exhibet pro y quoque eiusmodi functionem ipsius x, quae habeat maxi-

maximum secundae speciei. Facto enim $x = 1$, fiet $(1-y)^2 = (1-y)^3$, hincque erit bis $y = 1$ & semel $y = 0$. Sin autem ponatur $x = 1 + \omega$, erit $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^3$; unde si statuamus $y = 1 + \phi$ erit $(\omega - \phi)^2 = (-\phi)^3 = -\phi^3$ ideoque ϕ debet esse negativum. Sit ergo $y = 1 - \phi$ erit $(\omega + \phi)^2 = \phi^3$, atque cum sumto ϕ minimo, ϕ^3 prae ϕ^2 evanescat, debebit necessario ω esse negativum: hinc valori $x = 1 + \omega$ nulli valores reales ipsius y respondent. At posito $x = 1 - \omega$, & $y = 1 - \phi$, ob $(\phi - \omega)^2 = \phi^3$, erit $\phi = \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, ideoque $y = 1 - \omega \mp \omega\sqrt{\omega}$, unde uterque valor ipsius y respondens ipsi $x = 1 - \omega$ minor est valore $y = 1$, qui respondet valori $x = 1$; eritque consequenter iste ipsius y valor maximus.

283. Hactenus tantum functiones biformes sumus contemplati, quarum maxima vel minima, quia ambo valores facile per resolutionem aequationis quadraticae exprimi possunt, ad examen revocari possunt. Sin autem functio y per aequationem altiorem exprimatur, methodus ante tradita, qua maxima minimaque primae speciei indagavimus, eodem successu adhiberi poterit. Inventionem vero maximorum ac minimorum secundae speciei sequenti sectioni reservamus. Functiones ergo triformes ac multiformes, quemadmodum tractari oporteat, aliquot exemplis ostendamus.

EXEMPLUM I.

Definiatur functio y, *cuius maxima vel minima quaeruntur, per hanc aequationem:*

$$y^3 + x^3 = 3axy.$$

Differentiata hac aequatione fit $3y^2dy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, ideoque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$. Maximum ergo vel minimum dabitur, si fuerit $ay = xx$, seu $y = \frac{xx}{a}$, qui valor in aequatione proposita substitutus dat.

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3 \quad \text{seu} \quad x^6 = 2a^3x^3;$$

 Erit

Erit ergo ter $x = 0$, quo casu quoque fit denominator $yy - ax = 0$, ob $y = \frac{xx}{a} = 0$. Utrum ergo hoc casu maximum minimumve prodeat, patebit si ipsi x valorem tribuamus minime ab 0 discrepantem. Sit ergo $x = \omega$, & $y = \varphi$, ob $\varphi^3 + \omega^3 = 3a\omega\varphi$, fiet vel $\varphi = \alpha\sqrt{\omega}$ vel $\varphi = \beta\omega^2$. Priori casu erit $\alpha^3\omega\sqrt{\omega} = 3\alpha a\omega\sqrt{\omega}$, ideoque $\alpha = \sqrt{3a}$. Hinc posito $x = \omega$ erit $y = \pm\sqrt{3a\omega}$. Unde etiamsi ω negative accipi nequeat, tamen binorum ipsius y valorum alter maior erit quam 0, alter minor; hincque $y = 0$ neque maximum erit neque minimum. Sin autem statuatur $\varphi = \beta\omega^2$ erit $\omega^3 = 3a\beta\omega^3$, ideoque $\beta = \frac{1}{3a}$ & $\varphi = \frac{\omega^2}{3a}$: Ergo hoc casu sive x capiatur $= +\omega$ sive $= -\omega$, valor ipsius $y = \varphi$ nihilo erit maior, ideoque hoc casu $y = 0$ erit minimum. Restat ergo tertius casus ex aequatione $x^3 = 2a^3$ examinandus, qui dat $x = a\sqrt[3]{2}$, & $y = a\sqrt[3]{4}$. Qui utrum sit maximus an minimus ex aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$ quaeratur differentiale secundum, quod ob $dy = 0$ & $ay - xx = 0$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$, cuius valor praesenti casu est $-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$, qui indicat valorem ipsius y esse maximum.

EXEMPLUM II.

Si functio y *definiatur per hanc aequationem:*

$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y,$$

invenire eius maximos minimosve valores.

Cum

Cum per differentiationem oriatur $4y^3 dy + 3ayydy - b^3 dy = b^3 dx - 3axxdx - 4x^3 dx$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$, ponique oportet: $b^3 = 3axx + 4x^3$. Quaestio ergo huc reducitur, ut functionis uniformis $b^3x - ax^3 - x^4$ maxima ac minima indagentur, quae simul erunt maxima seu minima functionis y. Sit $a = 2$ & $b = 3$ seu proponatur haec aequatio $y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$ & $4x^3 + 6xx - 27 = 0$, quae divisa per $2x - 3 = 0$ dat $2xx + 6x + 9 = 0$, cuius posterioris radices cum sint imaginariae, erit $x = \frac{3}{2}$ & $y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$, cuius singulae radices erunt vel maximae vel minimae. Cum autem sit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$, qui posito $x = \frac{3}{2}$, si fuerit affirmativus, indicabit minimum, contra vero maximum.

EXEMPLUM III.

Si fuerit $y^m + ax^n = by^p x^q$; *definire maxima & minima ipsius* y.

Per differentiationem fit $\frac{dy}{dx} = \frac{qby^p x^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1} x^q}$, quo posito $= 0$, erit primo $x = 0$, si quidem n & q fuerint unitate maiores; atque simul $y = 0$. Quo casu an detur maximum vel minimum, valores proximi sunt investigandi, quoniam quoque denominator fit $= 0$; quae investigatio ab exponentibus potissimum pendebit. Praeterea vero aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$

dabit

dabit $y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$, qui valor in proposita substitutus ponendo $\frac{na}{qb} = g$ dabit $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n$ seu $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq-np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$, unde fit $x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-np)}$ simulque valor ipsius y innotescit. Deinde dispiciendum est, utrum differentio-differentiale

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

obtineat valorem affirmativum an negativum, ut ex priori minimum, ex posteriori vero maximum pronuncietur.

EXEMPLUM IV.

Si fuerit $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, *maxima & minima functionis* y *assignare.*

Differentiatione instituta fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$, hinque oritur $y = x^3$, erit ergo $x^{12} = 3x^4 - 2$ seu $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, quae aequatio resolvitur in has $x^4 - 1 = 0$ & $x^8 + x^4 - 2 = 0$, posteriorque in $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. Hinc erit bis vel $x = +1$ vel $x = -1$; utroque vero casu & denominator fractionis $\frac{dy}{dx}$ evanescit. Ad investigandum ergo utrum his casibus maximum minimumve locum habeat, ponamus $x = 1 - \omega$ & $y = 1 - \varphi$; erit:

$$\begin{array}{llll} 1 - 4\varphi & + 1 - 4\omega & = 4 - 4\omega - 4\varphi - 2 \\ + 6\varphi^2 + & 6\omega^2 & \quad + 4\omega \\ - 4\varphi^3 - & 4\omega^3 & \\ + \varphi^4 + & \varphi^4 & \end{array}$$

ideoque $4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2 - 4\varphi^3 - 4\omega^3 + \varphi^4 + \omega^4$, & ob ω & φ minima $4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2$. Valor ergo ipsius φ erit imaginarius, sive ω capiatur affirmative sive negative. Seu si y & x

& x designent coordinatas curvae, ea casu $x = 1$ & $y = 1$ habebit punctum coniugatum. Neque ergo hic valor pro maximo neque pro minimo haberi potest, propterea quod antecedentes & consequentes, cum quibus comparari deberet, fiunt imaginarii.

284. Si aequatio, qua relatio inter x & y exprimitur, ita fuerit comparata, ut functio ipsius y aequetur functioni ipsius x, puta $Y = X$; ad maxima minimave invenienda poni debebit $dX = 0$: fiet ergo y maximum vel minimum iisdem casibus, quibus X fit maximum vel minimum. Simili modo si x tanquam functio ipsius y consideretur, fiet x maximum vel minimum si $dY = 0$ hoc est si Y fuerit maximum vel minimum. Neque tamen hinc sequitur y & x simul fieri maxima vel minima. Nam si fuerit $2ay - yy = 2bx - xx$, erit y maximum vel minimum, si fuerit $x = b$; eritque $y = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Contra vero x fit maximum vel minimum, si fuerit $y = a$, fitque $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, neque ergo fiet y maximum vel minimum, si $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, quo tamen casu x est maximum minimumve. Ceterum hoc casu, si y habeat valores maximos vel minimos, x hac indole prorsus carebit: namque y maximum minimumve fieri nequit, nisi sit $a > b$, quo casu maximum minimumve ipsius x fit imaginarium.

285. Tum vero etiam evenire potest, ut non omnes radices aequationis $dX = 0$ praebeant maximos minimosve valores pro y; si enim illa aequatio duas habuerit radices aequales, exinde neque maximum neque minimum consequitur; hocque idem evenit, si quotcunque radices numero pares fuerint inter se aequales. Sic si proponatur aequatio $b(y - a)^2 = (x - b)^3 + c^3$; quia sumtis differentialibus fit $2bdy(y - a) = 3dx(x - b)^2$, functio y neque maxima fiet neque minima posito $x = b$, propterea quod hic occurrunt duae radices aequales. Sin autem x tanquam functio ipsius y spectetur, ea fiet maxima vel minima, si statuatur $y = a$; eritque $x = b - c$ minimum. Quia denique in huiusmodi aequa-

quationibus $Y = X$ variabiles x & y inter se non permiscentur, si ipsi x tribuitur valor, qui sit radix aequationis $dX = 0$, omnes valores ipsius y, quotcunque fuerint reales, erunt maximi vel minimi; quod non evenit, si in aequatione ambae variabiles fuerint permixtae.

286. Quae praeterea supersunt de natura maximorum ac minimorum exponenda; ea in sequentem sectionem reservamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraesentari atque explicari possunt. Pergamus ergo ad functiones, quae ex pluribus variabilibus sunt compositae, atque investigemus valores, quos singulis variabilibus tribui oportet, ut ipsa functio vel maximum vel minimum valorem obtineat. Ac primo quidem patet, si variabiles non fuerint inter se permixtae, ita ut functio proposita sit huiusmodi $X + Y$, existente X functione ipsius x, & Y ipsius y tantum, tum functionem propositam $X + Y$ fore maximum, si simul X & Y maximum evadat: minimumque, si simul X & Y fiat minimum. Ad maximum ergo inveniendum inquirantur valores ipsius x, quibus X fiat maximum, similique modo valores ipsius y, quibus Y fit maximum: hique valores pro x & y inventi efficient functionem $X + Y$ maximam, quod similiter de minimo erit tenendum. Cavendum ergo est, ne duo valores ipsarum x & y diversae naturae combinentur, quorum ille reddat X maximum, hic vero Y minimum, aut contra. Hoc enim si fieret, functio $X + Y$ neque maximum foret neque minimum. At huiusmodi functio $X - Y$ fiet maxima, si X fuerit maximum simulque Y minimum; contra vero $X - Y$ fiet minimum, si X fuerit minimum & Y maximum. Sin autem utraque functio X & Y statueretur vel maxima vel minima, earum differentia $X - Y$ neque foret maxima, neque minima; quae omnia sunt ex natura maximorum ac minimorum ante exposita clara & perspicua.

287. Si ergo quaerantur maximi minimive valores functionis duarum variabilium; quaestio multo magis cautioni ob-

obnoxia est, quam si unica fuerit variabilis. Non solum enim pro utraque variabili casus, quibus maximum minimumve producitur, diligenter sunt distinguendi; sed etiam ex his bini eiusmodi sunt coniungendi, ut functio proposita fiat maximum vel minimum; id quod ex exemplis clarius patebit.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec duarum variabilium x *&* y *functio:*

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

& quaerantur valores pro y *&* x *substituendi, ut haec functio maximum vel minimum obtineat valorem.*

Quoniam haec expressio in duas huiusmodi partes $Y + X$ resolvitur, quarum illa est functio ipsius y, haec vero ipsius x tantum; casus quibus utraque fit maxima vel minima, investigentur. Cum igitur sit

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y, \text{ erit } \frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

qua expressione nihilo aequali posita, fiet per 4 divisa $y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$: cuius radices sunt $y = 2$, & $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Cum ergo sit $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$; casu $y = 2$, prodibit maximum. Pro reliquis binis radicibus $y = 2 \pm \sqrt{3}$, quae oriuntur ex aequatione $yy - 4y + 1 = 0$ fiet $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, unde utraque dat minimum. Erit autem his casibus ut sequitur.

$y = 2$	$Y = 8$ maximum
$y = 2 - \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum
$y = 2 + \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum

Simili modo cum sit $X = x^3 - 3xx - 3x$, erit $\frac{dX}{dx} = 3xx - 6x - 3$, unde oritur haec aequatio $xx = 2x + 1$ & $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Est vero $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm \sqrt{2}$. Ergo radix

dix $x = 1 + \sqrt{2}$ dat minimum, nempe $X = -5 - 4\sqrt{2}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$ dat maximum, nempe $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Quocirca formula propofita $X + Y = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ fiet maxima, fi ponatur $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, prodibitque $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Eadem autem formula $X + Y$ fiet minima, fi fumatur vel $y = 2 - \sqrt{3}$ vel $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, utroque cafu erit $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

EXEMPLUM II.

Si proponatur haec functio duarum variabilium:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

quae quibus cafibus fiat maxima vel minima inveftigetur.

Pofito ut in praecedente exemplo habuimus, $Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y$ & $X = x^3 - 3xx - 3x$; formula propofita erit $Y - X$; ideoque fiet maxima, fi Y fuerit maximum & X minimum. Cum igitur hos cafus iam ante eruerimus, patet $Y - X$ obtinere valorem maximum, fi ponatur $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$; fietque $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Minimus vero valor ipfius $Y - X$ evadet, fi Y fit minimum, & X maximum, quod evenit ponendo $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, fiet autem $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Ceterum in utroque exemplo patet hos valores, quos invenimus, neque omnium effe maximos neque minimos: nam fi utrinque poneretur verbi gratia $y = 100$ & $x = 0$, fine dubio maior prodiret valor eo, quem invenimus: fimilique modo ponendo $y = 0$ & vel $x = -100$ vel $x = +100$ minor prodiret valor, quam funt illi, quos pro cafu minimi invenimus. Probe ergo tenenda eft idea fupra expofita, quam de natura maximorum ac minimorum dedimus. Scilicet eum valorem vocari maximum, qui maior fit valoribus tam antecedentibus quam confequentibus contiguis proximis; minimum autem effe eum, qui his valoribus tam antecedentibus quam confequentibus fuerit minor. Sic in hoc exemplo eft valor ipfius $Y - X$, qui prodit ponendo $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$ maior eft eo, qui refultat fiat si ponatur $y = 2 \pm \omega$ & $x = 1 + \sqrt{2} \pm \varphi$ sumtis pro ω & φ quantitatibus satis exiguis.

288. *His exemplis expeditis facilior erit via ad solutionem generalem indagandam.* Denotet V functionem quamcunque duarum variabilium x & y, sintque pro x & y valores inveniendi, qui functioni V inducant maximum vel minimum valorem. Cum igitur ad hoc efficiendum utrique variabili x & y determinatus valor tribui debeat; ponamus alteram y iam habere eum valorem, qui requiritur ad functionem V vel maximam vel minimam reddendam: hocque posito tantum opus erit, ut pro altera x idoneus quoque valor investigetur, quod fiet, dum functio V differentiatur ponenda sola x variabili, differentialeque nihilo aequale statuitur. Simili modo si fingamus variabilem x iam eam habere valorem, qui aptus sit ad functionem V vel maximam vel minimam efficiendam, valor ipsius y reperietur differentiando V posita sola y variabili, hocque differentiale nihilo aequali ponendo. *Hinc si* differentiale functionis V fuerit $= Pdx + Qdy$, oportebit esse & $P = 0$ & $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus valores utriusque variabilis x & y erui poterunt.

289. Quoniam vero hoc pacto sine discrimine reperiuntur valores pro x & y, quibus functio V vel maxima vel minima redditur; casus, quibus vel maximum vel minimum oritur, probe a se invicem sunt distinguendi. Ut enim functio V fiat maxima, necesse est ut ambae variabiles ad hoc conspirent; namque si altera maximum exhiberet, altera minimum, ipsa functio neque maxima neque minima evaderet. Quocirca inventis ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ valoribus ipsarum x & y inquirendum est, utrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant; atque tum demum, cum compertum fuerit utriusque variabilis valorem hinc erutum pro maximo valere, affirmare poterimus functionem hoc casu maximum valorem induere. Quod idem de minimo erit tenendum, ita ut functio V minimum valorem

adipisci nequeat, nisi simul ambae variabiles x & y minimum producant. Hinc ergo omnes illi casus reiici debebunt, quibus altera variabilis maximum, altera vero minimum indicare deprehendetur. Interdum vero etiam evenit, ut alterius vel etiam utriusque variabilis valores ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ oriundi neque maximum neque minimum exhibeant, qui casus proinde pariter tanquam prorsus inepti erunt reiiciendi.

290. Utrum autem valores pro x & y reperti valeant pro maximo an minimo, de utroque seorsim simili modo investigabitur, quo supra, cum unica adesset variabilis, sumus usi. Ad iudicium scilicet de variabili x instituendum consideretur altera y tanquam constans, & cum sit $dV = Pdx$ seu $\frac{dV}{dx} = P$, differentietur P denuo posito y constante, ut prodeat $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$, ac dispiciatur, utrum valor ipsius $\frac{dP}{dx}$, postquam loco x & y valores ante inventi fuerint substituti, fiat affirmativus an negativus; priori enim casu indicabitur minimum posteriori vero maximum. Simili modo cum posito x constante sit $dV = Qdy$ seu $\frac{dV}{dy} = Q$, differentietur Q denuo posita sola y variabili, & examinetur valor $\frac{dQ}{dy}$, substitutis loco x & y valoribus, qui ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ sunt inventi; qui si fuerit affirmativus, declarabit minimum, contra vero maximum. Hinc ergo colligitur, si ex valoribus pro x & y inventis formulae $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ induant valores diversis signis affectos altera scilicet affirmativum, altera negativum, tum functionem V neque maximam neque minimam effici; sin autem utraque formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiat affirmativa, minimum resultabit: contraque, si utraque fiat negativa, maximum.

291.

291. Quodsi vero altera formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$, vel etiam utraque, si pro x & y valores inventi substituantur, evanescat, tum progrediendum erit ad differentialia sequentia $\frac{ddP}{dx^2}$ & $\frac{ddQ}{dy^2}$, quae nisi pariter evanescant, neque maximum neque minimum habebit locum; sin autem evanescant, iudicium ex formulis differentialibus sequentibus $\frac{d^3P}{dx^3}$ & $\frac{d^3Q}{dy^3}$ erit petendum, similique modo instituendum, quo pro formulis $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ est factum. Quo autem, quibus casibus hoc usu veniat, clarius exponamus, prodierit valor $x = \alpha$, qui si formulam $\frac{dP}{dx}$ reddat evanescentem, necesse est ut $\frac{dP}{dx}$ factorem habeat $x - \alpha$; qui factor si fuerit solitarius, neque simul alium sibi habeat aequalem socium, neque maximum neque minimum indicabitur, quod idem evenit si $\frac{dP}{dx}$ factorem habuerit $(x-\alpha)^3$, vel $(x-\alpha)^5$, &c. Sin autem factor fuerit $(x-\alpha)^2$, vel $(x-\alpha)^4$, &c. tum quidem maximum vel minimum indicabitur; at insuper videndum erit, utrum cum casu per y indicato consentiat.

292. Labor autem his casibus ad differentialia ulteriora progrediendi mirifice sublevari poterit: si enim ponamus, ut rem generalius complectamur, inventum esse $\alpha x + \beta = 0$, atque formulam $\frac{dP}{dx}$ factorem habere $(\alpha x + \beta)^2$, ita ut sit $\frac{dP}{dx} = (\alpha x + \beta)^2 T$, quia est $\alpha x + \beta = 0$, fiet $\frac{d^3P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$, hincque ob $2\alpha^2$ affirmativum, ex ipsa quantitate T iudicium absolvi poterit; quae si induet valorem affirmativum, pro minimo, contra vero pro maximo pronunciabit. Hocque idem

subsidium in maximorum minimorumque investigatione, si unica insit variabilis adhiberi poterit, ita ut nunquam opus sit ad altiora differentialia ascendere. Quin etiam nequidem ad differentialia secunda procedere opus erit: si enim ex aequatione $P = 0$, fiat $\alpha x + \beta = 0$, necesse est ut P factorem habeat $\alpha x + \beta$; sit $P = (\alpha x + \beta)T$, & cum sit $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \beta)\frac{dT}{dx}$, ob $\alpha x + \beta = 0$, erit $\frac{dP}{dx} = \alpha T$, hincque iam ipse alter factor T, prout valor ipsius αT fuerit vel affirmativus vel negativus, statim vel minimum vel maximum indicabit.

293. His igitur traditis praeceptis haud difficile erit, si functio quaecunque duas variabiles involvens fuerit proposita, casus investigare, quibus haec functio fiat vel maxima vel minima. Si quae insuper notanda fuerint, ea ipsa exemplorum evolutio suggeret, quamobrem aliquot exemplis regulas datas illustrari expediet.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista functio duarum variabilium $V = xx + xy + yy - ax - by$, *quae quibus casibus fiat vel maxima vel minima inquiratur.*

Cum sit $dV = 2xdx + ydx + xdy + 2ydy - adx - bdy$, si comparetur cum formula generali $dV = Pdx + Qdy$ erit $P = 2x + y - a$ & $Q = 2y + x - b$: unde formabuntur istae aequationes $2x + y - a = 0$ & $2y + x - b = 0$, quibus coniunctis eliminando y fiet $x - b = 4x - 2a$, ideoque $x = \frac{2a - b}{3}$, & $y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$. Cum igitur sit $\frac{dP}{dx} = 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 2$, utraque ostendit minimum; ex quo concludimus formulam $xx + xy + yy - ax - by$ fieri minimam, si

ponatur

ponatur $x = \frac{2a-b}{3}$ & $y = \frac{2b-a}{3}$, prodibitque hoc modo $V = \frac{-3aa+3ab-3bb}{9} = \frac{-aa+ab-bb}{3}$, qui cum sit unicus, omnium erit minimus. Unico ergo modo fieri potest $xx+xy+yy-ax-by = \frac{-aa+ab-bb}{3}$, & quia minor fieri nequit, erit haec aequatio $xx+xy+yy-ax-by = \frac{-aa+ab-bb}{3} - cc$ impossibilis.

EXEMPLUM II.

Si proponatur formula $V = x^3 + y^3 - 3axy$, *quaerantur casus, quibus V adipiscatur valorem maximum vel minimum.*

Ob $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$ erit $P = 3xx - 3ay$ & $Q = 3yy - 3ax$, unde fit $ay = xx$ & $ax = yy$. Cum ergo sit $yy = x^4 : aa = ax$ erit $x^4 - a^3x = 0$; ideoque vel $x = 0$ vel $x = a$. Priori casu fit $y = 0$, posteriori vero $y = a$. Quoniam ergo est $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$, & $\frac{dQ}{dy} = 6y$ atque $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$; priori ergo casu, quo $x = 0$ & $y = 0$, neque maximum neque minimum resultat. Posteriori vero casu quo & $x = a$ & $y = a$ minimum prodit, si quidem a fuerit quantitas affirmativa, fietque $V = -a^3$, qui autem valor tantum minor est proximis antecedentibus & consequentibus: nam sine dubio V multo minorem induere potest valorem, si utrique variabili x & y valores negativi tribuantur.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec functio $V = x^3 + ayy - bxy + cx$, *cuius valores maximi seu minimi inquirantur.*

Quia est $dV = 3xxdx + 2aydy - bydx - bxdy + cdx$ erit

P =

$P = 3xx - by + c$ & $Q = 2ay - bx$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis erit $y = \frac{bx}{2a}$, ideoque $3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0$ seu $xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$ unde fit $x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}$. Nisi ergo sit $b^4 - 48aac > 0$, neque maximum neque minimum habet locum. Ponamus ergo esse $b^4 - 48aac = bbff$, ut sit $c = \frac{bb(bb - ff)}{48aa}$; erit $x = \frac{bb \pm bf}{12a}$ & $y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}$. Quoniam porro est $\frac{dP}{dx} = 6x$ & $\frac{dQ}{dy} = 2a$, fiet $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2a}$. Nisi ergo $2a$ & $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ sint quantitates eiusdem signi, neque maximum neque minimum habet locum. At si sint ambae vel affirmativae vel ambae negativae, quod evenit, si earum productum $b(b \pm f)$ fuerit affirmativum; tum functio V evadet minimum, si a sit quantitas affirmativa, contra vero maximum, si a sit quantitas negativa. Hinc si fuerit $f = 0$ seu $c = \frac{b^4}{48aa}$, ob bb quantitatem affirmativam, functio V evadet minima si a sit quantitas positiva, ponaturque $x = \frac{bb}{12a}$ & $y = \frac{b^3}{24aa}$; contra vero si a sit negativum, istae substitutiones producent maximum. Si sit $f < b$, duobus casibus oritur vel maximum vel minimum: at si $f > b$, tum casus tantum $x = \frac{b(b + f)}{12a}$ & $y = \frac{bb(b + f)}{24aa}$ praebebit maximum minimumve prout a fuerit vel negativum vel affirmativum. Sit $a = 1$, $b = 3$ & $f = 1$, ut habeatur haec formula $V = x^3 + yy - 3xy + \frac{3}{2}x$ haec fiet minima ob a affirmativum, si ponatur vel $x = 1$ & $y = \frac{3}{2}$ vel $x = \frac{1}{2}$ & $y = \frac{3}{4}$. Prio-

ri

ri casu oritur $V = \frac{1}{4}$, posteriori vero $V = \frac{5}{16}$. Interim tamen patet loco x numeris negativis ponendis multo minores valores pro V oriri posse. Ita ergo intelligi debet valor ipsius $V = \frac{1}{4}$ minor esse, quam si ponatur $x = 2 + \omega$ & $y = 3 + \varphi$; dummodo sint ω & φ numeri parvi, sive affirmativi sive negativi; limes autem quem ω transgredi non debet est $-\frac{15}{4}$; nam si $\omega < -\frac{15}{4}$ fieri poterit ut V fiat minor quam $\frac{1}{4}$.

EXEMPLUM IV.

Invenire maxima vel minima huius functionis:

$$V = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy.$$

Sumto differentiali erit $P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx$ & $Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis, si a se invicem subtrahantur erit: $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$, quae cum sit divisibilis per $x - y$, erit primo $y = x$, atque $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$, quae dat $x = 0$ & $4xx = 3ax - 2cc$ seu $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$.

Si sumamus $x = 0$, erit quoque $y = 0$; & ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2ay + 2cc$, atque $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$, fiet functio V minima $= 0$. Sin statuamus $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, si quidem fuerit $9aa > 32cc$, ob $4xx = 3ax - 2cc$, erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ $= 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc = \frac{21aa - 32cc \pm 7a\sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, qui valor cum sit semper affirmativus ob $32cc < 9aa$, valor V hoc quoque casu fit minimus, eritque $V = \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$. Dividamus autem aequationem $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$ per $x - y$ fietque $4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0$. At ex aequatione $P = 0$, erit $yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$, quo valore in illa ſubſtituto fit

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8ccx + 2acc}{4ax - aa}.$$

Verum illa dat $y = -x \pm \sqrt{\frac{4x^3 + axx + 2ccx}{a}}$, unde efficitur:

$$16x^3 + 8axx + 4ccx + 2acc = (4x - a)\sqrt{(4ax^3 + aaxx + 2accx)};$$

quae ad rationalitatem perducta dat

$$\begin{array}{lllllll} 256x^6 + 192ax^5 & + 80aax^4 & + 4a^3x^3 & - a^4x^2 & - 2a^3ccx & + 4a^2c^4 & = 0 \\ + 128cc & + 96acc & + 48aacc & + 16ac^4 & & & \\ & & + 16c^4 & & & & \end{array}$$

cuius radices, ſi quas habet, reales indicabunt maxima vel minima functionis V, ſi quidem $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiant quantitates eodem ſigno affectae.

EXEMPLUM V.

Invenire maxima & minima huius expreſſionis:

$$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = V.$$

Facta differentiatione erit:

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$
$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0$$

quae aequationes invicem vel ſubtractae vel additae dant:

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$
$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

quae diviſae per $x - y$ & $x + y$, & denuo vel additae vel ſubtractae dant:

$$4xx + 4yy + 2aa = 0 \;\;\&\;\; 4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Ex quarum poſteriori fit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, prior autem reales valores non admittit. Tres igitur habemus caſus:

I. Sit $y = x$, eritque $4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$, unde fit vel $x = 0$ vel $2(2 + m)xx + (2 + n)aa = 0$. Sit $x = 0$, erit quoque $y = 0$, atque ob $\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa$

&

& $\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$, hoc casu fiet $V = 0$ minimum, si quidem coefficiens aa fuerit affirmativus. Alter casus dat $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, quae realis esse nequit nisi sit $\frac{n+2}{m+2}$ numerus negativus. Sit $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$, seu $n = -2kkm - 4kk - 2$, erit $x = \pm ka$ & $y = \pm ka$. At $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$, quae cum sint aequales, erit V vel minimum vel maximum, prout istae quantitates fuerint vel affirmativae vel negativae.

II. Sit $y = -x$, eritque $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$ ergo vel $x = 0$ vel $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Prior radix $x = 0$ recidit in praecedentem. Posterior vero erit realis si $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ fuerit quantitas affirmativa: & cum fiat $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ prodibit vel maximum vel minimum.

III. Sit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, erit $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = 0$ seu $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = 0$, cuius aequationis nulla radix est realis, nisi sit aa quantitas negativa.

EXEMPLUM VI.

Proposita sit haec functio determinata:

$$V = x^4 + y^4 - xx + xy - yy,$$

cuius valores maximi vel minimi investigentur.

Cum hinc fiat $P = 4x^3 - 2x + y = 0$ & $Q = 4y^3 - 2y + x = 0$ erit ex priori $y = 2x - 4x^3$, qui in altera substitutus dat $256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$. Cuius una radix est $x=0$, unde fit quoque $y=0$. Ergo hoc casu ob $\frac{dP}{dx}=12xx-2$ & $\frac{dQ}{dy}=12yy-2$ prodit maximum $V=0$. Divisa autem aequatione inventa per x erit:

$$256x^8-384x^6+192x^4-40xx+3=0,$$

quae factorem habet $4xx-1$, unde fit $4xx=1$ & $x=\pm\frac{1}{2}$; atque $y=\pm\frac{1}{2}$, tum vero erit $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=1$, utroque ergo casu oritur minimum $V=-\frac{1}{8}$.

Dividatur illa aequatio per $4xx-1$, atque obtinebitur:

$$64x^6-80x^4+28xx-3=0,$$

quae denuo bis continet $4xx-1=0$; ita ut praecedens casus oriatur. Praeterea vero inde fit $4xx-3=0$, & $x=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$; cui respondet $y=\frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Erit igitur quoque $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=7$, ideoque fiet V minimum $=-\frac{9}{8}$; qui est valor omnium minimus, quos quidem functio V recipere potest: & hanc ob rem ista aequatio $V=-\frac{9}{8}-cc$ semper est impossibilis. Hinc autem patet via determinandi maxima & minima functionum, quae tres pluresve variabiles involvunt.