CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS

281.

In hoc Capite imprimis est propositum earum functionum ipsius x, quae non explicite, sed implicite per aequationem, qua relatio functionis istius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriantur, ostendemus. Cum enim in calculo integrali summum negotium consistat in integratione aequationum differentialium, seu in inventione eiusmodi aequationum finitarum, qua cum differentialibus conveniant; necesse est, ut hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine sequuntur, diligentius scrutemur, sicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Ut igitur hoc negotium absolvamus, sit y functio eiusmodi ipsius x, quae per hanc aequationem quadratam $yy+Py+Q=0$ definiatur. Cum ergo haec expressio $yy+Py+Q$ sit $=0$, quicquid x significet, nihilo quoque aequalis erit, si loco x scribatur $x+dx$, quo casu y abit in $y+dy$. Facta autem hac substitutione, si a quantitate resultante subtrahatur prior $yy+Py+Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $=0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $=0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit

$$yy+Py+Q=0, \quad \text{erit quoque}$$
$$2ydy+Pdy+ydP+dQ=0$$

quia

quia vero P & Q sunt functiones ipsius x, earum differentialia huiusmodi formam hebebunt,

$$dP = pdx, \ \& \ dQ = qdx;$$

unde fiet

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$$

ex qua oritur $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-yp - q}{2y + P}$.

283. Quemadmodum ergo aequatio finita $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x, ita aequatio differentialis exprimit relationem seu rationem, quam dy tenet ad dx. Quoniam vero est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-yp - q}{2y + P}$, haec ratio $dy:dx$ cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita: neque vero res aliter se habere potest; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, uterque suum peculiare habebit differentiale, & utriusque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expressione $\dfrac{-yp - q}{2y + P}$ loco y substituatur. Simili modo functio y per aequationem cubicam definiatur, valor functionis $\dfrac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici scilicet ipsius y valori respondens. Si in aequatione proposita finita y quatuor pluresve habeat dimensiones, necesse est ut $\dfrac{dy}{dx}$ totidem significationes sortiatur.

284. Interim tamen ipsa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita scilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimensiones assurget, quot ante habuerat y, sicque ista aequatio omnes diversas rationes ipsius dy ad dx simul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$, cuius differentialis est:

2y-

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = \frac{-Pdy - dQ}{2dy + dP}$ qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\frac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP - 4Q)}}$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita: $y = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(PP - 4Q)}$.

285. Invento valore ipsius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipsius ddy, porroque ipsorum d^3y, d^4y, &c. qui autem, cum determinati non sint, nisi aliquod differentiale primum constans statuatur; ponamus commoditatis ergo dx constans, atque ad hoc ostendendum sumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, unde per differentiationem oritur $3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, sumantur denuo differentialia posito dx constante atque invenietur

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

substituatur loco dy eius valor modo inventus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$, atque divisione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

seu $$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

$$= -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum

cum ex aequatione finita fit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae hi valores in innumeras formas transmutari possunt.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis potest variari, dum cum aequatione finita permiscetur. Sic cum exemplo praecedente inventa esset aequatio differentialis

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

si ea multiplicetur per y, orietur

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx,$$

in qua si loco y^3 substituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio nova

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

quae denuo per y multiplicata, postquam loco y^3 eius valor fuerit substitutus, praebebit

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Generaliter autem si P, Q, R denotent functiones quascunque ipsarum x & y, si aequatio differentialis multiplicetur per P, erit

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum sit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes invicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex proposita aequatione finita natam

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy +$$
$$Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

287. Possunt vero etiam per ipsam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequatione finita inveniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut dividitur. Sic si P fuerit functio quaecunque ipsarum x & y, ut sit $dP = pdx + qdy$, si aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diversas induet, prouti pro P aliae atque aliae

fun-

functiones assumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, si ad hanc aequationem differentialem inventam addatur ipsa aequatio finita per huiusmodi formulam $Qdx + Rdy$ multiplicata, ubi pro Q & R functiones quascunque ipsarum x & y assumere licet. Quanquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx, quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipsius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potissimum explicabitur.

288. Non solum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci possunt, sed etiam plures imo infinitae exhiberi possunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy = ax + ab$ & $yy = ax$ omnino sunt diversae, dum in priori quaecunque quantitas constans in locum ipsius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatae eandem dant aequationem differentialem $2ydy = adx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy = ax$ contentae, quicunque valor ipsi a tribuatur, in una aequatione differentiali, in qua a non insit, comprehendi possunt. Dividatur enim aequatio illa per x ut sit $\frac{yy}{x} = a$, haecque differentiata dabit $2xdy - ydx = 0$. Possunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perduci, uti fit in istis aequationibus

$$yy - ax = 0 \quad \& \quad yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}},$$

si enim utraque per $e^{\frac{x}{a}}$ dividatur, ut habeantur istae aequationes: $e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0$ & $e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb$, ex utriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diverſitatis in hoc conſiſtit, quod quantitatis conſtantis differentiale ſit $= 0$. Quodſi ergo aequatio finita ad eiuſmodi formam reducatur, ut quantitas quaepiam conſtans ſola adſit, neque per variabiles vel multiplicetur vel dividatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas conſtans prorſus non adſit. Hoc modo quaelibet quantitas conſtans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli poteſt. Sic ſi propoſita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; ſi ea per xy dividatur ut habeatur $\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam conſtans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates conſtantes, quae in aequatione finita inſunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesve repetitam; ſicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis conſtantibus prorſus carentes. Sit propoſita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem conſtantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tolletur prima differentiatione, unde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae ſumto dx conſtante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0,$$

quae etſi nullam conſtantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m, n & aa tribuantur, in ſe aeque comprehendit.

291. Non ſolum vero quantitates conſtantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli poſſunt, ſed etiam altera variabilis, eius ſcilicet, cuius differentiale conſtans aſſumitur, per differentiationem eliminari

po-

poterit. Ex aequatione enim inter x & y propoſita quaeratur valor x, ut ſit $x = Y$ denotante Y functionem ipſius y; eritque $dx = dY$, & ſumto dx conſtante, fiet differentiando $o = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $o = d^3Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $o = d^4Y$. Quanquam autem in his aequationibus una tantum variabilis ineſſe videtur, quae propterea variabilis eſſe ceſſaret, dum unica variabilis in nulla aequatione adeſſe poteſt; tamen quia differentiale dx conſtans eſt aſſumtum, eiuſque ratio in aequatione haberi debet, revera in aequationem ingredi cenſendum eſt. Hinc mirandum non eſt, ſi ſaepius aequationes differentiales ſecundi altiorisve gradus occurrant, in quibus unica tantum variabilis ineſſe videatur.

292. Praecipue autem notandum eſt, per differentiationem quantitates irrationales ac tranſcendentes ex aequatione tolli poſſe. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitas irrationalitas eliminari poteſt, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc ſaepenumero commodius ſine iſta reductione fieri poteſt, dum per comparationem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, ſi una tantum inſit, eliminari poteſt. Sin autem duae pluresve partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, ſicque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad ſingulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli poterunt. Uti ſi fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, poſt differentiationem habebitur

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

quae per finitam diviſa dat $\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa - xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam

 or-

ortam esse posse ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes involvente.

293. Ut autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminentur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum sint algebraica, negotium sine difficultate absolvetur. Sit enim $y = xlx$: erit $\frac{y}{x} = lx$, unde differentiando fit $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$, ideoque $xdy - ydx = xdx$. Si bini insint logarithmi duplici differentiatione erit opus: sit enim $ylx = xly$; erit $\frac{ylx}{x} = ly$, & differentiando, $\frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y}$, ex qua concluditur fore $lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}$. Haec aequatio iam iterum differentietur posito dx constante, atque prodibit

$$\frac{dx}{x} = \frac{xxddy + 2xdxdy - 2ydxdy}{yxdy - yydx}$$

$$+ \frac{(yydx - xxdy)(yxddy + xdy^2 - ydxdy)}{(yxdy - yydx)^2} \text{ seu } \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3}{(yxdy - yydx)^2}$$

quae reducta dabit:

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$
$$+ 3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0$$

seu $$yyxx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx)$$
$$- 2yyxxdxdy(dx + dy) = x^4dy^3 + y^4dx^3.$$

194. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi proposita fuerit $P = e^Q$, ubi P & Q functio-

ctiones quascunque ipsarum x & y denotent; ea aequatio transmutari poterit in hanc logarithmicam $lP = Q$; cuius differentialis est $\frac{dP}{P} = dQ$ seu $dP = PdQ$. Neque obstat, si quantitates exponentiales magis fuerint complicatae, tum enim si una differentiatio non sufficit, duabus pluribusve negotium absolvetur.

I. Sit $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ unde fit

$$e^{2x} = \frac{y + 1}{y - 1} \quad \& \quad 2x = l\frac{y + 1}{y - 1},$$

cuius differentiale est $dx = -\frac{dy}{yy - 1} = \frac{dy}{1 - yy}$.

II. Sit $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentiationem $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, seu $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, atque $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$. Ergo $2x = l\frac{dy + dx}{dx - dy}$.

Sumto ergo dx constante erit

$$dx = \frac{dxddy}{dx^2 - dy^2} \quad \text{seu} \quad dx^2 = ddy + dy^2.$$

295. Simili modo quantitates transcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, uti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y = aA\,\text{fin}\,\frac{x}{a}$; erit $dy = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

II. Sit $y = a\,\text{cof}\,\frac{y}{x}$; erit $\frac{y}{a} = \text{cof}\,\frac{y}{x}$, & ..

$\frac{dy}{a} = -\frac{xdy + ydx}{xx} \text{ſin} \frac{y}{x}$. At cum ſit

$$\text{coſ} \frac{y}{x} = \frac{y}{a}; \text{ erit ſin } \frac{y}{x} = \frac{\surd (aa - yy)}{a};$$

quo valore ſubſtituto habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy) \surd (aa - yy)}{axx}$$

ſeu $xxdy = (ydx - xdy) \surd (aa - yy)$

III. Sit $y = m \text{ ſin } x + n \text{ coſ } x$, erit poſt differentiationem primam $dy = mdx \text{ coſ } x - ndx \text{ ſin } x$: quae denuo differentiata poſito dx conſtante dabit

$$ddy = - mdx^2 \text{ ſin } x - ndx^2 \text{ coſ } x,$$

haec autem per primam diviſa dat

$$\frac{ddy}{y} = - dx^2 \quad \text{ſeu} \quad ddy + ydx^2 = 0,$$

ex qua non ſolum ſinus & coſinus, ſed etiam conſtantes m & n evanuerunt.

IV. Sit $y = \text{ſin } lx$; erit A ſin $y = lx$, unde per differentiationem fit $\frac{dy}{\surd(1 - yy)} = \frac{dx}{x}$; quae ſumtis quadratis dat $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, haecque poſito dx conſtante ulterius differentiata praebet,

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = - 2ydx^2 dy$$

ſeu $xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0$.

V. Sit $y = ae^{mx} \text{ ſin } nx$, erit differentiando

$$dy = mae^{mx} dx \text{ ſin } nx + nae^{mx} dx \text{ coſ } nx,$$

quae per propoſitam diviſa dat

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx \text{ coſ } nx}{\text{ſin } nx} = mdx + ndx \cdot \text{cot } nx.$$

Erit ergo $\text{A cot} \left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n} \right) = nx$. Quae aequatio poſito dx conſtante differentiata dat:

ndx

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{mmyydx^2 + nnyydx^2 - 2mydxdy}$$

seu $(mm + nn)yydx^2 - 2mydxdy = dy^2 - yddy$.
Perspicuum igitur est, etiamsi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes insint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuisse, quae a quantitatibus transcendentibus utcunque sit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales sive primi sive altioris gradus, quae duas variabiles x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variabiles exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variabiles x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y, qua y fit functio quaedam ipsius x. Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, ut si ea ubique loco y, eiusque differentiale loco dy, atque eius altiora differentialia loco ddy, d^3y, &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functionis investigatione versatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, ut proposita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipsius x, cui altera variabilis y est aequalis, definiatur; seu quod eodem redit, ut aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

ad quam supra §. 288 pervenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae simul hac aequatione finita $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc sit

$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$, patet $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$

eam

eam esse functionem ipsius x, cui variabilis y vi propositae aequationis differentialis sit aequalis. Namque si in aequatione loco yy, hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco $2ydy$ eius differentiale $adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$ substituamus, orietur aequatio identica:

$$adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - adx - xdx - \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + xdx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variabiles x & y exhibere, quae autem sine subsidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x, quae ipsi y vi cuiuscunque aequationis differentialis sive primi sive altioris gradus, conveniat; sitque

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \&c.$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$, &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per divisionem evanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r, &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r, &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio revera tantum inter duas variabiles x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quandam relationem inter variabiles x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusvis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perveniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset perventum.

299. Hoc igitur modo aequatio quaevis differentialis ita ad formam finitam reduci potest, ut in ea nonnisi quantitates

tates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parva prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x, si ponatur

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differentialia secunda & altiora per potestates ipsius dx exprimentur, quae deinceps per divisionem penitus tollentur. Ut si proponeretur haec aequatio

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur constans; facto

$$dy = pdx,\ dp = qdx,\ \&\ dq = rdx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

postquam scilicet tota aequatio per dx^3 est divisa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque sint ordinis, his substitutionibus

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque si aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita ut differentialia prima eam tantum ingrediantur, per istam reductionem praeter variabiles y & x insuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit secundi ordinis continens differentialia secunda, praeterea quantitas q; ac, si fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur insuper quantitas r, sicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorsus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis constantis penitus cessat; neque amplius, etiamsi insint quantitates q, r, ex differentialibus secundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale constans sit assumtum. Perinde enim est, utrum in evolutione aliquod differentiale pro lubitu constans statuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis secundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum

constans esse assumtum perhibetur, hoc modo statim explorari poterit, utrum ea determinatam relationem inter variabiles x & y contineat, nec ne. Quia enim nullum differentiale constans assumitur, in arbitrio nostro relinquitur, quodnam differentiale constans ponere velimus; hincque tantum erit dispiciendum, utrum diversis differentialibus constantibus positis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quodsi non eveniat, certum est signum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in solutione nullius problematis locum habere posse. Tutissimus autem modus simulque facillimus hoc explorandi erit is ipse, quem supra in simili negotio pro expressionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant significatus, dignoscendis tradidimus.

302. Proposita ergo huiusmodi aequatione differentiali secundi altiorisve ordinis, in qua nullum differentiale constans sit positum, statuatur differentiale dx constans; deinde haec aequatio, uti supra de expressionibus differentialibus ostendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans supponat, statuendo scilicet

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \quad \text{loco} \quad ddy\,;$$

$$\&\quad d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \quad \text{loco} \quad d^3y,$$

&c.

Quo facto dispiciatur, utrum aequatio hoc modo resultans conveniat cum aequatione proposita; quod si eveniat, aequatio proposita determinatam relationem inter x & y complectetur; sin autem secus accidat, aequatio erit vaga, neque definitam rationem inter variabiles x & y exprimet: quemadmodum hoc iam ante fusius est demonstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequatio proposita, quae nullo differentiali constante posito reperta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx conſtans, atque ea tranſibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum conſideratio differentialis conſtantis exuatur, modo ante praeſcripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a propoſita tantum ratione primi termini diſcrepat, videndum eſt, utrum ſit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod ſi deprehendatur, aequatio propoſita fixam relationem inter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo integrali tradendas reperietur, quodcunque differentiale primum conſtans accipiatur. At, ſi fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio propoſita erit impoſſibilis.

304. Niſi igitur haec propoſita aequatio:

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

ſit abſurda, neceſſe eſt ut ſit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo evenire poteſt: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ ſeu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipſa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione propoſita eſt orta: quo poſteriore caſu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum propoſita, eandemque relationem inter x & y continebit, ſicque ſine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim ſit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione propoſita ſubtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

 Cum

Cum autem sit $dy = -\frac{Pdx}{Q}$, differentialia prorsus extingui poterunt, nasceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in solutione problematis nullo differentiali constante assumto perventum esse ad hanc aequationem:

$$x^3 ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit ergo, cum aequationem absurdum non continere constet: $x^3 dx + xxydy = 0$, seu $xdx + ydy = 0$:

cuius differentiale erit

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a proposita subtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0, \quad \text{seu}$$

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem sit

$$xdx + ydy = 0; \quad \text{erit} \quad 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \quad \text{seu} \quad yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, siquidem ea consentit cum differentiali primum inventa $xdx + ydy = 0$. Qui consensus, nisi se manifestasset, aequatio proposita pro impossibili esset habenda; cum autem hoc casu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ sine calculo integrali elicere licuit.

306. Ut vero etiam exemplum aequationis impossibilis afferamus, proposita sit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale constans sit assumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy - 2xdxdy = 0,$$

quae propositae aequalis posita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

Cum

Cum vero ſit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differentialibus obtinebitur: $y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}$ ſeu

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae utrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ conſentiat, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{ſeu } \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax + 4xy - 2xx},$$

at ex illa eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$, foretque ergo

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{ſeu } axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y}$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inventa eſt

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab iſta ſubtracta relinquit:

$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$, quae reſolvitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$ conſtare poteſt, at vero aequationi finitae primum inventae adverſatur, niſi ſtatuatur $a = 0$, vel niſi utraque variabilis x & y conſtans ſtatuatur, quo quidem caſu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus ſatisfit, aequatio propoſita ſubſiſtere nequit.

307. Conſideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variabiles x, y, & z involventes, quae erunt vel primi, vel ſecundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam ſcrutandam no-

notari oportet, aequationem finitam tres variabiles complectentem determinare relationem, quam unaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio sit z ipsarum x & y. Quemadmodum igitur aequatio huiusmodi finita resolvitur, si reperiatur qualis functio ipsarum x & y loco z substitui debeat, ut aequationi satisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variabiles complectens determinabit, qualis functio una sit reliquarum; isque huiusmodi aequationem resolvisse censendus est, qui indicaverit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z substituta aequationi satisfaciat, seu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis resolvitur, si vel functio ipsarum x & y valorem ipsius z exhibens definiatur, vel aequatio finita assignetur, qua idem debitus ipsius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variabiles complectens, semper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non semper evenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiusmodi aequationes, quibus plane nullo modo satisfieri poterit, quaecunque functio ipsarum x & y in locum ipsius z substituatur. Uti si proposita fuerit haec aequatio $zdy = ydx$ facile patet, nullam prorsus dari functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta reddat $zdy = ydx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguentur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipsarum x & z, quae loco y substituta eidem aequationi satisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipsarum x & z, in eius differentiali dy inest dz, quod quia in aequatione non inest, destrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x, y, & z dari potest, quae aequationi differentiali $zdy = ydx$ conveniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variabiles continentes distribui oportet in imaginarias & reales. Huiusmodi autem aequatio erit imaginaria seu absurda, cui per nullam

aequa-

aequationem finitam satisfieri potest, cuiusmodi erat illa $zdy = ydx$, quam modo consideravimus. Aequatio autem erit realis, cui aequivalens aequatio finita exhiberi potest, quod evenit, si una variabilis aequalis sit certae cuipiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \quad \text{sitque} \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imaginarias & reales diligentissime est observandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integralem, hoc est aequationem finitam satisfacientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z, tantum inesse differentialia dx & dy, differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tolentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, uti fit in hac aequatione:

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem investigatur, quibus casibus hoc eveniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variabiles involvens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse

po-

poterit. Quos casus ut evolvamus, ponamus P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = Pdx + Qdy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaepiam ipsarum x & y, cuius differentiale sit

$$dz = pdx + qdy, \quad \text{eritque} \quad P = p \quad \& \quad Q = q.$$

At supra demonstravimus $pdx + qdy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y, nisi sit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, uti ante assumsimus $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy divisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q, posita sola x variabili, divisum per dx. Quocirca aequatio $dz = Pdx + Qdy$ realis esse nequit, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = Pdx + Qdy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z, P vero & Q sint functiones ipsarum x & y, tertiam variabilem z non complectentes. Ut enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y, necesse est ut sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur, diiudicari potest, utrum sit realis an absurda. Sic patebit hanc aequationem $zdz = ydx + xdy$ esse realem, nam ob

$$P = y \quad \& \quad Q = x, \quad \text{fit} \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Haec vero aequatio $azdz = yydx + xxdy$ est absurda, si-fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$; qui valores sunt inaequales.

313. Ut autem criterium latissime patens investigemus, sint P, Q, & R functiones quaecunque ipsarum x, y, & z; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, siquidem sit primi gradus, continebitur in hac forma:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Quoties ergo haec aequatio est realis, z aequabitur functioni cuipiam ipsarum x & y; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = pdx + qdy$. Quare si in aequatione proposita ista functio ipsarum x & y loco z, & $pdx + qdy$ loco dz substituatur, necesse est, ut prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione proposita fiat: $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$, si in P, Q, & R valor ille loco z substituatur, necesse est ut fiat $p = -\frac{P}{R}$, & $q = -\frac{Q}{R}$.

314. Quoniam vero est $dz = pdx + qdy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y fit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

erit $$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right)$$

& $$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

Ee ubi

ubi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP, dQ, dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitatibus P, Q, & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P, Q, & R sunt functiones ipsarum x, y, & z, ponamus

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \theta dy + \iota dz$$

ubi α, β, γ, δ, ε, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z ubique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz, ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$dP = (\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p) dx + (\varepsilon + \zeta q) dy$$
$$dR = (\eta + \iota p) dx + (\theta + \iota q) dy.$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, ut sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inventi valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante invenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$

qui

qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non substituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

seu $o = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta)$.
Quia autem quantitates β, δ, γ, η, ζ, θ, per differentiationem inveniuntur, erit superiori notandi modo adhibito:

$$o = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Quae proprietas, nisi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, sed imaginaria & absurda.

317. Quanquam hanc regulam ex consideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aeque ingrediuntur, manifestum est, & reliquarum consideratione, eandem expressionem prodituram fuisse. Proposita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variabiles involvat, quacunque, statim diiudicari poterit utrum sit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$Pdx + Qdy + Rdz = o,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

qui si fuerit $= o$, aequatio erit realis, sin autem non fuerit $= o$, certum hoc est signum, aequationem esse imaginariam seu absurdam.

318. Aequatio proposita per divisionem quoque semper ad huiusmodi formam reduci potest:

$$Pdx + Qdy + dz = o,$$

in quam, cum prior abeat si fiat $R = 1$, criterium simplicius exprimetur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = o.$$

Quoties enim haec expressio revera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eveniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstravimus, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, utrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, fuerit P functio ipsius x, Q functio ipsius y, & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem. Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;\&\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0 \;;$$

ideoque tota expressio criterii sponte evanescet.

320. Si fuerit ut ante P ipsius x, & Q ipsius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipsarum x, y, & z, aequatio erit realis si fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{seu} \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

Sic si proposita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0.$$

Quia hic est $P = \frac{2}{x}$; $Q = \frac{3}{y}$, & $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$

hinc

hinc $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$; atque $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6}$;

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio proposita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipsarum x & y, at R functio ipsius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \& \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

aequatio erit realis si fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec eadem vero conditio requiritur, si $Pdx + Qdy$ debeat esse differentiale determinatum, seu ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae ipsarum x & y ortum. Hucque redit quod supra §. 312 iam observavimus, aequationem $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y, realem esse non posse, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ambo autem isti casus inter se prorsus conveniunt: nam loco Rdz, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z.

322. Ut hoc criterium inventum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)dz = 0,$$

qua cum forma generali comparata fit:

$$P = 6xy^2z - 5yz^3; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$
$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2;$$
$$Q = 5x^2yz - 4xz^3; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2;$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

His inventis valoribus aequatio iudicium continens erit haec:

$$+ (6xy^2z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz)$$
$$+ (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expreſſio ſi evolvatur, omnes termini actu ſe mutuo deſtruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propoſitam eſſe realem.

323. Quando autem expreſſio hoc modo ex criterio eruta non evaneſcit, tum id ſignum eſt aequationem propoſitam eſſe imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita invenitur, ea, ſi quidem aequationi differentiali conveniat, ſimul relationem indicabit, quam variabiles inter ſe tenent. Atque hoc modo ii caſus, quorum ſupra meminimus (310), evolvuntur. Sit enim propoſita iſta aequatio:

$$(z - x)\,dx + (y - z)\,dy = 0,$$

fiet $P = z - x$; $Q = y - z$; & $R = 0$,

porro $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$, & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$.

Aequatio iudicium exhibens fit $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$

ſeu $z - x = z - y$; unde fit $y = x$.

Quoniam igitur hic caſu evenit, ut aequatio $y = x$ ſimul aequationi differentiali ſatisfaciat, dicendum eſt propoſitam aequationem nil aliud ſignificare, niſi eſſe $y = x$.

324.

324. Proposita ergo aequatione differentiali tres variabiles continente: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, tres considerandi erunt casus sequentes, ad quos haec aequatio deducit:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Primus est si haec expressio revera sit $= 0$, tumque aequatio proposita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non sit identica, tum dispiciendum est, utrum ea aequationi propositae satisfaciat: quodsi evenit, habebitur aequatio finita, qui est casus secundus. Tertius autem casus locum habet, si aequatio finita cum proposita differentiali subsistere nequeat, atque tum aequatio proposita erit imaginaria: neque enim ulla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipsi satisfaciat.

325. Casus primus ac tertius per se sunt perspicui, secundus autem, etsi rarissime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam supra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia insint: $(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0$. Erit ergo:

$$P = z - y \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1$$

$$Q = x \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$$

$$R = y - z \quad ; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$$

unde aequatio finita criterium continens evadet:

$$z - x - y = 0, \text{ seu } z = x + y$$

substituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0;$$

quae aequatio, cum sit identica, sequitur aequationem differentialem nil aliud significare, nisi $z = x + y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variabiles insunt contineri in hac forma $Pdx + Qdy + Rdz = 0$,

dubium hic nasci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresve dimensiones constituunt, cuiusmodi est haec:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz.$$

Verum de huiusmodi aequationibus notandum est, eas nullo modo reales esse posse, nisi habeant divisores prioris formae, qui propterea aequationes simplices constituent. Cum enim ex hac aequatione fiat: $dz =$

$$\frac{Tdx + Vdy \pm \sqrt{(dx^2(T^2 - PR) + 2dxdy(TV + RS) + dy^2(V^2 - QR))}}{R}$$

facile patet z functioni cuipiam ipsarum x & y, seu dz huiusmodi expressioni $pdx + qdy$ aequale fieri non posse, nisi quantitas irrationalis evadat rationalis, quod eveniet si fuerit:

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

seu $$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

Nisi ergo haec aequatio finita ipsi aequationi propositae satisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Superesset ut in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variabiles complectuntur, perpenderemus, casusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae evadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praesertim, cum ex iisdem fontibus, quos hic aperuimus, sequantur. Ceterum si in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem causam hic quoque aequationes, quae plures variabiles complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, si unquam occurrerent, ex principiis hic traditis sine negotio examinari possent. Quare his expositis Institutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progressuri ad insignes usus ostendendos, quos iste calculus cum in ipsa Analysi, tum in Geometria sublimiori affert.