CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM ULTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si unica variabilis adsit, eiusque differentiale primum constans assumatur, supra iam methodus est tradita differentialia cuiusque gradus inveniendi. Scilicet si functionis cuiusvis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale secundum, hocque iterum differentiatum dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, sive functio plures involvat variabiles sive unicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur constans. Sit igitur V functio quaecunque ipsius x, neque vero dx sit constans, sed utcunque variabile, ita ut ipsius dx differentiale sit $= ddx$, huiusque differentiale $= d^3x$, & ita porro, atque investigemus differentialia secundum & sequentia functionis V.

243. Ponamus differentiale primum functionis V esse $= Pdx$, ubi erit P functio quaepiam ipsius x pendens ab V. Si iam functionis V differentiale secundum invenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum sit productum ex duabus quantitatibus variabilibus P & dx, quarum illius differentiale sit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale ddx, per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo ulteriora differentialia invenientur.

244. Applicemus haec ad poteſtates ipſius x, quarum ſingula differentialia inveſtigemus, ſi dx non ponatur conſtans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;
$d^3V = d^3x$; $d^4V = d^4x$;
&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &

$$ddV = 2xddx + 2dx^2$$
$$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$$
$$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$$
$$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$$

&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit

$$dV = nx^{n-1}dx$$
$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$
$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$
$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

&c.

Si igitur fuerit dx conſtans, ac propterea
$ddx = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, &c.
orientur eadem differentialia, quae iam ſupra pro hac hypotheſi ſunt inventa.

245. Quoniam igitur differentialia cuiuſque ordinis ipſius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expreſſiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, ſecundum praecepta ſupra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illuſtrabimus.

I.

I. Si fuerit $V = \frac{xddx}{dx}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{xd^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2xddx^2}{dx^3}.$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$; erit $dV = 1 - \frac{xddx}{dx^2}$,

ubi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam posuimus.

III. Si fuerit $V = xxl\frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

$$V \text{ in } xxlddx - 2xxldx;$$

erit secundum regulas consuetas differentiando:

$$dV = 2xdxlddx + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdxldx - \frac{2xxddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipsius V reperientur.

246. Si expressio proposita duas variabiles involvat, nempe x & y, vel unius differentiale ponitur constans vel neutrius; arbitrarium enim est alterutrius differentiale constans assumi, quia ab arbitrio nostro pendet, quemadmodum unius valores successivos crescere statuere velimus. Neque vero utriusque variabilis differentialia simul statui possunt constantia, hoc ipso enim relatio inter variabiles x & y assumeretur, quae tamen vel nulla est, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter crescere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere statueretur, tum eo ipso indicaretur fore $y = ax + b$; sicque y ab x penderet, quod tamen assumere non licet. Hancobrem vel unius tantum variabilis differentiale constans assumi potest vel nullum. Quodsi autem differentiationes absolvere noverimus nullo differentiali assumto constante, simul quoque differentialia constabunt, si alterutrum differentiale ponatur constans: tantum enim opus est, ut si

dx constans statuatur, ubique termini continentes ddx, d^3x, d^4x, &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipsarum x & y, sitque $dV = Pdx + Qdy$. Ad differentiale ipsius V secundum inveniendum assumamus utrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q sint functiones ipsarum x & y statuamus:

$$dP = pdx + rdy$$
$$dQ = rdx + qdy$$

supra enim vidimus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$.

His positis differentietur $dV = Pdx + Qdy$, & reperietur:

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2.$$

Si igitur differentiale dx statuatur constans, erit

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2,$$

sin autem differentiale dy statueretur constans, foret

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipsarum x & y bis differentietur, nullo differentiali posito constante, eius differentiale secundum semper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy$$

pendebunt autem quantitates P, Q, R, S, & T ita a se invicem, ut sit signandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ R = \left(\frac{dP}{dx}\right);\ S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

$$\&\ T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum si vel unica desit, certo affirmare poterimus, formulam propositam nullius functionis esse differentiale secundum. Statim ergo dignosci poterit, utrum huiusmodi formula sit cuiuspiam quantitatis differentiale secundum an minus.

249. Simili modo differentialia tertia ac ſequentia invenientur, quod in exemplo particulari oſtendiſſe expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

Erit $dV = ydx + xdy$

$$ddV = yddx + 2dxdy + xddy$$
$$d^3V = yd^3x + 3dyddx + 3dxddy + xd^3y$$
$$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$$
&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem poteſtatum binomii ſequuntur, indeque quouſque libuerit continuari poſſunt.

At ſi fuerit $V = \frac{y}{x}$;

$$\text{Erit } dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx}$$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2} + \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}$$

in quo exemplo progreſſio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adſtringitur, ſed etiam eodem negotio cuiuſvis expreſſionis, quae iam differentialia in ſe continet, differentiale inveniri poteſt, ſive unum quoddam differentiale aſſumitur conſtans ſive minus. Cum enim ſingula differentialia aeque & eadem lege differentientur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque obſervari debent. Denotet igitur V eam expreſſionem, quam

quam differentiari oportet, five fit finita, five infinite magna five infinite parva; atque ratio differentiationis ex his exemplis perfpicietur:

I. Sit $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

Erit $dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

II. Sit $V = \frac{lydx}{dy}$;

Erit $dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

III. Sit $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$;

Erit $$dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx}$$

$$- \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}.$$

quae differentialia cum fint generaliffime fumta, nullo differentiali pro conftante habito, hinc facile ea differentialia derivari poterunt, quae oriuntur, fi vel dx vel dy ftatuatur conftans.

251. Quia nullo differentiali conftante affumto, nulla etiam lex, fecundum quam fucceffivi variabilium valores progrediantur, praefcribitur, differentialia fecunda & fequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi fignificabunt. Hinc formula, in qua differentialia fecunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, nifi quodpiam differentiale conftans fit affumtum; fed eius fignificatio erit vaga, atque variabitur, prouti aliud atque aliud differentiale fuerit conftans pofitum. Interim tamen dantur quo-

que eiusmodi expressiones differentialia secunda continentes, quae, etiamsi nullum differentiale positum sit constans, tamen significatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale constans statuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius scrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoscendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas unicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit eius variabilis x differentiale secundum ddx, nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valorem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2xdx$ seu xdx constans ponatur, cum ipsius xdx differentiale $xddx + dx^2$ sit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1}dx$ seu $x^{n-1}dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diversissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel 0 vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xxddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parva homogenea, finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in 0, si sit dx^2 constans, ea abit in $-x$; si sit dx^3 constans, ea abit in $-2x$; si dx^4 sit constans, ea abit in $-3x$ & ita por-

porro. Neque ergo determinatum valorem habere poteſt, niſi definiatur, cuiuſmodi differentiale conſtans ſit aſſumtum.

253. Iſta inconſtantia ſignificationis ſimili ratione oſtenditur, ſi differentiale tertium in quapiam formula inſit. Conſideremus hanc formulam $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$, quae pariter finitum valorem prae ſe fert. Si differentiale dx ſit conſtans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit dx^2 conſtans, erit

$$ddx = -\frac{dx^2}{x};$$ & denuo differentiando

$$d^3x = -\frac{2dxddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}, \text{ ob } ddx = -\frac{dx^2}{x},$$

hoc ergo caſu formula propoſita $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$ abit in $-3x^2$. At ſi fuerit dx^n conſtans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$, hincque

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dxddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx}$$
$$+ \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}$$

Hoc ergo caſu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \text{ \& } \frac{x^3 d^3 x}{dx ddx} = -(2n-1)x^2,$$

unde patet ſi ſit $n = 1$, ſeu dx conſtans, valorem formulae fore $= -x^2$. Ex quo manifeſtum eſt, ſi in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque ſimul indicetur, cuiuſmodi differentiale aſſumtum ſit conſtans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil

pror-

prorsus significare; quamobrem tales expressiones in calculo occurrere non possunt.

254. Simili modo si formula contineat duas pluresve variabiles, in eaque occurrant differentialia secundi altiorisve gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non posse, nisi differentiale quodpiam constans statuatur, iis tantum exceptis casibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula inest, quoniam pro variis differentialibus, quae constantia ponuntur, valor ipsius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, ut formula statum obtineat valorem; hocque idem valet de quovis differentiali altiori ipsius x, atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium secundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumve variabilium differentialia secunda insint, fieri potest, ut inconstantia ab uno oriunda per inconstantiam reliquarum destruatur; hincque nascitur ille casus, cuius meminimus, quo formula huiusmodi differentialia secunda duarum pluriumve variabilium involvens valorem definitum habere potest, non obstante quod nullum differentiale constans sit positum.

255. Haec igitur formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, statam atque fixam significationem habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans statuatur. Nam si dx constans ponatur habebitur $\frac{xddy}{dxdy}$; sin autem dy constans ponatur, habebitur $\frac{yddx}{dxdy}$; manifestum autem est has formulas non necessario inter se esse aequales. Si enim necessario essent aequales, tales manere deberent, quaecunque functio ipsius x loco y substitueretur. Ponamus tantum esse $y = xx$, & cum posito dx constante, sit $ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dxdy}$ abibit

in

in 1, ſin autem dy ſeu $2xdx$ ponatur conſtans, fiet $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$; unde formula $\frac{yddx}{dxdy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in unico caſu reperiatur diſcrepantia, multo minus in genere erit $\frac{xddy}{dxdy}$ poſito dx conſtante aequalis $\frac{yddx}{dxdy}$ poſito dy conſtante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ ſibi non conſtat, dummodo vel dx vel dy conſtans ponatur, multo minus ſibi conſtabit, ſi functionis cuiuſvis vel ipſius x vel ipſius y vel utriuſque differentiale conſtans ponatur.

256. Hinc apparet huiuſmodi formulam ſtatum valorem habere non poſſe, niſi ita ſit comparata, ut poſtquam loco variabilium y, & z, quae praeter x inſunt, functiones quaecunque ipſius x fuerint ſubſtitutae, differentialia ſecunda & altiora ipſius x, nempe ddx, d^3x, &c. penitus ex calculo excedant. Si enim poſt talem ſubſtitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx, vel d^3x, vel d^4x, &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque conſtantia aſſumuntur, ſignificationem ſuam variant, valor quoque ipſius formulae erit vagus. Sic comparata eſt formula ante propoſita $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, quae ſi ſtatum haberet valorem, quicquid y ſignificet, ſtatum quoque habere deberet valorem, ſi y denotaret funtionem quampiam ipſius x. At ſi tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2xddx}{dx^2}$ quae utique ob ddx in ea contentum eſt vaga, atque alios alioſque valores induit, prouti alia

atque

atque alia differentialia constantia ponuntur, uti ex §. 252 satis est manifestum.

257. Dubium autem hic subnascetur, utrum dentur tales formulae duo plurave differentialia secundi altiorisve gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, ut si loco reliquarum variabilium quaecunque functiones unius substituantur, differentialia secundi gradus prorsus se destruant. Huic dubio primum ita occurramus, ut huiusmodi formulam proponamus, quae ista proprietate sit praedita, quo per explorationem vis quaestionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ memoratam proprietatem possidere: quaecunque enim functio ipsius x loco y substituatur, semper differentialia secundi gradus penitus evanescent; quam proprietatem sequentibus exemplis comprobemus.

I. Sit $y = x^2$; erit $dy = 2xdx$, & $ddy = 2xddx + 2dx^2$, qui valores in formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ substituti dabunt,

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = nx^{n-1}dx$,
& $ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$
qui valores substituti formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3}$$
$$= -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -\surd(1-xx)$; erit $dy = \frac{xdx}{\surd(1-xx)}$,
&

& $$ddy = \frac{xddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

atque formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, abit in

$$\frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia secunda ddx se mutuo tollunt, hocque ita eveniet, quaecunque aliae functiones loco y substituantur.

258. Cum ista exempla iam probaverint veritatem nostrae propositionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ fixum habeat valorem, etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, demonstrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipsius x, eiusque differentiale dy huiusmodi erit, ut sit $dy = pdx$, atque p erit functio quaepiam ipsius x, eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = qdx$, eritque q iterum functio ipsius x. Cum igitur sit $dy = pdx$, erit differentiando $ddy = pddx + qdx^2$, & $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = -qdx^3$; in qua expressione cum nullum insit differentiale secundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ erit $= -q$. Quomodocunque igitur y pendeat ab x, differentialia secunda in hac formula semper se mutuo tollent, hancque ob causam eius valor, qui alioquin esset vagus, fiet status ac fixus.

259. Quanquam hic posuimus y esse functionem ipsius x, tamen veritas aeque subsistit, si y ab x prorsus non pendeat, uti assumsimus. Dum enim pro y functionem quamcunque substituimus, neque qualis sit determinavimus, nullam pendentiam ab x ipsi y tribuimus. Interim tamen sine fun-

ctionis mentione demonstratio formari potest; quaecunque enim y sit quantitas sive pendens ab x sive non pendens, eius differentiale dy homogeneum erit cum dx, sicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum, neque a differentialium secundorum lege pendebit. Sit igitur $\frac{dy}{dx}=p$;

$$\text{erit } dy=pdx,\ \&\ ddy=pddx+dpdx,\ \text{unde fit}$$
$$dxddy-dyddx=dpdx^2,$$

cuius valor non est vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, sive quodpiam differentiale constans accipiatur, qualecunque id demum sit, sive nullum differentiale positum sit constans.

260. Quia igitur $dyddx-dxddy$ non obstantibus differentialibus secundis, quae potentia se mutuo destruere censeri possunt, significationem habet fixam; expressio quaecunque, in qua nulla alia differentialia secunda praeter formulam $dyddx-dxddy$ insunt, pariter significationem habebit fixam. Seu si ponatur $dyddx-dxddy=\omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y, earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω utcunque composita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrariae, qua valores successivi ipsius x crescere ponuntur, in ω differentialia secunda se mutuo tollunt, etiam ipsa quantitas V non erit vaga sed fixa. Sic ista expressio $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}$ valorem obtinet fixum, quamvis ea differentialibus secundis inquinata videatur, atque insuper, quia numerator est homogeneus denominatori, valorem obtinet finitum, nisi is casu vel infinitae magnus vel infinitae parvus evadat.

261.

261. Quemadmodum formula $dxddy - dyddx$ valorem fixum habere ostensa est, ita quoque si tertia variabilis z accedat; hae formulae $dxddz - dzddx$ & $dyddz - dzddy$ valores fixos habebunt. Hinc expressiones, quas tres variabiles x, y, & z involvunt, si in eis nulla alia differentialia secunda occurrant, praeter haec assignata, tum perinde erunt fixae, ac si nulla plane differentialia secunda inessent. Ita haec expressio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

non obstantibus differentialibus secundis, fixa gaudet significatione. Similique modo formulae exhiberi possunt, plures variabiles continentes, in quibus differentialia secunda non impediunt, quominus earum significatio sit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia secunda complectuntur, reliquae omnes significationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere possunt, nisi quodpiam differentiale primum definiatur, quod constans sit assumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum constans assumitur, omnes expressiones quotcunque variabiles contineant, & cuiuscunque ordinis differentialia post primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt significationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx assumtum sit constans, ipsius x differentialia secunda & sequentia evanescunt; & quaecunque functiones ipsius x loco reliquarum variabilium y, z, &c. substituantur, earum differentialia secunda per dx^2, tertia per dx^3, &c. determinabuntur, sicque inconstantia a differentialibus secundis oriunda tollitur. Idem evenit, si alius variabilis seu functionis cuiuscunque differentiale primum constans ponatur.

263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda & altiorum ordinum revera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta.

Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum constans assumitur, vel nullum. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo evanescunt, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem nisi se mutuo destruant, significatio erit vaga, & propterea in Analysi locum nullum inveniunt; sin autem se mutuo destruunt, tantum apparenter adsunt, & revera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime apparenter tantum in calculo usurpantur, necesse fuit, ut methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus, cuius ope differentialia secunda & altiora semper exterminari queant.

264. Si expressio unicam contineat variabilem x, eiusque differentialia altiora ddx, d^3x, d^4x, &c. in ea occurrant, ea significatum fixum habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans sit positum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt sit constans positum, ita ut sit $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, &c. Ponatur $dx = pdt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga significatione differentialium secundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp = qdt$, similique modo ulterius $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c. erunt q, r, s, &c. quantitates finitae fixos significatus habentes. Cum igitur sit $dx = pdt$; erit

$$ddx = dpdt = qdt^2;\ d^3x = dqdt^2 = rdt^3;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4;\ \&c.$$

qui valores si loco ddx, d^3x, d^4x, &c. substituantur, tota expressio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam significationem habebit.

265. Si x sit functio ipsius t, poterit hoc modo quantitas x prorsus eliminari, ita ut sola quantitas t cum suo differentiali dt in expressione remaneat: sin autem t sit func-

ctio

ctio ipsius x, vicissim quoque x erit ipsius t functio. Interim tamen ipsa quantitas x cum suo differentiali primo dx, in calculo retineri potest, dummodo post substitutiones ante factas ubique loco t & dt earum valores per x & dx expressi restituantur. Quod quo planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita ut differentiale primum ipsius x^n constans sit positum. Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx \; ; \quad \text{erit} \quad p = \frac{1}{nx^{n-1}} \; ; \qquad \&$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx \; ;$$

$$\text{unde fit} \qquad q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}} \; ; \qquad \&$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx \, .$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \; ; \; \& \; s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}} \, .$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx}$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variabiles x & y, earumque unius x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentialia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy, d^3y, &c. Haec autem eodem modo, quo ante usi sumus, tolli poterunt ponendo

dy

$$dy = pdx;\; dp = qdx;\; dq = rdx;\; dr = sdx;\; \&c.$$

fiet enim $ddy = qdx^2;\; d^3y = rdx^3;\; d^4y = sdx^4$ &c. quibus ſubſtitutis expreſſio orietur, quae praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. nonniſi differentiale primum dx continebit. Sic ſi propoſita fuerit haec expreſſio

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx + yy)ddy}$$

in qua dx eſt conſtans aſſumtum; ponatur

$$dy = pdx;\; dp = qdx;\; dq = rdx;\; \&\; dr = sdx;$$

quibus valoribus ſubſtitutis expreſſio propoſita transmutabitur in hanc: $\frac{(y + xpr + xs)dx^2}{(xx + yy)q}$ quae nulla amplius differentialia ſecunda altiorave continet.

267. Simili modo differentialia ſecunda & altiora tollentur, ſi dy fuerit conſtans aſſumtum. Verum ſi aliud differentiale primum quodcunque dt ſtatuatur conſtans, tum primum modo ante indicato differentialia ipſius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$$dx = pdt;\; dp = qdt;\; dq = rdt;\; dr = sdt;\; \&c.$$

unde fit

$$ddx = qdt^2;\; d^3x = rdt^3;\; d^4x = sdt^4;\; \&c.$$

Deinde ſimili modo differentialia altiora ipſius y ponendo

$$dy = Pdt;\; dP = Qdt;\; dQ = Rdt;\; dR = Sdt;\; \&c.$$

unde fiet

$$ddy = Qdt^2;\; d^3y = Rdt^3;\; d^4y = Sdt^4;\; \&c.$$

quibus ſubſtitutis obtinebitur expreſſio, quae praeter quantitates finitas, x, p, q, r, s, &c. y, P, Q, R, S, &c. ſolum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit ſignificationem.

268. Si differentiale primum, quod conſtans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab utroque ſimul pendet, tum non

opus

opus eſt, ut duplex quantitatum finitarum p, q, r, &c. ſeries introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae p, q, r, &c. fient functiones ipſius x, ſolaeque litterae P, Q, R, &c. ingrediuntur; idemque evenit, ſi differentiale conſtans dt ab y tantum pendeat. At ſi dt ab utraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale ydx conſtans eſſe aſſumtum, eritque $yddx + dxdy = 0$; unde fit $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Sit nunc $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ &c. eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$; ulteriuſque differentiando

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

ſubſtituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{pdx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy};$$ porroque

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3}$$
$$+ \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3dx^2 ddx;$$

& pro ddx ſubſtituto valore $-\frac{pdx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4 \quad \text{\&c.}$$

Deinde cum ſit $dy = pdx$; erit

ddy

$$ddy = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{pp}{y}\right) dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{pdx^2}{y}$ substituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \quad \&$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4 \quad \&c.$$

qui valores loco differentialium altiorum ipsarum x & y substituti mutabunt expressionem propositam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque consideratione cuiuspiam differentialis constantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia secunda non insunt, nequidem opus est, ut quale differentiale sumtum sit constans, commemoretur.

269. Saepissime autem in calculo ad lineas curvas applicato evenire solet, ut hoc differentiale primum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constans assumatur: quare quemadmodum hoc casu differentialia secunda & altiora eliminari debeant, ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absolvendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c. atque differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1+pp)}$, quae cum sit constans fiet

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0,$$

ideoque $\quad ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp};$

unde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

d^3x

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

Deinde, fiet.

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Quia autem assumsimus $dy = pdx$, fiet differentiando

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp}, \quad \text{ideoque}$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

porroque differentiando:

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora utriusque variabilis x & y per quantitates finitas & potestates ipsius dx exprimentur, atque post has substitutiones factas resultabit expressio a differentialibus secundis prorsus libera.

270. Exposito igitur modo differentialia secunda & altiora exuendi, conveniet hoc negotium aliquot exemplis illustrari.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx positum eſt conſtans. Poſito ergo $dy = pdx$, & $dp = qdx$, ob $ddy = qdx^2$, expreſſio propoſita abit in hanc finitam xq.

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua poſitum ſit dy conſtans. Ponatur $dx = pdy$; $dp = qdy$, ob $ddx = qdy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem ut ante ſtatuere velimus $dy = pdx$, $dp = qdx$; ob dy conſtans erit $0 = pddx + dpdx$ & $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$; unde expreſſio propoſita tranſibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ in qua ydx poſitum ſit conſtans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$, quibus ſubſtitutis expreſſio propoſita tranſmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit propoſita iſta expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conſtans ſit poſitum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ponatur iterum $dy = pdx$, $dp = qdx$, & ex paragrapho praecedente erit $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$; unde expreſſio propoſita abibit in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Ex

Ex his autem exemplis satis intelligitur, quemadmodum in quovis casu oblato, quodcunque differentiale primum assumtum sit constans, differentialia secunda atque altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quantitatibus finitis p, q, r, s, &c. differentialia secunda & altiora ita eliminari queant, ut tota expressio praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. solum differentiale dx complectatur; vicissim si huiusmodi expressio reducta proponatur, ea iterum in formam priorem transmutari poterit loco litterarum p, q, r, s, &c. introducendis differentialibus secundis & altioribus. Nunc autem perinde erit, quodnam differentiale primum constans assumatur; atque vel id ipsum, quod ante fuit assumtum constans poni potest, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorsus nullum differentiale constans assumi poterit, hocque modo prodibunt expressiones differentialia secunda altiorave continentes, quae etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, tamen fixas significationes obtineant, cuiusmodi expressiones dari supra ostendimus.

272. Sit ergo proposita expressio quaecunque continens litteras finitas x, y, p, q, r, &c. una cum differentiali dx, in qua sit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; &c. Si enim has litteras p, q, r, &c. ita eliminare velimus, ut earum loco introducamus differentialia secunda & altiora ipsarum x & y, nullo differentiali constante assumto; fiet

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}, \text{ hincque } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3},$$

quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4},$$

unde fit $r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$

 Quod

Quod ſi inſuper littera s, quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, inſit, pro ea ſubſtitui debebit hic valor $s =$

$$\frac{dx^3 d^4y - 6dx^2 ddx d^3y - 4dx^2 ddy d^3x + 15dx ddx^2 ddy + 10dx dy ddx d^3x - 15dy ddx^3 - dx^2 dy d^4x}{dx^7}$$

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s &c. ſubſtitutis expreſſio propoſita tranſmutabitur in aliam differentialia altiora ipſarum x & y continentem, quae etiamſi nullum differentiale primum conſtans ſit aſſumtum, tamen non vagam ſed fixam habebit ſignificationem.

273. Hoc ergo modo quaevis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum aſſumtum eſt conſtans, tranſmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale conſtans ponitur, quae hoc non obſtante eundem valorem fixum habeat. Primum ſcilicet ope methodi ante traditae aſſumtis valoribus

$$dy = p dx;\ dp = q dx;\ dq = r dx;\ dr = s dx;\ \&c.$$

differentialia altiora eliminentur, tum loco p, q, r, s, &c. valores nunc inventi ſubſtituantur, atque orietur expreſſio priori aequalis nullum differentiale conſtans involvens: quam transformationem exempla ſequentia illuſtrabunt.

I. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{x ddy}{dx^2}$, in qua dx poſitum conſtans, quae tranſmutari debeat in aliam formam nullum differentiale conſtans involventem. Ponatur $dy = p dx$; $dp = q dx$; atque ut ante (270) vidimus expreſſio propoſita tranſibit in hanc: qx. Nunc loco q ſubſtituatur valor, quem obtinet nullo differentiali conſtanti aſſumto $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$ atque reperietur haec expreſſio $\frac{x dx ddy - x dy ddx}{dx^3}$ propoſitae aequalis, & nullum amplius differentiale conſtans involvens.

II.

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$; in qua dy aſſumtum eſt conſtans. Ponatur $dy=pdx$ & $dp=qdx$; eaque tranſibit in hanc: $-\frac{p(1+pp)}{q}$, ſtatuatur nunc $p=\frac{dy}{dx}$ & $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, atque invenietur: $\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dyddx-dxddy}$ quae nullo differentiali aſſumto conſtante eundem fixum habet valorem, quem propoſita.

III. Sit propoſita haec expreſſio: $\frac{yddx-xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conſtans eſt aſſumtum. Ponatur $dy=pdx$, atque uti ſupra (270) vidimus haec expreſſio tranſmutatur in hanc: $-1-\frac{xq}{p}+\frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali conſtante aſſumto transformabitur in iſtam:

$$-1-\frac{xdxddy-xdyddx}{dx^2dy}+\frac{xdy}{ydx}$$
$$=\frac{xdxdy^2-ydx^2dy-yxdxddy+yxdyddx}{ydx^2dy}.$$

IV. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$, in qua conſtans aſſumtum eſt differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Poſito $dy=pdx$, & $dp=qdx$, orietur haec expreſſio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p=\frac{dy}{dx}$, & $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, atque nullo aſſumto differentiali conſtanſtante nanciſcemur iſtam expreſſionem $\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy-dxdyddx}$ propoſitae aequivalentem.

V. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dxd^3y}{xddy}$, in qua differentiale dx conſtans ſit aſſumtum. Ponatur

$$dy=pdx;\quad dp=qdx \quad \& \quad dq=rdx;$$

atque ob

$$ddy=qdx^2 \quad \& \quad d^3y=rdx^3$$

formula propoſita abibit in hanc $\frac{rdx^2}{xq}$. Nunc loco q & r ſubſtituantur valores, quos nullo differentiali conſtante aſſumto recipiunt ſcilicet: $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, &

$$r=\frac{dx^2d^3y-3dxddxddy+3dyddx^2-dxdyd^3x}{dx^5}$$

atque obtinebitur ſequens expreſſio propoſitae aequivalens:

$$\frac{dx^2d^3y-3dxddxddy+3dyddx^2-dxdyd^3x}{x(dxddy-dyddx)}$$

$$=\frac{dx(dxd^3y-dyd^3x)}{x(dxddy-dyddx)}-\frac{3ddx}{x}.$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita ut non opus ſit litteras p, q, r, &c. introducere. Varii autem modi hoc opus abſolvendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula propoſita conſtans fuerit aſſumtum. Ponamus primum in formula propoſita differentiale dx conſtans eſſe aſſumtum; & quia loco dy poſuimus pdx, rurſuſque $\frac{dy}{dx}$ loco p: differentialia prima dx & dy,

ubi-

ubicunque in expressione occurrunt, sine alteratione relinquuntur. Ubi autem occurrit ddy, quia eius loco scribitur qdx^2, & porro loco q valor $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, transmutatio absolvetur, si ubique loco ddy statim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ seu $ddy - \frac{dyddx}{dx}$. Si insuper in expressione proposita occurrat d^3y, quia eius loco ponitur rdx^3, ob valorem ipsius r ante inventum, ubique loco d^3y scribi debebit

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

quo facto expressio proposita transmutabitur in aliam, quae nullum differentiale constans involvit. Sic si proponatur ista expressio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, ei aequalis erit posito $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy, haec nullum differentiale constans involvens: $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$.

275. Hinc facile colligitur, si in expressione quapiam proposita assumtum fuerit differentiale dy constans, tum ubique loco ddx scribi debere $ddx - \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$; ut obtineatur expressio aequivalens, in qua nullum differentiale constans ponatur. Sin autem in expressione proposita constans fuerit assumtum ydx, quoniam fit $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, &

$ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$; loco ddx ubique ſcribi debebit $-\frac{dxdy}{y}$, & loco ddy ubique $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentialia, quia in hoc negotio rariſſime occurrere ſolent, non progredior. Quod ſi vero in expreſſione propoſita hoc differentiale $\surd(dx^2 + dy^2)$ aſſumtum fuerit conſtans, quia invenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$: pro ddx ubique ſcribi debet $\frac{dy^2 ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$ & loco ddy ubique $\frac{dx^2 ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$. Sic ſi propoſita fuerit expreſſio $\frac{dy\surd(dx^2 + dy^2)}{ddx}$, in qua $\surd(dx^2 + dy^2)$ aſſumtum ſit conſtans, ea tranſmutabitur in hanc: $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, in qua nullum differentiale conſtans aſſumitur.

276. Quo iſtae reductiones facilius ad uſum accommodari queant, eas in ſequenti tabella complecti viſum eſt.

Formula igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale conſtans involventem tranſmutabitur ope ſubſtitutionum ſequentium:

I. Si differentiale dx fuerit conſtans aſſumtum

loco	ſcribatur
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$

II.

II. Si differentiale dy fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$

III. Si differentiale ydx fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$-\frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} - \frac{4dyddy}{y}$ $+ \frac{4dy^2ddx}{ydx} + \frac{3dy^3}{yy}$.

IV. Si differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	- - - - $\frac{dy^2d^3x - dxdyd^3y}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dxddy - dyddx)(3dy^2ddy - dx^2ddy + 4dxdyddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	- - - - $\frac{dx^2d^3y - dxdyd^3x}{dx^2 + dy^2}$ $+ \frac{(dyddx - dxddy)(3dx^2ddx - dy^2ddx + 4dxdyddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

277. Expressiones ergo istae, quae nullum differentiale constans includunt, ita erunt comparatae, ut pro lubitu quodvis differentiale constans assumi queat. Hincque expressiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale constans assumtum perhibetur, examinari possunt, utrum significatio earum sit vaga an fixa. Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx constans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expressio iterum ad formam, in qua nullum differentiale constans sit assumtum, quae si cum proposita conveniat, ea erit fixa, neque ab inconstantia differentialium secundorum pendebit: sin autem expressio prodeat diversa, tum proposita vagam habet significationem. Sic si ponatur haec expressio $yddx - xddy$, in qua nullum differentiale positum sit constans; ad investigandum, utrum significationem fixam habeat an vagam, ponatur dx constans, eaque abibit in $-xddy$; nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponatur, $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ ac prodibit $-xddy + \frac{xdyddx}{dx}$, cuius a proposita discrepantia indicat, propositam expressionem fixam statamque significationem non habere.

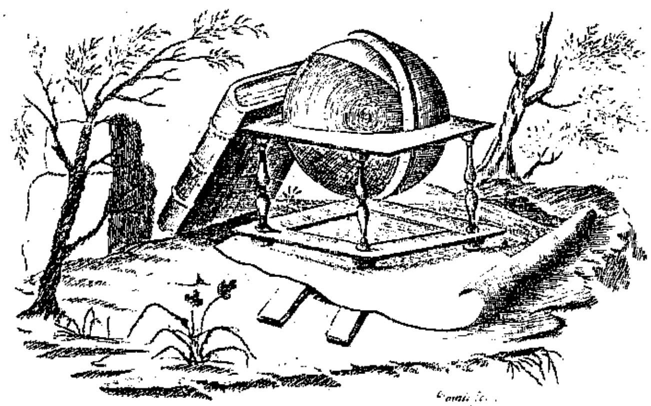
278. Simili modo si proponatur expressio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiri poterit, sub qua ea nullo differentiali constante assumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx constans, atque expressio proposita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, ut eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx + Rdy = 0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P = -\frac{Rdy}{dx}$ seu $R = -\frac{Pdx}{dy}$, tum expressio proposita $Pddx + Qdxdy + Rddy$ valorem fixum

xum non habebit, ſed eius ſignificatio erit vaga atque diverſa, prout aliud atque aliud differentiale conſtans aſſumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expreſſionem differentialem, in qua quodpiam differentiale conſtans eſt poſitum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale conſtans aſſumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale conſtans involvat, quo facto illud alterum differentiale conſtans ponatur. Sic ſi in expreſſione propoſita differentiale dx aſſumtum ſit conſtans, eaque transmutanda ſit in aliam, quae differentiale dy conſtans implicet: in formulis ſupra loco ddy & d^3y ſubſtituendis ob dy conſtans ponatur $ddy = 0$, $d^3y = 0$, atque quaeſito ſatisfiet, ſi loco ddy ſubſtituatur $-\frac{dyddx}{dx}$ & $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyddx}{dx}$ loco d^3y. Hoc modo iſta formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx poſitum eſt conſtans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$, in qua dy ponitur conſtans.

280. Si contra formula, in qua dy conſtans eſt poſitum, transmutari debeat in aliam, in qua dx ſit conſtans, tum loco ddx ſubſtitui debet $-\frac{dxddy}{dy}$ & loco d^3x haec expreſſio $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$. Simili modo ſi formula, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ poſitum eſt conſtans, transmutari debeat in aliam, in qua dx ſit conſtans, tum loco ddx ſcribatur $-\frac{dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{dx^2ddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. At ſi formula, qua dx conſtans eſt aſſumtum, transmu-

mutari debeat in aliam, in qua $\surd(dx^2 + dy^2)$ sit constans, quia ob $dx^2 + dy^2$ constans fit $dxddx + dyddy = 0$, & $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, hoc valore loco ddx assumto, pro ddy scribi debebit $ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)ddy}{dx^2}$. Sic haec formula $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx est constans, transmutabitur in aliam, in qua $\surd(dx^2 + dy^2)$ ponitur constans, quae erit $-\frac{dx\surd(dx^2 + dy^2)}{ddy}$.



CA-