CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESVE VARIABILES INVOLVENTIUM.

208.

Si duae pluresve quantitates variabiles x, y, z a se invicem prorsus non pendeant, fieri potest, ut etiamsi omnes sint variabiles, tamen dum una crescit decrescitve, reliquae maneant invariatae: quia enim nullum nexum inter se habere ponuntur, immutatio unius reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendebunt a differentiali ipsius x; ideoque dum x differentiali suo dx augetur, quantitates y & z, vel eaedem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari possunt. Quodsi igitur differentiale quantitatis x statuatur dx, reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio nostro vel prorsus nihil, vel infinite parva ad dx quamvis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipsius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non spectatur, significare solent, hocque casu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Sive autem y & z pendeant ab x sive secus, ratio differentiationis, quam hic spectamus, eodem redit. Quaerimus enim functionis, quae ex pluribus variabilibus x, y, & z utcunque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variabiles x, y, & z suis differentialibus dx, dy, & dz crescunt. Ad hoc ergo inveniendum in functione proposita ubique loco variabilium quantitatum x, y, z scribatur respective $x + dx$; $y + dy$; $z + dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur,

quemadmodum ex natura differentialium luculenter constat.

210. Sit X functio ipsius x, eiusque differentiale, seu augmentum, dum x differentiali suo dx crescit, sit $= Pdx$. Deinde sit Y functio ipsius y, eiusque differentiale $= Qdy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y + dy$: atque Z sit functio ipsius z, eiusque differentiale sit $= Rdz$, quae differentialia Pdx, Qdy, Rdz ex natura functionum X, Y, & Z ope praeceptorum supra datorum inveniri poterunt. Quod si ergo proposita fuerit haec quantitas $X + Y + Z$, quae utique erit functio trium variabilium x, y, & z, eius differentiale erit $= Pdx + Qdy + Rdz$. Utrum autem haec tria differentialia sint inter se homogenea nec ne perinde est. Termini enim qui continent potestates ipsius dx prae Pdx aeque evanescunt, ac si reliqua membra Qdy & Rdz abessent, similisque est ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z sunt neglecti.

211. Retineant X, Y & Z easdem significationes, sitque proposita ista functio XYZ ipsarum x, y & z, cuius differentiale investigari oporteat. Quoniam, si $x + dx$ loco x, $y + dy$ loco y, & $z + dz$ loco z scribatur, abit X in $X + Pdx$; Y in $Y + Qdy$; & Z in $Z + Rdz$, ipsa functio proposita XYZ abibit in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz)$$
$$= XYZ + YZP\,dx + XZQ\,dy + XYR\,dz$$
$$+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

At quia dx, dy, & dz sunt infinite parva, sive inter se sint homogenea sive non; ultimus terminus prae unoquoque praecedentium evanescit. Deinde terminus $ZPQdxdy$ tam prae $YZPdx$ quam prae $XZQdy$ evanescit; atque ob eandem rationem termini $YPRdxdz$ & $XQZdydz$ evanescent. Ablata ergo ipsa functione proposita XYZ, erit eius differentiale

$$= YZPdx + XZQdy + XYRdz.$$

212. Exempla haec functionum trium variabilium x, y, & z, quibus pro lubitu quisque plura adiicere potest, sufficiunt

ciunt ad oſtendendum, ſi functio quaecunque trium variabilium x, y, & z proponatur, utcunque etiam hae variabiles inter ſe fuerint permixtae, eius differentiale ſemper huiuſmodi formam eſſe habiturum $pdx + qdy + rdz$: ubi p, q, & r futurae ſint ſingulae functiones, vel omnium trium variabilium x, y, & z, vel binarum, vel unius tantum, prout ratio compoſitionis, qua functio propoſita ex variabilibus x, y, & z atque conſtantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, ſi proponatur functio quatuor pluriumve variabilium x, y, z, & v, eius differentiale ſemper huius modi formam habebit

$$pdx + qdy + rdz + sdv.$$

213. Conſideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y, quae ſit $= V$, cuius ergo differentiale ita ſe habebit, ut ſit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y aſſumeretur conſtans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale eſſet pdx: ſin autem x ſtatueretur conſtans, ut eſſet $dx = 0$, ſolaque y maneret variabilis, tum ipſius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur utraque quantitate x & y variabili poſita ſit $dV = pdx + qdy$, iſta regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y involvente reſultabit: *Ponatur primum ſola* x *variabilis, altera vero* y *tanquam conſtans tractetur, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= pdx$. *Deinde ponatur ſola quantitas* y *variabilis, altera* x *pro conſtanti habita, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= qdy$. *Quibus factis, poſita utraque quantitate* x *&* y *variabili, fiet* $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y, & z, quae ſit $= V$, differentiale huiuſmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifeſtum eſt, ſi ſola quantitas x fuiſſet variabilis poſita, reliquae vero y & z conſtantes manſiſſent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiiſſet ipſius V differentiale $= pdx$. Pari modo inveniretur differentiale ipſius $V = qdy$, ſi x & z eſſent conſtantes ſolaque y poneretur variabilis; atque ſi x & y tanquam conſtantes tractarentur ſola-

que z ſtatueretur variabilis, prodiret differentiale ipſius $V = rdz$. Quare ad functionem trium pluriumve variabilium differentiandam, conſideretur ſeorſim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quaſi reliquae omnes eſſent conſtantes; tum ſingula haec differentialia, quae ex ſingulis quantitatibus variabilibus ſunt inventa, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaeſitum functionis propoſitae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium invenimus, continetur demonſtratio regulae ſupra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque unicam variabilem complectens differentiari poteſt. Si enim pro ſingulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diverſae collocentur, functio ſpeciem induet functionis totidem diverſarum variabilium, atque adeo modo hic praeſcripto differentiabitur, ſucceſſive unamquamque partem, quaſi ſola eſſet variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex ſingulis partibus oriuntur, in unam ſummam coniiciendo: quae ſumma erit differentiale quaeſitum, poſtquam pro ſingulis litteris valores fuerint reſtituti. Haec ergo regula latiſſime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Unde eius uſus per univerſum calculum differentialem eſt ampliſſimus.

216. Inventa ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiari poſſunt, eius uſum in nonnullis exemplis oſtendiſſe iuvabit.

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = xdy + ydx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; erit

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Si fuerit $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$; erit

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n(\alpha dx + \beta dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy),$$

five $dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}$ in

$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \right).$$

V. Si fuerit $V = ylx$; erit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Si fuerit $V = x^y$; erit $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Si fuerit $V = A \tang \frac{y}{x}$; erit $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$.

VIII. Si fuerit $V = \sin x. \cos y$; erit $dV = dx \cos x. \cos y - dy \sin x. \sin y$.

IX. Si fuerit $V = \frac{e^z y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; erit

$$dV = \frac{e^z ydz}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)}}.$$

X. Si fuerit $V = e^z A \sin \frac{x - \sqrt{(xx-yy)}}{x + \sqrt{(xx-yy)}}$,

reperietur $dV = e^z dz A \sin \frac{x - \sqrt{(xx-yy)}}{x + \sqrt{(xx-yy)}}$

$$+ e^z. \frac{xydy - yydx}{(x + \sqrt{(xx-yy)})(xx-yy)^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}}$$

217. Quoniam vidimus, fi V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x & y, eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV = Pdx + Qdy$, in qua fint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: fequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo

do etiam a ſe invicem pendere, propterea quod utraque ab eadem functione V pendet. Quicunque igitur ſit iſte nexus inter quantitates finitas P & Q, quem deinceps inveſtigabimus, perſpicuum eſt, non omnes formulas differentiales huiuſmodi $Pdx + Qdy$, in quibus P & Q pro lubitu ſint ex x & y formatae, poſſe eſſe differentialia cuiuſpiam functionis finitae V ipſarum x & y. Niſi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiuſmodi differentiale $Pdx + Qdy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque viciſſim integrale non habebit.

218. In integratione igitur plurimum intereſt noſſe hanc relationem inter quantitates P & Q, ut differentialia, quae revera ex differentiatione functionis cuiuſpiam finitae ſunt orta, dignoſci queant ab iis, quae ad libitum ſunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quanquam autem hic nondum integrationis negotium ſuſcipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitius inſpiciendam conveniet hanc relationem inveſtigari; quippe cuius cognitio non ſolum ad calculum integralem, ad quem hic viam paramus, eſt maxime neceſſaria, ſed etiam in ipſo calculo differentiali inſignem lucem accendit. Primum igitur patet, ſi V ſit functio duarum variabilium x & y, in eius differentiali $Pdx + Qdy$ utriuſque differentiale dx & dy ineſſe oportere. Neque ergo poteſt eſſe $P = 0$ neque $Q = 0$. Hinc ſi P fuerit functio ipſarum x & y, formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit eſſe differentiale, ſeu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale ſit Pdx.

219. Sic nulla datur quantitas finita V ſive algebraica ſive tranſcendens, cuius differentiale ſit $yxdx$, ſi quidem ſit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiuſmodi quantitatem finitam V, quia y in eius differentiale ingreditur, neceſſe eſt, ut y quoque in ipſa quantitate V inſit; verum ſi V contineret y, ob variabilitatem ipſius y ne-

necessario quoque in differentiali ipsius V differentiale dy inesse deberet. Quod tamen cum non adsit, fieri nequit, ut differentiale $yxdx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione sit ortum. Cum igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit o, & P contineat y, differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ investigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y: a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione V quantitas x prorsus evanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t. Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdy$ ubique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$, quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est ut sit

$P + Qt = o$; ideoque $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, seu erit $Px + Qy = o$, unde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t, hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y. Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y.

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y, quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$, semper ita erit comparatum, ut sit $Px + Qy = o$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y, resultabit quantitas $= o$: uti in his exemplis usu venire patet:

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy, erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit $dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde fit $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y; erit

$dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$, quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = l\frac{x + y}{x - y}$; erit $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A\sin\frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$, erit $dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y. Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n, existente T functione ipsius t, sitque

$$dT = \Theta dt, \quad \text{erit} \quad dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1} dx.$$

Quodsi ergo statuamus:

$$dV = Pdx + Qdy, \quad \text{ob} \quad dy = tdx + xdt,$$

fiet $$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt:$$

quae

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \text{ ob } V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, ut si altera sit cognita, altera facile inveniatur. Quia porro est $Qx = x^n \Theta$, erit Qx, ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y.

223. Si ergo in differentiali cuiusvis functionis homogeneae ipsarum x & y, loco dx & dy, ponatur x & y, quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si sit $V = \sqrt{(xx + yy)}$; erit $n = 1$, & ob

$$dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}}, \text{ fiet } \frac{xx + yy}{\sqrt{(xx + yy)}} = V = \sqrt{(xx + yy)}.$$

II. Si sit $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y - x)^2},$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y - x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V.$$

III. Si sit $V = \frac{1}{(yy + xx)^2}$, erit $n = -4$, atque

$dV = -\frac{4ydy + 4xdx}{(yy + xx)^3}$. Quae formula positis x & y loco dx & dy abit in $-\frac{4yy + 4xx}{(yy + xx)^3} = -4V$.

IV. Si sit $V = xxl\frac{y+x}{y-x}$; erit $n = 2$, atque $dV = 2xdxl\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}$, facta autem memorata substitutione oritur $2xxl\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

224. Similis proprietas observabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium, sit ergo V functio quantitatum x, y, z, quae coniunctim ubique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $Pdx + Qdy + Rdz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, ut sit $dy = tdx + xdt$, & $dz = sdx + xds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n, existente U functione binarum variabilium t & s; hinc ergo si statuatur $dU = pdt + qds$, fiet

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

unde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quotcunque plures variabiles extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quotcunque variabilium x, y, z, v, &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, ut si loco differentialium dx, dy, dz, dv, &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v, &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea unicae tantum variabilis x: Hoc enim casu erit V potestas ipsius x, puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia

da-

datur functio ipsius x, in qua x ubique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n. Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx, atque prodibit nax^n, hoc est nV. Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur, cum in calculo integrali maximam afferat utilitatem.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q, quae differentiale $Pdx + Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituunt, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y; atque ponamus V abire in R, si loco x ponatur $x + dx$; posito autem $y + dy$ loco y abeat V in S: quodsi autem simul $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^I. Cum itaque R oriatur ex V, posito $x + dx$ loco x, manifestum est si ulterius in R ponatur $y + dy$ loco y, tum prodire V^I; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y. Simili modo si in S ponatur $x + dx$ loco x, quia S iam orta est ex V posito $y + dy$ loco y, denuo prodibit V^I; uti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^I	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^I	y	$y + dy$
S	V^I	x	$x + dx$

227. Si igitur V ita differentietur, ut tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia po-

 sito

ſito $x+dx$ loco x, functio V abit in R, eius differentiale erit $=R-V$; at ex forma $dV=Pdx+Qdy$, ſequitur idem differentiale fore $=Pdx$, unde erit $R-V=Pdx$. Quod ſi iam loco y ponatur $y+dy$, x vero tanquam conſtans tractetur, quia R abit in V^{I} & V in S, quantitas $R-V$ abibit in $V^{I}-S$; ideoque ipſius $R-V=Pdx$ differentiale, quod oritur ſi ſola y variabilis aſſumatur, erit $V^{I}-R-S+V$. ſimili modo, cum poſito $y+dy$ loco y, abeat V in S, erit $S-V$ differentiale ipſius V poſita ſola y variabili, eritque propterea $S-V=Qdy$; nunc quia loco x poſito $x+dx$, tranſit S in V^{I} & V in R, quantitas $S-V$ abibit in $V^{I}-R$; atque ipſius $S-V=Qdy$ differentiale, quod oritur ſi ſola x variabilis ſtatuatur, erit $=V^{I}-R-S+V$, quod prorſus congruit cum differentiali ante invento.

228. Ex hac convenientia deducitur ſequens concluſio: Si functionis V cuiuſcunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV=Pdx+Qdy$, tum differentiale ipſius Pdx quod oritur ſi ſola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam conſtans tractetur, aequale erit differentiali ipſius Qdy, quod oritur ſi ſola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam conſtans tractetur. Si ſcilicet poſita ſola y variabili fuerit $dP=Zdy$ erit differentiale ipſius Pdx praeſcripto modo ſumtum $=Zdxdy$; atque poſita ſola x variabili erit quoque $dQ=Zdx$; ſic enim differentiale ipſius Qdy praeſcripto modo ſumtum fiet quoque $=Zdxdy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc conſiſtit, ut differentiale ipſius Pdx poſito x conſtante aequale ſit differentiali ipſius Qdy poſito y conſtante.

229. Iſta inſignis proprietas clarius perſpicietur, ſi eam nonnullis exemplis illuſtremus.

I. Sit igitur $V=yx$; erit $dV=ydx+xdy$, ideoque $P=y$ & $Q=x$; unde poſito x conſtante erit $d.Pdx=dxdy$, & poſito y conſtante erit $d.Qdy=dxdy$, ſicque haec duo differentialia inter ſe aequantur.

II. Sit $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; erit $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, ideoque $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, & $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, unde posito x constante erit $d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Qdy = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin Ay + y \sin Ax$; eritque
$$dV = dx \sin Ay + xdy \cos y + dy \sin Ax + ydx \cos x.$$
Quare erit
$$Pdx = dx \sin Ay + ydx \cos x,$$
& $$Qdy = dy \sin Ax + xdy \cos y.$$
Posito ergo x constante erit
$$d.Pdx = dxdy \cos y + dxdy \cos x,$$
& posito y constante erit
$$d.Qdy = dxdy \cos y + dxdy \cos x.$$

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dylx + yx^{y-1} dx$, atque $Pdx = yx^{y-1} dx$, & $Qdy = x^y dylx$.
Quamobrem posito x constante habebitur
$$d.Pdx = x^{y-1} dxdy + yx^{y-1} dxdylx,$$
& posito y constante erit
$$d.Qdy = yx^{y-1} dxdylx + x^{y-1} dxdy.$$

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, unde eximia omnium functionum, quae duas variabiles involvunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post du-

duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inverso functio V primum posita sola y variabili differentiaretur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentiaretur: utroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Zdxdy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy, horum differentialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstravimus. Ceterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§. 227) allato.

231. Relatio inter P & Q, si $Pdx + Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y, differentientur ambae posita utraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$

fit $dP = pdx + rdy$

& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit

$$dP = rdy, \quad \& \quad d.Pdx = rdxdy.$$

Deinde posito y constante erit

$$dQ = qdx, \quad \& \quad d.Qdy = qdxdy.$$

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter se aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita invicem connectuntur, ut si ambae differentientur, uti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Brevitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, ut r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, qua scriptura designatur P ita differentiari, ut sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy dividatur: sic enim prodibit quantitas finita r. Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$

quan-

quantitatem finitam q, quia hac ratione indicatur functionem Q sola x posita variabili differentiari, tumque differentiale per dx dividi debere.

232. Utamur ergo hoc scribendi modo, etiamsi alias ambiguitatem afferre possit, quae tamen hic per clausulas evitatur, ut ambages in describendis differentiandi conditionibus evitemus, sicque breviter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, ut dicamus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi scilicet fractionibus denominator praeter propriam significationem, qua numerator per eum dividi debet, indicat numeratoris differentiale ita esse capiendum, ut ea sola quantitas cuius differentiale denominatorem constituit, tanquam variabilis spectetur. Hoc enim modo per divisionem differentialia prorsus ex calculo egredientur, istaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praesenti casu erunt inter se aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, ut sit $p=\left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s=\left(\frac{dQ}{dy}\right)$, si quidem ut monitum est, differentiatio numeratoris per denominatorem restringatur.

233. Consentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis inesse ostendimus. Sit enim V functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y, ponaturque $dV = Pdx + Qdy$, atque demonstravimus fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q=\frac{nV}{y}-\frac{Px}{y}. \quad \text{Sit} \quad dP = pdx + rdy;$$

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right)=r$, cui aequale esse $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita ostendetur. Differentietur Q posita sola x variabili, & quia in hac

hac hypothesi est $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$, fiet $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$, debebitque esse
$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r \quad \text{seu} \quad (n-1)P = px + ry.$$
Quae aequalitas inde fit perspicua, quod P sit functio homogenea $n-1$ dimensionum ipsarum x & y, unde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet esse comparatum, ut sit $(n-1)P = px + ry$.

234. Ista proprietas, quod sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem esse ostendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumve variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod si igitur in hac differentiatione z tanquam constans tractaretur, foret utique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem casu per antecedentia debet esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde si quantitas y constans assumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique posito x constante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P, Q, & R ita a se invicem pendent, ut sit
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right);\ \&\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Sequitur hinc ista functionum, quae tres pluresve va-

variabiles involvunt, proprietas analoga ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, eaque continuo ter differentietur, ita ut primum una quantitatum, puta x, sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y, atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Zdxdydz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x, y, & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Zdxdydz$ pervenietur, quoniam ordo quantitatum x, y, & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, utcunque ordo quantitatum x, y, & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P, Q, & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx, quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdxdy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dxdydz$ fuerit divisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variabiles hoc ordine y, x, z, atque prima differentiatio dabit Qdy, secunda $sdxdy$, & tertia (facta divisione per $dxdydz$) dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ ut ante. Disponantur variabiles hoc ordine z, y, x, ac prima differentiatiatio dabit Rdz secunda $udydz$, tertia vero post divisionem per $dxdydz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$. At cum posito y constante fit $dQ = sdx + udz$; erit $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, uti pariter est demonstratum.

237. Ponamus esse $V = \frac{xxy}{aa - zz}$; hancque functionem toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari potest:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
posito variabili	solo x	solo y	solo z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo x	solo z	solo y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo x	solo z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo z	solo x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo x	solo y
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo y	solo x
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variabiles fuerint

rint

rint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$.

238. Uti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est perventum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus, quae secunda differentiatio suppeditavit. In iis scilicet expressio quaevis bis occurrit; unde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales, atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dxdydz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quotcunque variabilium x, y, z, v, u, &c. eaque successive aliquoties differentietur, ut semper unica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perveniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Zdxdy$, dum in altera sola x, in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est utra prius, posteriusve sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Zdxdydz$; atque viginti quatuor variis modis pervenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Zdxdydzdv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita levi attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, ut non solum has proprietates ipsi diligenter meditentur, earumque veritatem scrutentur, sed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto sibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos postmodum facilius percipere

 que-

queant. Neque vero ſolum tyrones, ſed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam ſunt imbuti, ad hoc ſunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyſeos partem hoc argumentum penitus praetermitti ſolet. Plerumque enim Auctores ſolas differentiationis regulas praeſcripſiſſe, earumque uſum in Geometria ſublimiori oſtendiſſe fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquiſiverunt; unde tamen maxima ſubſidia in calculum integralem redundant. Quam ob cauſam hoc argumentum fere novum in iſto Capite fuſius perſequi viſum eſt, quo ſimul via ad integrationes alias difficiliores pararetur, atque negotium poſtea ſuſcipiendum ſublevaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresve variabiles involventium gaudent, facile poterimus dignoſcere, utrum formula differentialis propoſita, in qua occurrunt duae pluresve variabiles, ſit orta ex differentiatione cuiuſpiam functionis finitae an ſecus. Si enim in formula $Pdx + Qdy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam exiſtere functionem ipſarum x & y, cuius differentiale ſit $= Pdx + Qdy$: neque ergo infra in calculo integrali huiuſmodi formulae integrale indagari poteſt. Sic cum in $yxdx + xxdy$ requiſita conditio non adſit, nulla datur functio, cuius differentiale eſt $= yxdx + xxdy$. Utrum autem ſemper, quoties eſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ formula ex differentiatione cuiuſpiam functionis ſit orta, quaeſtio eſt, quae demum ex integrationis principiis ſolide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali propoſita tres pluresve inſint variabiles, uti $Pdx + Qdy + Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxiſſe omnino nequit, niſi tres iſtae conditiones in ea locum habeant, ut ſit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right);$$

Quarum conditionum, si una tantum desit, certo affirmare debemus, nullam extare functionem ipsarum $x, y, \& z$, cuius differentiale sit $Pdx + Qdy + Rdz$; huius modi ergo formularum differentialium nequidem requiri possunt integralia, hincque integrationem prorsus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignosci oportere, utrum integrationis sint capaces, quam investigatio integralis actu suscipiatur.

CA-