CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium seu non algebraicarum genera, quae calculus integralis suppeditabit, in Introductione ad analysin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis usitatarum nobis pervenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus suggesserat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide exposuimus, ut fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite investigabimus, quo earum indoles ac proprietates clarius perspiciantur; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium est fons proprius, patefiat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicae, seu eiusmodi functiones ipsius x, quae praeter expressiones algebraicas quoque logarithmum ipsius x, seu cuiusvis ipsius functionis involvunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius facessant, omnis difficultas in inveniendo differentiali logarithmi cuiusque ipsius x functionis erit posita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diversa, quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumtus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio huius

huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob caufam lp perpetuo hic defignabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p.

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x, ponaturque $y = lx$, ita ut differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x, ficque tranfibit y in $y^{I} = y + dy$; quare habebitur

$$y + dy = l(x + dx) \text{ \& } dy = l(x + dx) - lx = l\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

At iam fupra logarithmum hyperbolicum huiufmodi expreffionis $1 + z$ ita per feriem infinitam expreffimus, ut effet

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{\&c.}$$

Pofito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z, obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{\&c.}$$

Cum igitur huius feriei omnes termini prae primo evanefcant, erit $d.\, lx = dy = \frac{dx}{x}$. Unde alius cuiufcunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio eft ut $n : 1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181. Si igitur cuiufque ipfius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale effe $= \frac{dp}{p}$, unde ad logarithmorum differentialia invenienda haec habetur regula. *Quantitatis* p, *cuius logarithmus proponitur, fumatur differentiale, hocque per ipfam quantitatem* p *divifum dabit differentiale logarithmi quaefitum.* Se-

quitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^0 - 1^0}{0}$, ad quam superiori libro logarithmum ipsius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum sit

$$lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}: \quad \text{erit} \quad d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p} \text{ ob } \omega = 0.$$

Notandum autem est $\frac{dp}{p}$ esse differentiale logarithmi hyperbolici ipsius p; ita ut, si logarithmus vulgaris ipsius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inveniri poterit, quemadmodum ex sequentibus exemplis perspicietur:

I. Si sit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si sit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$, ut sit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At est $dp = nx^{n-1}dx$, unde fit $dy = \frac{ndx}{x}$.

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim sit $lx^n = nlx$, erit $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Si sit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2xdx}{1+xx}$.

IV. Si sit $y = l\frac{1}{\surd(1-xx)}$; quia erit $y = -l\surd(1-xx)$ $= -\frac{1}{2}l(1-xx)$, invenitur $dy = \frac{xdx}{1-xx}$.

V.

V. Si fit $y = l\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$,

fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si fit $y = l(x+\sqrt{(1+xx)})$, fiet

$$dy = \frac{dx + xdx:\sqrt{(1+xx)}}{x+\sqrt{(1+xx)}} = \frac{xdx + dx\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$$

cuius fractionis cum numerator ac denominator per $x+\sqrt{(1+xx)}$ fit divisibilis fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

VII. Si fit $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$, ponatur $x\sqrt{-1} = z$. Atque ob $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(z+\sqrt{(1+zz)})$, erit per praecedens $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}dz:\sqrt{(1+zz)}$.

Quare, ob $dz = dx\sqrt{-1}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Quamvis ergo logarithmus propositus imaginaria involvat, tamen eius differentiale fit reale.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resolvetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit

$y = lp + lq + lr + ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$.

Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim

$y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp + lq - lr - ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$.

Neque etiam potestates difficultatem movebunt, si enim fue-

fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$,

erit $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum $dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2}l(1+x) - \frac{1}{2}l(1-x)$,

hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si sit $y = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, ob $y = \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}+x)$ $-\frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} =$ $\frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$. Hoc idem facilius invenitur, si in fractione $\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per $\sqrt{(1+xx)}+x$, prodibit enim

$$y = \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}+x)^2 = l(\sqrt{(1+xx)}+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

IV. Si sit $y = l\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}$. Ponatur huius fractionis numerator $\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)} = p$ & denominator $\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)} = q$, erit $y = l\frac{p}{q} = lp - lq$,

& $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$. Est vero $dp = \frac{dx}{2\surd(1+x)} - \frac{dx}{2\surd(1-x)} = \frac{-dx}{2\surd(1-xx)}(\surd(1+x) - \surd(1-x)) = \frac{-qdx}{2\surd(1-xx)}$; & $dq = \frac{dx}{2\surd(1+x)} + \frac{dx}{2\surd(1-x)} = \frac{pdx}{2\surd(1-xx)}$. Hinc fiet $\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-qdx}{2p\surd(1-xx)} - \frac{pdx}{2q\surd(1-xx)} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pq\surd(1-xx)}$. At est $pp + qq = 4$ & $pq = 2x$, unde erit $dy = -\frac{dx}{x\surd(1-xx)}$. Hoc autem differentiale facilius invenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y = l\,\frac{1+\surd(1-xx)}{x} = l\left(\frac{1}{x} + \surd\left(\frac{1}{xx} - 1\right)\right).$$

Posito enim $\frac{1}{x} + \surd\left(\frac{1}{xx} - 1\right) = p$, erit

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\surd\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\surd(1-xx)}$$

$= \frac{-dx(1+\surd(1-xx))}{xx\surd(1-xx)}$, ideoque, ob $p = \frac{1+\surd(1-xx)}{x}$, erit $dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\surd(1-xx)}$ ut ante.

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx dividantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inveniuntur, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$y =$

$$y = lx \;, \qquad \text{erit}$$

$$dy = \frac{dx}{x} \;, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2} \;, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3} \;, \quad \& \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4} \;, \& \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4}$$

Atque si p fuerit quantitas algebraica, sitque $y = lp$, etiamsi y non sit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipsius x.

185. Exposita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis solis componuntur; uti ex sequentibus exemplis fiet perspicuum.

I. Si sit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x}\, lx$.

II. Simili modo si sit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, unde, si sit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque si p fuerit functio quaecunque ipsius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia assignari possit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum.

IV. Si sit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quae-

cunque ipſius x, per regulam factorum ſupra datam erit
$$dy = \frac{dp}{p}\, lq + \frac{dq}{q}\, lp.$$

V. Si ſit $y = xlx$; erit per eandem regulam
$$dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx.$$

VI. Si ſit $y = x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione ſecundum partes inſtituta, reperietur $d.x^m lx = mx^{m-1} dxlx + x^{m-1} dx$, & $d.\frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, unde erit $dy = mx^{m-1} dxlx$.

VII. Si ſit $y = x^m (lx)^n$, fiet $dy = mx^{m-1} dx (lx)^n + nx^{m-1} dx (lx)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, uti ſi fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at eſt $dp = \frac{dx}{x}$; unde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Atque ſi fuerit $y = lllx$, ſi ſtatuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{plp}$; at eſt $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus ſubſtitutis habebitur $dy = \frac{dx}{xlx.llx}$.

186. Expoſita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, ſeu eiuſmodi poteſtates, quarum exponentes ſint variabiles. Huiuſmodi autem ipſius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inveniri poſſunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipſius a^x, ad quod inveſtigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis ſumendis $ly = xla$. Sumantur iam differentialia, atque obti-

 nebi-

nebitur $\frac{dy}{y} = dxla$; unde fit $dy = ydxla$, cum autem fit $y = a^x$, erit $dy = a^x dxla$, quod est differentiale ipsius a^x. Simili modo, si fit p functio quaecunque ipsius x, huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dpla$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione exposita deduci potest. Sit enim proposita a^p, denotante p functionem quamcunque ipsius x, quae, posito $x + dx$ loco x, abeat in $p + dp$. Unde si ponatur $y = a^p$, si x abeat in $x + dx$, erit $y + dy = a^{p+dp}$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Ostendimus autem supra, quamvis quantitatem exponentialem a^z, per huiusmodi seriem exprimi $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} +$ &c.

unde erit $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} +$ &c., & $a^{dp} - 1 = dpla$,

quia sequentes termini prae $dpla$ omnes evanescunt. Consequenter erit $dy = d.a^p = a^p dpla$. *Quare quantitatis exponentialis* a^p *differentiale erit productum ex ipsa quantitate exponentiali, exponentis differentiali* dp, *& logarithmo quantitatis constantis* a, *quae ad exponentem variabilem est evecta.*

188. Si igitur e fit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, ut fit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque si dx sumatur constans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod est differentiale secundum ipsius e^x. Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare si fit

$$y = e^{nx}, \quad \text{erit} \quad \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$$

$$\text{porroque} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}; \quad \&c.$$

Unde patet ipsius e^{nx} differentialia primum, secundum & reli-

reliqua sequentia constituere progressionem geometricam: eritque ergo differentiale ordinis m ipsius $e^{nx} = y$, nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y dx^m}$ quantitas constans n^m.

189. Si ipsa quantitas, quae elevatur, fuerit variabilis, eius differentiale simili modo investigabitur. Sint p & q functiones quaecunque ipsius x, ac proponatur quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit $ly = qlp$, quibus differentiatis erit $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, unde fit

$dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$, ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale constat duobus membris, quorum prius $p^q dqlp$ oritur, si quantitas proposita p^q ita differentietur, quasi p esset quantitas constans, solusque exponens q variabilis: alterum vero membrum $qp^{q-1}dp$ oritur, si in quantitate proposita p^q exponens q tanquam constans spectetur, solaque quantitas p, quasi esset variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per regulam generalem differentiandi supra traditam inveniri potuisset.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, utique $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resolvatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)p^{q+dq-1}dp + \frac{(q + dq)}{1.}\frac{(q + dq - 1)}{2}p^{q+dq-2}dp^2 + \&c.$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1}dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates involvunt, prae $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ evanescunt. At est

 p^q

$p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q\left(1 + dqlp + \frac{dq^2(lp)^2}{2} + \&c. - 1\right)$ $= p^q dqlp$. In altero vero termino $(q+dq)p^{q+dq-1}dp$ si loco $q + dq$ scribamus q, orietur $qp^{q-1}dp$, ideoque differentiale erit ut ante $dy = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium investigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, sit $p^q = e^{qlp}$, utriusque enim logarithmus est idem qlp; erit $y = e^{qlp}$. Quare, cum nunc quantitas elevata e sit constans, erit $dy = e^{qlp}\left(dqlp + \frac{qdp}{p}\right)$, uti ante ostendimus in regula §. 187. data. Restituatur igitur p^q loco e^{qlp}, fietque

$$dy = p^q dqlp + p^q qdp : p = p^q dqlp + qp^{q-1}dp.$$

Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dxlx + x^x dx$; atque hinc quoque eius ulteriora differentialia definientur: reperietur enim:

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1+lx)^3 + \frac{3(1+lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$

&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatione formulae $e^x p$ originem habent; est autem

$$d.\, e^x p = e^x dp + e^x pdx = e^x(dp + pdx).$$

I. Si sit $y = e^x x^n$; erit $dy = e^x nx^{n-1}dx + e^x x^n dx$
seu $dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n)$

II. Si sit $y = e^x(x - 1)$
Erit $dy = e^x xdx$.

III.

III. Si sit $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$
Erit $dy = e^x xxdx$.

IV. Si sit $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$
Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta instituetur. Sic si haec quantitas e^{e^x} differentiari debeat, statuatur $e^x = p$, ut sit $y = e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at est $dp = e^x dx$, unde si fuerit

$$y = e^{e^x}; \text{ erit } dy = e^{e^x} e^x dx,$$

$$\text{atque si sit } y = e^{e^{e^x}}; \text{ erit } dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Quod si vero fuerit $y = p^{q^r}$, statuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dzlp + zp^{z-1}dp$, at $dz = q^r drlq + rq^{r-1}dq$, unde $dy = p^z q^r drlp.lq + p^z rq^{r-1}dqlp + p^z q^r dp : p$.

Quare si sit:

$$y = p^{q^r}, \text{ erit } dy = p^{q^r} q^r \left(drlp.lq + \frac{rdqlp}{q} + \frac{dp}{p}\right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inveniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem consideratio arcuum circularium nos supra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium constanter ponimus unitati aequalem, propositus arcus, cuius sinus sit

=

$= x$, quem arcum hoc modo exprimamus A. sin. x, huiusque arcus differentiale investigemus, seu incrementum quod accipit, si sinus x differentiali suo dx augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praestari potest, cum in introductione ostendimus hanc expressionem A sin x reduci posse ad hanc logarithmicam:

$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$. Posito ergo $y = \text{A sin}\, x$, erit quoque $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}}$$

unde fit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

195. Istud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius sine logarithmorum subsidio inveniri potest. Si enim sit $y = \text{A sin}\, x$, erit x sinus arcus y, seu $x = \sin y$. Cum igitur, posito $x + dx$ loco x, abeat y in $y + dy$, fiet $x + dx = \sin(y + dy)$. At quia est

$\sin(a + b) = \sin a. \cos b + \cos a. \sin b$, erit

$\sin(y + dy) = \sin y. \cos dy + \cos y. \sin dy$:

arcus autem evanescentis dy sinus ipsi illi arcui dy, eiusque cosinus sinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$\sin(y+dy) = \sin y + dy \cos y$, ideoque $x + dx = \sin y + dy \cos y$. Quia vero est

$\sin y = x$, erit cosinus ipsius y seu $\cos y = \sqrt{(1-xx)}$, quibus valoribus substitutis, erit $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$, ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Ar-

Arcus ergo, cuius sinus proponitur, differentiale aequatur differentiali sinus per cosinum diviso.

196. Cum igitur, si p fuerit functio quaecunque ipsius x, atque y denotet arcum, cuius sinus est $= p$, seu $y = \text{A} \sin p$, fit huius arcus differentiale $dy = \frac{dp}{\surd(1 - pp)}$, ubi $\surd(1 - pp)$ exprimit cosinum eiusdem arcus, inveniri quoque poterit differentiale arcus, cuius cosinus proponitur. Sit enim $y = \text{A} \cos x$, erit eiusdem arcus sinus $= \surd(1 - xx)$, ideoque $y = \text{A} \sin \surd(1 - xx)$. Facto ergo $p = \surd(1 - xx)$, erit $dp = \frac{-x dx}{\surd(1 - xx)}$, & $\surd(1 - pp) = x$; unde fiet $dy = \frac{-dx}{\surd(1 - xx)}$. *Arcus ergo, cuius cosinus proponitur, differentiale aequatur differentiali cosinus negative sumto, atque per sinum eiusdem arcus diviso.* Quod etiam hoc modo ostendi potest: si sit $y = \text{A} \cos x$, ponatur $z = \text{A} \sin x$, erit $dz = \frac{dx}{\surd(1 - xx)}$ at arcus $y + z$ simul sumti dant arcum constantem 90°, eritque $y + z =$ constans ideoque $dy + dz = 0$, seu $dy = -dz$; unde fit $dy = \frac{-dx}{\surd(1 - xx)}$, ut ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita ut sit $y = \text{A} \tang x$. Arcus autem cuius tangens est x, sinus erit $= \frac{x}{\surd(1 + xx)}$, & cosinus $= \frac{1}{\surd(1 + xx)}$. Posito ergo $\frac{x}{\surd(1 + xx)} = p$, ut sit $\surd(1 - pp) = \frac{1}{\surd(1 + xx)}$, fiet $y = \text{A} \sin p$: unde per regulam modo datam erit $dy = \frac{dp}{\surd(1 - pp)}$. At, ob $p = \frac{x}{\surd(1 + xx)}$, erit $dp = \frac{dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}}$;

qui-

quibus valoribus substitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. *Arcus ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur differentiali tangentis per quadratum secantis diviso.* Est enim $\sqrt{(1+xx)}$ secans, si x sit tangens.

198. Simili modo si proponatur arcus, cuius cotangens datur, ita ut sit $y = \text{A}\cot x$; quia eiusdem arcus tangens est $= \frac{1}{x}$, posito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = \text{A tang}\, p$, ac propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc sit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta substitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod est differentiale cotangentis negative sumtum, atque per quadratum cosecantis divisum. Porro si proponatur $y = \text{A sec}\, x$, quia est $y = \text{A cos}\frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Atque, si sit $y = \text{A cosec.}\, x$, erit $y = \text{A sin}\frac{1}{x}$, ideoque $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Saepe etiam sinus versus occurrit, ita si proponatur $y = \text{A sv.}\, x$, quia est $y = \text{A cos}(1-x)$, huiusque arcus sinus est $= \sqrt{(2x-xx)}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

199. Quamquam ergo arcus, cuius sinus, vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel denique sinus versus datur, est quantitas transcendens, tamen eius differentiale, si per dx dividatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia secunda, tertia, quarta &c. si per potestates ipsius dx convenientes dividantur.

tur.

tur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus sequentia exempla.

I. Si sit $y = A\sin 2x\sqrt{(1-xx)}$, ponatur $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$, ut sit $y = A\sin p$, eritque $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At est

$$dp = 2\,dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2\,dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}},$$

& $\sqrt{(1-pp)} = 1-2xx$, quibus valoribus substitutis, erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\sqrt{(1-xx)}$ sit sinus arcus dupli, dum x est sinus simpli, erit ergo $y = 2\,A\sin x$, ideoque $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Si sit $y = A\sin\frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ & $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, erit $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III. Si sit $y = A\sin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, ponatur $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$, erit $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, & $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)}}$, unde fit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Si sit $y = A\,\mathrm{tang}\,\frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$, erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197); erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si sit $y = \text{A tang}\, \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, posito $p = \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, & $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$. Atqui $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod etiam inde intelligitur, quod sit $\text{A tang}\, \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = \frac{1}{2}\,\text{A tang}\, x$.

VI. Si sit $y = e^{\text{A sin}\, x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{\text{A sin}\, x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ Hoc ergo modo omnes functiones ipsius x, in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx divisa sunt quantitates algebraicae, eorum differentialia secunda & sequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione exposuimus, invenientur. Sit $y = \text{A sin}\, x$, quia est $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, cuius differentiale dabit valorem pro

ddy

$\frac{ddy}{dx^2}$, si quidem dx sumatur constans: unde differentialia ipsius y cuiusvis ordinis ita se habebunt.

Si sit $y = A \sin x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}; \text{ \& sumto } dx \text{ constante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

unde concludimus ut supra §. 177. fore generaliter:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}x^{n-6} + \text{\&c.}\right)$$

201. Supersunt quantitates, quae ex harum inversione nascuntur, scilicet sinus, tangentesve arcuum datorum, quas quomodo differentiare oporteat, ostendamus. Sit igitur x arcus circuli,

 &

& sin x denotet eius sinum, cuius differentiale investigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x + dx$ loco x, quia y abit in $y + dy$, erit $y + dy = \sin(x + dx)$, & $dy = \sin(x + dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x + dx) = \sin x . \cos dx + \cos x . \sin dx$. atque cum sit, uti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d . \sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x, cuius differentiale investigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x + dx$ loco x, fiet $y + dy = \cos(x + dx)$. Est vero $\cos(x + dx) = \cos x . \cos dx - \sin x . \sin dx$, & quia ut modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y + dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = -dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negative sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x, erit $d . \cos p = -dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = \sqrt{(1 - yy)}$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, ut ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $\sqrt{(1 - yy)} = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{-dy}{\sin p}$, unde fit ut ante $dy = -dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \operatorname{tang} x$, erit $dy = \operatorname{tang}(x + dx) - \operatorname{tang} x$; at est $\operatorname{tang}(x + dx) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} dx}{1 - \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} dx}$, a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit $dy = \frac{\operatorname{tang} dx (1 + \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} x)}{1 - \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} dx}$. Verum arcus evanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque $\operatorname{tang} dx = dx$, & denominator $1 - dx \operatorname{tang} x$, abit in unitatem: quocirca fiet $dy = dx(1 + \operatorname{tang} x^2)$. Est vero $1 + \operatorname{tang} x^2 = \sec x^2 = \frac{1}{\operatorname{cos} x^2}$, denotante $\operatorname{cos} x^2$ quadratum cosinus ipsius x: consequenter si fuerit $y = \operatorname{tang} x$, erit $dy = dx \sec x^2 = \frac{dx}{\operatorname{cos} x^2}$. Quod differentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inveniri potest; cum enim sit $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\operatorname{cos} x}$, erit

$$dy = \frac{dx \operatorname{cos} x . \operatorname{cos} x + dx \sin x . \sin x}{\operatorname{cos} x^2} = \frac{dx}{\operatorname{cos} x^2}.$$

ob $\sin x^2 + \operatorname{cos} x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale invenitur. Cum sit $y = \operatorname{tang} x$, erit $x = A \operatorname{tang} y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. At cum sit $y = \operatorname{tang} x$, erit $\sqrt{(1 + yy)} = \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$, ideoque $dx = dy \operatorname{cos} x^2$, & $dy = \frac{dx}{\operatorname{cos} x^2}$, ut ante. *Tangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diviso per quadratum cosinus eiusdem arcus.* Simili modo si proponatur $y = \operatorname{cot} x$, fiet $x = A \operatorname{cot} y$, & $dx = \frac{-dy}{1 + yy}$. At vero erit

$\sqrt{(1+yy)} = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sin}\, x}$, unde habebitur $dx = -dy\, \text{sin}\, x^2$, & $dy = \frac{-dx}{\text{sin}\, x^2}$. *Cotangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus negative sumto ac per quadratum sinus eiusdem arcus diviso.* Vel quia est $\text{cot}\, x = \frac{\text{cos}\, x}{\text{sin}\, x}$, fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx\, \text{sin}\, x^2 - dx\, \text{cos}\, x^2}{\text{sin}\, x^2} = \frac{-dx}{\text{sin}\, x^2},$$

uti modo invenimus.

205. Si proponatur secans arcus, ut sit $y = \text{sec}\, x$, quia erit $y = \frac{1}{\text{cos}\, x}$, erit $dy = \frac{dx\, \text{sin}\, x}{\text{cos}\, x^2} = dx\, \text{tang}\, x.\ \text{sec}\, x$. Simili modo si fuerit $y = \text{cosec}\, x$, ob $y = \frac{1}{\text{sin}\, x}$, erit $dy = \frac{-dx\, \text{cos}\, x}{\text{sin}\, x^2} = -dx\, \text{cot}\, x\, \text{cosec}\, x$, pro quibus casibus peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur $y = \text{sv.}\, x$, quia est $y = 1 - \text{cos}\, x$, erit $dy = dx\, \text{sin}\, x$. Omnes ergo casus, quibus linea quaepiam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per sinum cosinumve exprimi potest, sine difficultate differentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia prima, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas invenientur. Ponamus esse $y = \text{sin}\, x$ & $z = \text{cos}\, x$, atque dx esse constans: erit ut sequitur:

$y = \text{sin}\, x$	$z = \text{cos}\, x$
$dy = dx\, \text{cos}\, x$	$dz = -dx\, \text{sin}\, x$
$ddy = -dx^2\, \text{sin}\, x$	$ddz = -dx^2\, \text{cos}\, x$
$d^3 y = -dx^3\, \text{cos}\, x$	$d^3 z = dx^3\, \text{sin}\, x$
$d^4 y = dx^4\, \text{sin}\, x$	$d^4 z = dx^4\, \text{cos}\, x$
&c.	&c.

206.

206. Simili modo inveniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x. Sit enim $y = \mathrm{tang}\, x = \frac{\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x}$, & ponatur dx conftans, erit

$$y = \frac{\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{cof}\, x^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\mathrm{cof}\, x^4} - \frac{4}{\mathrm{cof}\, x^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^5} - \frac{8\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^3}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\mathrm{cof}\, x^6} - \frac{120}{\mathrm{cof}\, x^4} + \frac{16}{\mathrm{cof}\, x^2}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^7} - \frac{480\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^5} + \frac{32\,\mathrm{fin}\, x}{\mathrm{cof}\, x^3}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\mathrm{cof}\, x^8} - \frac{6720}{\mathrm{cof}\, x^6} + \frac{2016}{\mathrm{cof}\, x^4} - \frac{64}{\mathrm{cof}\, x^2}$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas finus vel cofinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, uti ex fequentibus exemplis videre licet.

I. Si fit $y = 2\,\mathrm{fin}\, x . \mathrm{cof}\, x = \mathrm{fin}\, 2x$

Erit $dy = 2\, dx\, \mathrm{cof}\, x^2 - 2\, dx\, \mathrm{fin}\, x^2 = 2\, dx\, \mathrm{cof}\, 2x$.

II. Si fit $y = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{cof}\, x}{2}}$, vel $y = \mathrm{fin}\, \frac{1}{2} x$

Erit

Erit $dy = \frac{dx \sin x}{2\sqrt{2(1 - \cos x)}}$. Cum autem ſit $\sqrt{2(1 - \cos x)} = 2 \sin \tfrac{1}{2} x$, & $\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x$; fiet $dy = \tfrac{1}{2} dx . \cos \tfrac{1}{2} x$, uti ex forma $y = \sin \tfrac{1}{2} x$ immediate ſequitur.

III. Si ſit $y = \cos l \frac{1}{x}$; erit, poſito $l \frac{1}{x} = p$, $y = \cos p$, & $dy = -dp \sin p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x} \sin l \frac{1}{x}$.

IV. Si ſit $y = e^{\sin x}$; erit $dy = e^{\sin x} dx \cos x$.

V. Si ſit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}} n dx \sin x}{\cos x^2}$.

VI. Si ſit $y = l\left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)$; ponatur $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1 - \sqrt{(1 - p)})$, erit

$$dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}.$$ At eſt $$dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n dx \cos x}{\sin x^2}.$$

Quo valore ſubſtituto prodibit

$$dy = \frac{n e^{\frac{-n}{\sin x}} dx \cos x}{2 \sin x^2 \left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)\sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}}$$

CA-