CAPUT V.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM UNICAM VARIABILEM INVOLVENTIUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale eſt $= dx$ erit x in proximum promovendo $x^{I} = x + dx$. Quare ſi fuerit y quaecunque functio ipſius x, ſi in ea loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^{I}, atque differentia $y^{I} - y$ dabit differentiale ipſius y. Si igitur ponamus $y = x^{n}$ fiet

$$y^{I} = (x + dx)^{n} = x^{n} + nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\,x^{n-2}\,dx^{2} + \&c.$$

eritque ergo

$$dy = y^{I} - y = nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\,x^{n-2}\,dx^{2} + \&c.$$

At in hac expreſſione terminus ſecundus cum reliquis ſequentibus prae primo evaneſcit, eritque idcirco $nx^{n-1}\,dx$ differentiale ipſius x^{n}, ſeu $d.x^{n} = nx^{n-1}\,dx$. Unde ſi a ſit numerus ſeu quantitas conſtans, erit quoque $d.ax^{n} = nax^{n-1}\,dx$. Cuiuſcunque ergo ipſius x poteſtatis differentiale invenitur, multiplicando eam per exponentem, dividendo per x, & reliquum per dx multiplicando, quae regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipſius x^{n}, ex eo facile differentiale ſecundum reperitur, dummodo, ut hic conſtanter aſſumemus, differentiale dx conſtans ſtatuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}\,dx$ factor ndx ſit conſtans, alterius factoris x^{n-1} differentiale ſumi debet, quod proinde erit $(n-1)\,x^{n-2}\,dx$. Hoc ergo per ndx multiplicatum dabit diffe-

ren-

rentiale secundum : $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo si differentiale ipsius x^{n-2} quod est $= (n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d.^3 x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d.^4 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d.^5 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

unde simul forma sequentium differentialium facillime colligitur.

154. Quoties ergo n est numerus integer affirmativus, toties ad differentialia tandem pervenitur evanescentia; quae scilicet ita sunt $=0$, ut prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescant. Horum autem notandi sunt casus simpliciores.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3 x = 0$; &c.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3 x^2 = 0$; $d.^4 x^2 = 0$ &c.

$d.x^3 = 3x^2 dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3 x^3 = 6dx^3$; $d.^4 x^3 = 0$

$d.x^4 = 4x^3 dx$; $dd.x^4 = 12x^2 dx^2$; $d.^3 x^4 = 24xdx^3$; $d.^4 x^4 = 24dx^4$

$d.x^5 = 5x^4 dx$; $dd.x^5 = 20x^3 dx^2$; $d.^3 x^5 = 60x^2 dx^3$; $d.^4 x^5 = 120xdx^4$; $d.^5 x^5 = 120dx^5$; $d.^6 x^5 = 0$.

Patet ergo si n fuerit numerus integer affirmativus, potestatis x^n differentiale ordinis n esse constans, nempe $= 1.2.3 \ldots ndx^n$, adeoque differentialia superiorum ordinum omnium esse $=0$.

155. Si n sit numerus integer negativus, huiusmodi ipsius x potestatum negativarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, &c. differentialia sumi poterunt, cum sit $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur

$n = -m$, erit ipsius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$; differentiale secundum $= \frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$ &c. unde sequentes casus simpliciores imprimis notari merentur.

$$d.\,\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2};\quad dd.\,\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3};\quad d.^3\,\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4}$$
$$d.\,\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3};\quad dd.\,\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4};\quad d.^3\,\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5}$$
$$d.\,\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4};\quad dd.\,\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5};\quad d.^3\,\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6}$$
$$d.\,\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5};\quad dd.\,\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6};\quad d.^3\,\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7}$$
$$d.\,\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6};\quad dd.\,\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7};\quad d.^3\,\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8}$$
&c.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ differentiale primum

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$ secundum

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}$$ &c.

Hinc

Hinc erit:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,;\quad dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}\,;\quad d^3\sqrt{x} = \frac{1.3dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\,;\quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\,;\quad d^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}\,;\quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}\,;\quad d^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquiretur huiusmodi differentialia, etiam sine praevia reductione ad formam potestatis, inveniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius sive affirmativus sive negativus integer, differentialia aeque facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriventur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

$$d.x\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}dx\sqrt{x}\,;\quad d.x^2\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}xdx\sqrt{x}\,;\quad d.x^3\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}x^2dx\sqrt{x}\,;$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}\,;\quad d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}\,;\quad d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}}\,;$$

$$d.\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,;\quad d.x\sqrt[3]{x} = \tfrac{4}{3}dx\sqrt[3]{x}\,;\quad d.x\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2}\,;$$

$$d.xx\sqrt[3]{x} = \tfrac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x}\,;\quad d.xx\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2}\,;\quad \&c.$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}\,;\quad d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}\,;\quad d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}\,;$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}\,;\quad d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}\,;\quad \&c.$$

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integrarum differentialia poterunt inveniri, propterea quod earum singuli termini sunt potestates ipsius x, quas

quas differentiare novimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p+q+r+s+$ &c. posito $x+dx$ loco x abeat in $p+dp+q+dq+r+dr+s+ds+$ &c. erit eius differentiale $=dp+dq+dr+ds+$ &c. Quare si singularum quantitatum p, q, r, s, differentialia assignare queamus, simul quoque aggregati earum differentiale innotescet. Atque cum multipli ipsius p differentiale sit aeque multiplum ipsius dp, hoc est $d.\,ap=adp$; erit quantitatis $ap+bq+cr$ differentiale $=adp+bdq+cdr$. Cum denique quantitatum constantium differentialia sint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap+bq+cr+f$ differentiale $=adp+bdq+cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum singuli termini sint vel constantes vel potestates ipsius x, differentiatio secundum praecepta data facile absolvetur. Sic erit:

$d(a+x)=dx$; $d(a+bx)=bdx$;

$d(a+xx)=2xdx$; $d(aa-xx)=-2xdx$;

$d(a+bx+cxx)=bdx+2cxdx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3)=bdx+2cxdx+3ex^2dx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)=bdx+2cxdx+3ex^2dx+4fx^3dx$.

Atque si exponentes fuerint indefiniti erit:

$d(1-x^n)=-nx^{n-1}dx$; $d(1+x^m)=mx^{m-1}dx$;

$d(a+bx^m+cx^n)=mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx$.

160. Cum igitur functiones rationales integrae secundum maximam ipsius x dignitatem in gradus distinguantur, manifestum est, si huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri constantia, posteaque in nihilum abire, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx est constans, secundum cum sequentibus nullum. Sit functio secundi gradus

$$a+bx+cxx=y;\ \text{erit}\ dy=bdx+2cxdx;$$
$$ddy=2cdx^2;\ d^3y=0.$$

Si-

Simili modo si ponatur functio tertii gradus $a+bx+cxx+ex^3=y$; erit $dy=bdx+2cxdx+3exxdx$; $ddy=2cdx^2+6exdx^2$ & $d^3y=6edx^3$ atque $d^4y=0$. Quare generaliter si huiusmodi functio sit gradus n, eius differentiale ordinis n erit constans, & sequentia omnia nulla.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, si inter potestates ipsius x, quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes sint numeri negativi seu fracti. Ita

I. Si sit $y=a+b\sqrt{x}-\dfrac{c}{x}$

erit $dy=\dfrac{bdx}{2\sqrt{x}}+\dfrac{cdx}{xx}$.

II. Si sit $y=\dfrac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-ex$

erit $dy=\dfrac{-adx}{2x\sqrt{x}}+\dfrac{cdx}{2\sqrt{x}}-edx$,

& $ddy=\dfrac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}}-\dfrac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$.

III. Si sit $y=a+\dfrac{b}{\sqrt[3]{xx}}-\dfrac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\dfrac{f}{xx}$

erit $dy=\dfrac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}}+\dfrac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2fdx}{x^3}$

& $ddy=\dfrac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}}-\dfrac{28cdx^2}{9x^2\sqrt[3]{x}}+\dfrac{6fdx^2}{x^4}$.

cuiusmodi exempla secundum praecepta data facillime absolvuntur.

162. Si quantitas differentianda proposita fuerit potestas eiusmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta sufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipsius x, cuius differentiale dp in potestate est, erit ipsius potestatis p^n differentiale primum $= np^{n-1}dp$. Hinc sequentia exempla solvuntur:

I. Si sit $y = (a+x)^n$; erit $dy = n(a+x)^{n-1}dx$

II. Si sit $y = (aa-xx)^2$; erit $dy = -4xdx(aa-xx)$

III. Si sit $y = \frac{1}{aa+xx}$ seu $y = (aa+xx)^{-1}$

erit $dy = \frac{-2xdx}{(aa+xx)^2}$.

IV. Si sit $y = \sqrt{(a+bx+cxx)}$; erit $dy = \frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{(a+bx+cxx)}}$.

V. Si sit $y = \sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}$ seu $y = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3}x^3dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)}}$.

VI. Si sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ seu $y = (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = xdx(1-xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1-xx)\sqrt{(1-xx)}}$.

VII. Si sit $y = \sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)}$

erit $dy = \frac{dx\sqrt{b} : 2\sqrt{x}+dx}{3\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b}+2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}}$.

VIII. Si sit $y = \frac{1}{x+\sqrt{(aa-xx)}}$, ob $d.\sqrt{(aa-xx)} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2} = \frac{xdx - dx\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2\sqrt{(aa-xx)}}$$

seu $dy = \frac{dx(x-\sqrt{(aa-xx)})^3}{(2xx-aa)^2\sqrt{(aa-xx)}}$.

IX. Si sit $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1-xx)^2} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$, erit $dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1-p+q)}}$.

Iam per antecedentia est $dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$ & $dq = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}}$,

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4xdx : \sqrt[3]{(1-xx)}}{4\sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusve functionibus ipsius x, quarum differentialia constant, eius differentiale sequente modo commodissime invenietur. Sint p & q functiones ipsius x, quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x+dx$ loco x; p abit in $p+dp$ & q in $q+dq$: productum pq transmutabitur in $(p+dp)(q+dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$. Unde pro-

producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$; ubi cum pdq & qdp ſint infinite parva primi ordinis, at $dpdq$ ſecundi ordinis, ultimus terminus evaneſcet, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$. Differentiale ergo producti pq conſtat ex duobus membris, quae obtinentur, ſi uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus conſtantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.\, pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + rdq$, quibus valoribus loco z & dz ſubſtitutis erit $d.\, pqr = pqdr + prdq + qrdp$. Simili modo ſi quantitas differentianda quatuor habeat factores erit: $d.\, pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp$: unde quilibet differentiationem plurium factorum facile perſpiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a+x)(b-x)$, erit

$$dy = -dx\,(a+x) + dx\,(b-x) = -adx + bdx - 2xdx$$

quod idem differentiale quoque invenitur, ſi quantitas propoſita evolvatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per ſuperiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $\sqrt{(aa - xx)} = q$, quia eſt $dp = \frac{-dx}{xx}$

& $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt

$$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}.$$ Hinc erit differentiale quaeſitum, $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$.

III.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4+x^4)}}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = q$; quia invenimus $dp = 2xdx$ & $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)\sqrt{(a^4+x^4)}}.$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x+\sqrt{(1+xx)}} = q$, ob $dp = dx$ & $dq = \frac{-dx - xdx:\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2} = \frac{-dx(x+\sqrt{(1+xx)})}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2\sqrt{(1+xx)}}$ $= \frac{-dx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$, erit $pdq + qdp =$ $= \frac{-xdx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{x+\sqrt{(1+xx)}} =$ $= \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$. Fiet ergo differentiale quaesitum $dy = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $\sqrt{(1+xx)}-x$, fiet $dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}} =$

$$\frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

Idem differentiale alio modo commodius inveniri potest; cum enim sit $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1+xx)}}$, multiplicetur numerator ac denominator per $\sqrt{(1+xx)} - x$, fietque

$$y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2 + x^4)} - xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam est

$$dy = \frac{xdx + 2x^3 dx}{\sqrt{(xx + x^4)}} - 2xdx = \frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Si fuerit $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)} - \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4 + aaxx - 4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendi possunt, tamen commodius utemur regula fractionibus differentiandi inserviente. Sit ergo proposita haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inveniri oporteat. Quoniam posito $x + dx$ loco x fractio illa abit in

$$\frac{p+dp}{q+dq} = (p+dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq},$$

unde si fractio ipsa $\frac{p}{q}$ subtrahatur, remanet eius differentiale

$d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, ob evanescentem terminum $\frac{dpdq}{qq}$.

Hinc

Hinc ergo erit $d. \frac{p}{q} = \frac{q\,dp - p\,dq}{qq}$, unde haec regula pro differentiatione cuiuſque fractionis enaſcitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato ſubtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, reſiduum dividatur per quadratum denominatoris, quotuſque erit differentiale fractionis quaeſitum.* Cuius regulae uſus per ſequentia exempla illuſtrabitur.

I. Si fuerit $y = \frac{x}{aa + xx}$, erit per hanc regulam

$$dy = \frac{(aa + xx)\,dx - 2xx\,dx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)\,dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{\surd(aa + xx)}{aa - xx}$; reperitur

$$dy = \frac{(aa - xx)\,x\,dx : \surd(aa + xx) + 2x\,dx\,\surd(aa + xx)}{(aa - xx)^2},$$

& facta reductione $dy = \frac{(3aa + xx)\,x\,dx}{(aa - xx)^2\,\surd(aa + xx)}$.

Saepenumero expedit ea regula uti, quae ſequitur ex formula priori $d. \frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{p\,dq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per denominatorem diviſo, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at per quadratum denominatoris diviſo. Ita

III. Si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, erit

$$dy = \frac{-2x\,dx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aax\,dx + 4x^3\,dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

quae ad eundem denominatorem revocata praebet.

$$dy = \frac{-2x\,dx\,(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

165.

165. Haec iam sufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipsius x propositae differentiale investigandum; si enim fuerit integra modus differentiandi iam supra est expositus. Sit igitur functio proposita fracta, quae semper ad huiusmodi formam reducetur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, ut fiat

$y = \frac{p}{q}$; eritque $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. At cum sit:

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

& $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.$

erit $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \&c.$

& $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \&c.$

unde per multiplicationem obtinebitur:

$$\begin{array}{llllll} qdp = \alpha B dx & + 2\alpha C xdx & + 3\alpha D x^2dx & + 4\alpha E x^3dx & + \&c. \\ & \beta B & + 2\beta C & + 3\beta D & + \&c. \\ & & \gamma B & + 2\gamma C & + \&c. \\ & & & \delta B & + \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} pdq = \beta A dx & + \beta B xdx & + \beta C x^2dx & + \beta D x^3dx & + \&c. \\ & 2\gamma A & + 2\gamma B & + 2\gamma C & + \&c. \\ & & 3\delta A & + 3\delta B & + \&c. \\ & & & 4\varepsilon A & + \&c. \end{array}$$

Ex his itaque obtinebitur differentiale quaesitum:

$$dy = \frac{\begin{array}{l}+\alpha B \\ -\beta A\end{array} dx \begin{array}{l}+2\alpha C \\ -2\gamma A\end{array} xdx \begin{array}{l}+3\alpha D \\ +\beta C \\ -\gamma B \\ -3\delta A\end{array} xxdx \begin{array}{l}+4\alpha E \\ +2\beta D \\ -2\delta B \\ -4\varepsilon A\end{array} x^3dx \begin{array}{l}+5\alpha F \\ +3\beta E \\ +\gamma D \\ -\delta C \\ -3\varepsilon B \\ -5\zeta A\end{array} x^4dx \&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.)^2}$$

Quae

Quae expreſſio ad cuiuſvis functionis rationalis differentiale expedite inveniendum maxime eſt accommodata. Quemadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propoſitae combinatur, ex inſpectione mox intelligitur, denominator vero differentialis eſt quadratum denominatoris functionis propoſitae.

166. Si fractionis propoſitae vel numerator vel denominator vel uterque ex factoribus conſtet, multiplicatione actu inſtituta orietur quidem forma, qualem modo differentiavimus; attamen facilius pro his caſibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur propoſita huiuſmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, ut ſit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$ ſubſtitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$; eius diff. $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Si ſit $y = \frac{p}{qs}$, poſito denominatore $qs = Q$,

erit $dQ = qds + sdq$, & $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$. Quare

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$, erit $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$, ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, ut habeatur $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem ſit

$$dP = pdr + rdp \quad \& \quad dQ = qds + sdq,$$

prodibit ſequens differentiatio:

III.

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

erit $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$,

seu $dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}$.

Simili modo, si numerator ac denominator fractionis propositae plures habeant factores, differentialia eadem ratione investigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla huc pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem casus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi potest, quam per regulas generaliores hic expositas. Evenit hoc si factores, qui vel functionem ipsam, vel functionis numeratorem aut denominatorem constituunt, fuerint potestates.

Ponamus functionem differentiandam esse $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inveniendum sit $p^m = \mathrm{P}$ & $q^n = \mathrm{Q}$, ut fiat $y = \mathrm{PQ}$ & $dy = \mathrm{P}d\mathrm{Q} + \mathrm{Q}d\mathrm{P}$. Cum autem sit $d\mathrm{P} = mp^{m-1}dp$ & $d\mathrm{Q} = nq^{n-1}dq$, fiet his valoribus substitutis: $dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$; unde sequens oritur regula:

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$.

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale invenietur, ac reperietur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqrdp + nprdq + kpqdr)$.

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum proposita

ſita huiuſmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inſervientem $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$, quod differentiale commodius ſic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$, erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$.

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem ſuperiorem regulam $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$, cuius expreſſionis ſi numerator ac denominator per q^{n-1} dividatur, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$.

Quod ſi vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; invenietur

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1}dq}{q^{2n}},$$ quae reducitur ad

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$ Quocirca

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$ erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$.

Denique ſi propoſita fuerit huiuſmodi fractio $y = \frac{r}{p^m q^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1}q^n rdp - np^m q^{n-1}rdq}{p^{2m}q^{2n}},$$

cuius expreſſionis cum numerator & denominator ſit diviſibilis per $p^{m-1}q^{n-1}$:

IV.

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^m q^n}$;

erit $dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}$.

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae speciales, quas verbis exprimere superfluum foret, facili negotio pro quovis casu erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas hactenus exposuimus tam late patent, ut nulla excogitari possit functio ipsius x algebraica, quae non earum ope differentiari queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi functiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absolvimus. Simul vero etiam compendia, si factores involvantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusvis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, sive ei per additionem, sive per subtractionem sive multiplicationem sive divisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos revocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriumve variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad unam maxime universalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel divisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro qualibet parte functio proposi-*

ta seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis, reliquae vero partes omnes constantes. Quo facto singula ista differentialia, quae ex singulis partibus modo descripto eliciuntur, in unam summam colligantur, sicque obtinebitur differentiale functionis propositae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, uti infra ostendetur.

171. Ad regulam hanc illustrandam ponamus functionem y duabus constare partibus, sive per additionem sive subtractionem connexis, ita ut sit $y = p \pm q$. Ponatur primo sola pars p variabilis, altera q constans erit differentiale $= dp$, deinde ponatur altera pars $\pm q$ sola variabilis, altera vero p constans, eritque differentiale $= \pm dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaesitum ita componetur, ut sit $dy = dp \pm dq$, omnino uti idem iam supra invenimus. Hinc vero simul liquet, si functio pluribus constet partibus, sive invicem additis sive subtractis, nempe $y = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inventum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane uti & superior regula docebat.

172. Si partes sint in se invicem multiplicatae, ita ut sit $y = pq$, manifestum est posita sola parte p variabili, fore differentiale $= qdp$; at si altera pars q sola variabilis statuatur, erit differentiale $= pdq$. Addantur ergo haec duo differentialia invicem, atque prodibit differentiale quaesitum $dy = qdp + pdq$, quemadmodum ex iam allatis constat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, scilicet $y = pqrs$, si successive unaquaeque sola variabilis statuatur, orientur ista differentialia $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$, quorum summa dabit differentiale quaesitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorsus uti iam ante invenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, sive partes functionem constituentes sint invicem additae subtractaeve, sive in se invicem multiplicatae

173. Si partes functionem formantes per divisionem sint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$ ponatur secundum regulam primum sola pars p variabilis, eritque ob q constans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur sola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$; erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propositae

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq},$$

sicut iam supra invenimus. Simili modo si functio proposita sit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo successive singulas partes solas p, q, r & s variabiles, prodibunt sequentia differentialia:

$$\frac{qdp}{rs};\ \frac{pdq}{rs};\ \frac{-pqdr}{rrs};\ \& \frac{-pqds}{rss},$$ unde fit

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}$$

174. Dummodo ergo singulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae; ut earum differentialia exhiberi queant, simul quoque totius functionis differentiale inveniri poterit. Quodsi igitur partes fuerint functiones rationales, tum earum differentialia non solum ope praeceptorum ante iam datorum inveniuntur, sed ea quoque ex hac ipsa regula generali erui poterunt: sin autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad potestates, quarum exponentes sunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem potestatum, qua est $dx^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque, ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias insuper expressiones surdas invo-

volvunt. Unde patet ſi cum regula generali hic data, infra vero demonſtranda, coniungatur regula differentiandi poteſtates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi poſſe.

175. Ex his omnibus iam dilucide ſequitur, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, differentiale eius dy huiuſmodi habiturum eſſe formam $dy = pdx$, in qua valor ipſius p per praecepta hic expoſita ſemper aſſignari queat. Erit autem p functio ipſius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, niſi conſuetae, quibus functiones algebraicae conſtitui ſolent. Hancobrem ſi y fuerit functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipſius x. Atque ſi z fuerit etiam functio algebraica ipſius x, ita ut ſit $dz = qdx$, ob q functionem algebraicam ipſius x, erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipſius x, quippe quae eſt $= \frac{q}{p}$ Quare ſi huiuſmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expreſſionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impedient, quominus ea expreſſio ſit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia ſecunda & ſuperiorum ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipſius x, fuerit $dy = pdx$, atque $dp = qdx$; erit ſumto differentiali dx conſtante, $ddy = qdx^2$ uti ſupra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas ſit quoque q functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non ſolum quantitas finita, ſed etiam functio algebraica ipſius x, dummodo y fuerit eiuſmodi functio. Simili modo perſpicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones al-

gebraicas ipsius x, modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x, omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusvis ordinis ipsarum y, z, & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dzddy}$; $\frac{dxd^4y}{dy^3ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x.

177. Cum igitur nunc methodus sit tradita cuiusque functionis ipsius x algebraicae differentiale primum inveniendi, eadem methodo poterimus quoque differentialia secunda altiorumque ordinum investigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipsius x, ex eius differentiatione $dy = pdx$ innotescet valor ipsius p. Qui si denuo differentietur atque reperiatur $dp = qdx$, erit $ddy = qdx^2$, posito dx constante, sicque definietur differentiale secundum. Differentiando porro q, ut sit $dq = rdx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = rdx^3$; sicque ulterius differentialia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r, &c. omnes sunt functiones ipsius x algebraicae, ad quas differentiandas praecepta data sufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omissis enim dx, in differentiatione ipsius y, prodibit valor ipsius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatus ac divisus per dx, quod fit dum ubique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipsius $q = \frac{ddy}{dx^2}$ Simili modo porro invenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa + xx}$ cuius differentialia tam prima quam sequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando simulque per dx dividendo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}$, hincque porro

ddy

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa+xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile ulterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem supremarum ipsius x potestatum semper est productum numerorum naturalium ab 1 usque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim si has formas ulterius continuemus atque perpendamus, deprehendemus fore generaliter, si $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3 \ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\Big(x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.\;2.}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\;2\ldots 6}x^{n-6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.\;2\ldots\ldots 8}x^{n-8} + \&c.\Big)$$

Huiusmodi ergo exempla non solum inserviunt ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, sed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum observantur, per se sunt notatu dignissimae, atque ad alias inventiones deducere possunt.