# CAPUT IV.

## *DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA*

112.

In capite primo vidimus, si quantitas variabilis $x$ accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusvis functionis ipsius $x$ augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ sive haec expressio sit finita sive in infinitum excurrat. Functio ergo $y$, si in ea loco $x$ scribatur $x + \omega$, valorem sequentem induet:

$$y^{I} = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

a quo, si valor prior $y$ subtrahatur, remanebit differentia functionis $y$, quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

atque cum valor ipsius $x$ sequens sit $x^{I} = x + \omega$, erit differentia ipsius $x$, nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem P, Q, R, &c. denotant functiones ipsius $x$ pendentes ab $y$, quas capite primo invenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento $\omega$ augeatur quantitas variabilis $x$, simul definiri poterit augmentum, quod cuique ipsius $x$ functioni $y$ accedit; dummodo pro quovis ipsius $y$ valore functiones P, Q, R, S, &c. definire valeamus. In hoc autem capite, atque in universa Analysi infinitorum augmentum illud $\omega$, quo quantitatem variabilem $x$ crescere sumsimus, statuemus infinite parvum, atque adeo evanescens, seu $= 0$. Unde manifestum est, incrementum seu differentiam functionis $y$ quoque fore infinite parvam. Cum autem in hac hypothesi singuli termini expressionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus evanescant, (88. & seqq.), solus primus

Pω

$P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc casu, quo $\omega$ est infinite parvum, differentia ipsius $y$ nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare coepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum in capite primo expositae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumtae, statuantur infinite parvae. Quo igitur iste casus, quo universa Analysis infinitorum continetur, a methodo differentiarum distinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam signis ad differentias istas infinite parvas denotandas uti conveniet. Differentias igitur infinite parvas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diversos ordines constituissemus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, secunda, tertia, &c. cuiusque functionis significent. Loco characteris autem $\Delta$, quo ante differentias indicaveramus, nunc utemur charactere $d$; ita ut $dy$ significet differentiale primum ipsius $y$; $ddy$ differentiale secundum; $d^3y$ tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite parvas, quas hic tractamus *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia investigantur, atque ad usum accomodantur, appellari solet *Calculus differentialis*. Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aeque ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc novam Analyseos partem excollere coepit, aliis tam nominibus quam signis utuntur. Differentias enim infinite parvas, quas nos differentialia vocamus potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa*: quae voces uti latino sermoni magis conveniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEWTONO ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite parvum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamvis autem circa vocum usum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita ut $\dot{y}$ iis significet fluxionem primam ipsius $y$; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, uti ab arbitrio pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit parvus, ut numerando facile percipi queat, tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima perquam incommode hoc modo $\overset{\vdots\vdots}{y}$ repraesentatur, cum nostro signandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus sit ineptus.

117. Nostris igitur tam nominibus quam signis utemur, quippe quorum illa in nostris regionibus iam sunt usu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & signationes hic commemorare, ut qui eorum libros evolvunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhaerent, ut quae nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipsorum opera maxima cum aviditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; saepenumero vero etiam animadvertimus, ipsos nostratium scripta non sine utilitate legisse. Quamobrem etsi idem ubique atque aequabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, ut utrique assuescamus, quantum quidem

dem intelligentia librorum alieno more ſcriptorum poſtulat.

118. Cum igitur littera $\omega$ nobis hactenus denotaverit differentiam ſeu incrementum, quo quantitas variabilis $x$ creſcere concipitur, nunc autem $\omega$ ſtatuatur infinite parvum, erit $\omega$ differentiale ipſius $x$; & hancobrem recepto ſignandi modo erit $\omega = dx$; atque $dx$ proinde erit differentia infinite parva, qua ipſa $x$ creſcere concipitur. Simili modo differentiale ipſius $y$ ita exprimetur $dy$; atque ſi $y$ fuerit functio quaecumque ipſius $x$, differentiale $dy$ denotabit incrementum, quod functio $y$ capit, dum $x$ abit in $x + dx$. Quare ſi in functione $y$ ubique loco $x$ ſubſtituatur $x + dx$, & quantitas reſultans ponatur $= y^{\text{I}}$, erit $dy = y^{\text{I}} - y$, hocque modo differentiale cuiuſque functionis reperietur: quod quidem intelligendum eſt de differentiali primo ſeu primi ordinis; de reliquis enim poſtea videbimus.

119. Probe ergo tenendum eſt litteram $d$ hic non quantitatem denotare, ſed tantum loco ſigni adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera $l$ pro ſigno logarithmi, & in Algebra charactere $\surd$ pro ſigno radicis uti conſuevimus. Hinc $dy$ non ſignificat, uti vulgo in Analyſi uſu eſt receptum, productum ex quantitate $d$ in quantitatem $y$, ſed ita enunciari debet, ut dicatur differentiale ipſius $y$. Simili modo ſi ſcribatur $d^2 y$, neque binarius exponentem, neque $d^2$ poteſtatem ipſius $d$ ſignificat, ſed adhibetur tantum ad nomen *differentialis ſecundi* breviter & apte exprimendum. Cum igitur littera $d$ in calculo differentiali non quantitatem, ſed ſignum tantum exhibeat, ad confuſionem vitandam in calculis, ubi plures quantitates conſtantes occurrunt, littera $d$ ad earum deſignationem uſurpari nequit; perinde atque evitare ſolemus litteram $l$ tanquam quantitatem in calculum inducere, ubi ſimul logarithmi occurrunt. Optandum autem eſſet, ut litterae iſtae $d$ & $l$ per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates de-

ſignari ſolent, confundantur: ſimili ſcilicet modo, quo loco litterae $r$, qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iſte diſtortus $\surd$ in uſum eſt receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipſius $y$, ſi $y$ fuerit functio quaecunque ipſius $x$, habiturum eſſe huiuſmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = Pdx$. Qualiſcunque ſcilicet fuerit $y$ functio ipſius $x$, eius differentiale $dy$ exprimetur certa quadam functione ipſius $x$, pro qua hic ponimus P, per differentiale ipſius $x$, nempe per $dx$ multiplicata. Etiamſi ergo differentialia ipſarum $x$ & $y$ revera ſint infinite parva, ideoque nihilo aequalia; tamen inter ſe finitam habebunt rationem: erit ſcilicet $dy : dx = P : 1$. Inventa ergo functione iſta P, innoteſcit ratio inter differentiale $dx$ & differentiale $dy$. Cum igitur calculus differentialis in inventione differentialium conſiſtat, in eo non tam ipſa differentialia, quae ſunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore invenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica inveſtigatur.

121. Differentialia igitur multo facilius inveniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam $\Delta y$, qua functio $y$ creſcit, dum quantitas variabilis $x$ incrementum $\omega$ accipit, non ſufficit functionem P noſſe, ſed indagari inſuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam poſuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipſius $y$ autem inveniendum ſatis eſt, ſi noverimus ſolam functionem P. Quamobrem ex cognita differentia finita cuiuſque functionis ipſius $x$, facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui poteſt eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum ſimul cognitis differentia quaevis finita cuiuſque functionis propoſitae inveniri queat. Ceterum ex his

ma-

manifestum est differentiale primum $dy = Pdx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum $\omega$, quod quantitas variabilis $x$ accipere concipitur, fuerit vehementer parvum, ita ut in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parvi, ut in computo, quo summus rigor non observatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali $Pdx$, ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: unde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parva considerari posse, eaque nihilo revera aequalia esse negant, atque tantum indefinite parva statuunt. Haecque idea aliis occasionem praebuit Analysin infinitorum accusandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, sed tantum vero proximas; quae obiectio semper aliquam vim retineret, nisi infinite parva prorsus nihilo aequalia statueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parva plane in nihilum abire, ii ut vim obiectionis destruere videantur, differentialia comparant minimis pulvisculis ratione totius terrae, cuius quantitatem nemo non veram tradidisse censeretur, qui unico pulvisculo a veritate aberraverit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite parvam esse volunt, qualis est inter totam terram minimumque pulvisculum: atque si cui hoc discrimen adhuc non satis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, ut parvitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoscere coguntur, summum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per Analysin infinitorum solutiones inveniri possunt, ex earumque congruentia bonitatem posterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum saepenume-

eo per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius evincit, eas quantitates, quae in calculo ſint neglectae, non ſolum non incomprehenſibiliter parvas, ſed plane nullas eſſe, uti nos aſſumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium ſecundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis ſecundis in capite primo expoſitis, ponendo quantitatem $\omega$ infinite parvam $= dx$. Cum igitur ſi ponamus quantitatem variabilem $x$ aequalibus incrementis creſcere, ita ut ſi valor ſecundus $x^{\prime}$ fuerit $= x + dx$, ſequentes futuri ſint $x^{\prime\prime} = x + 2dx$; $x^{\prime\prime\prime} = x + 3dx$ &c. ob differentias primas conſtantes $= dx$, differentiae ſecundae evaneſcent: erit ergo quoque differentiale ſecundum ipſius $x$ nempe $ddx = 0$, atque ob hanc rationem quoque differentialia ulteriora erunt $= 0$, ſcilicet $d^3x = 0$, $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem poteſt, haec differentialia, cum ſint infinite parva, per ſe eſſe $= 0$, neque hoc proprium eſſe eius quantitatis variabilis $x$, cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc evaneſcentiam ita interpretari oportet, ut differentialia $ddx$, $d^3x$ &c. non ſolum in ſe ſpectata ſint nulla, ſed etiam ratione poteſtatum ipſius $dx$, cum quibus alias comparari poſſent, evaneſcere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum eſt differentiam ſecundam cuiuſque functionis ipſius $x$, quae ſit $y$, huiuſmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + $ &c. Quodſi ergo $\omega$ ſit infinite parvum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ evaneſcent, unde poſito $\omega = dx$, differentiale ſecundum ipſius $y$ erit $= Pdx^2$, denotante $dx^2$ quadratum differentialis $dx$. Quare etſi differentiale ſecundum ipſius $y$, nempe $ddy$ per ſe ſit $= 0$, tamen cum ſit $ddy = Pdx^2$, ad $dx^2$ habebit rationem finitam uti P ad 1: ſin autem ſit $y = x$, tum fit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc caſu differentiale ſecundum ipſius $x$ etiam reſpectu $dx^2$ altiorumque ipſius $dx$ poteſtatum evaneſcit. Hocque modo intelligenda ſunt

ea,

ea, quae ante diximus, esse scilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia secunda nil aliud sit, nisi differentia differentiae primae; differentiale quoque secundum seu uti saepe vocari solet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas constans nulla neque augmenta neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae solis quantitatibus variabilibus sunt propriae, dicimus eodem sensu quantitatum constantium differentialia omnia cuiusque ordinis esse $= 0$, hoc est prae omnibus adeo potestatibus ipsius $dx$ evanescere. Cum igitur differentiale ipsius $dx$ hoc est $ddx$ sit $= 0$; differentiale $dx$ tanquam quantitas constans considerari potest, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur constans, toties ea quantitas intelligenda est continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem $x$ pro ea quantitate, cuius differentiale sit constans, hicque singularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia sunt obnoxia, aestimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipsius $y$ esse $= pdx$; atque ad eius differentiale secundum inveniendum, ipsius $pdx$ denuo differentiale quaeri debet. Cum autem $dx$ sit constans, neque varietur etiamsi loco $x$ scribatur $x+dx$, tantum opus est, ut quantitatis finitae $p$ differentiale quaeratur: sit igitur $dp = qdx$, quoniam vidimus omnium functionum ipsius $x$ differentialia ad huiusmodi formam revocari: & cum sit, uti de differentiis finitis ostendimus, differentiale ipsius $np = nqdx$, si $n$ sit quantitas constans, ponatur $dx$ loco $n$, eritque differentiale ipsius $pdx = qdx^2$. Hancobrem si sit $dy = pdx$ & $dp = qdx$, erit differentiale secundum $ddy = qdx^2$, sicque constat, quod iam ante innuimus, differentiale secundum ipsius $y$ ad $dx^2$ habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notavimus differentias secundas atque sequentes constitui non posse, nisi valores successivi ipsius $x$ certa quadam lege progredi assumantur, quae lex

lex cum sit arbitraria, his valoribus progressionem arithmeticam tanquam facillimam simulque aptissimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus secundis nihil certi statui poterit, nisi differentialia prima, quibus quantitas variabilis $x$ continuo crescere concipitur, secundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipsius $x$, nempe $dx$, $dx^{I}$, $dx^{II}$, &c. omnia inter se aequalia, unde fiunt differentialia secunda

$$ddx = dx^{I} - dx = 0;\ ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0,\ \&c.$$

Quoniam ergo differentialia secunda & ulteriora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis $x$ inter se tenent, pendent, hicque ordo sit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens discrimen inter differentialia prima ac sequentia ratione inventionis intercedit.

129. Quodsi autem successivi ipsius $x$ valores $x$, $x^{I}$, $x^{II}$, $x^{III}$, $x^{IV}$, &c. non secundum arithmeticam progressionem statuantur, sed alia quacumque lege progredi ponantur, tum eorum quoque differentialia prima $dx$, $dx^{I}$, $dx^{II}$, &c. non erunt inter se aequalia, neque propterea erit $ddx = 0$. Hancobrem differentialia secunda quarumvis functionum ipsius $x$ aliam formam induent; si enim huiusmodi functionis $y$ differentiale primum fuerit $= p\,dx$ ad eius differentiale secundum inveniendum non sufficit differentiale ipsius $p$ per $dx$ multiplicasse, sed insuper ratio differentialis ipsius $dx$, quod est $ddx$ haberi debet. Quoniam enim differentiale secundum oritur, si $pdx$ a valore eius sequente, qui oritur dum $x + dx$ loco $x$ & $dx + ddx$ loco $dx$ ponitur, subtrahatur ponamus valorem ipsius $p$ sequentem esse $= p + q\,dx$, eritque ipsius $p\,dx$ valor sequens

$$= (p + qdx)\ (dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

a quo subtrahatur $pdx$, eritque differentiale secundum

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

quia $qdxddx$ prae $pddx$ evanescit.

130.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis est simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius $x$ incrementis tribuatur, tamen frequenter evenire solet, ut non eius quantitatis variabilis $x$, cuius $y$ est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cuiuspiam quantitatis, cuius ipsa $x$ sit functio quaedam. Quin etiam saepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima statuuntur aequalia, cuius nequidem relatio ad $x$ constet. Priori casu pendebunt differentialia secunda & sequentia ipsius $x$ a ratione, quam $x$ tenet ad illam quantitatem, quae aequabiliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia secunda ipsius $y$ ex differentialibus ipsius $x$ definire docuimus. Posteriori autem casu differentialia secunda & sequentia ipsius $x$ tanquam incognita spectari, eorumque loco signa $ddx$, $d^3x$, $d^4x$, &c. usurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his casibus differentiationes singulas absolvi oporteat, infra fusius simus ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem $x$ tanquam uniformiter crescentem assumere, ita ut eius differentialia prima $dx$, $dx^{I}$, $dx^{II}$, &c. inter se omnia aequalia, ac propterea differentialia secunda ac sequentia nihilo aequalia statuantur, quae conditio ita enunciari solet ut differentiale ipsius $x$ nempe $dx$ constans assumi dicatur. Sit deinde $y$ functio quaecumque ipsius $x$, quae cum per $x$ & constantes definiatur, singula quoque eius differentialia prima, secunda, tertia, quarta, &c. quae his signis indicantur $dy$, $ddy$, $d^3y$, $d^4y$, &c. per $x$ & $dx$ exprimi poterunt. Scilicet si in $y$ loco $x$ scribatur $x+dx$, ab hocque valore prior subtrahatur, remanebit differentiale primum $dy$: in quo si porro loco $x$ ponatur $x+dx$, prodibit $dy^{I}$, eritque $ddy=dy^{I}-dy$, simili modo ponendo $x+dx$ loco $x$, ex $ddy$ nascetur $ddy^{I}$, atque $ddy^{I}-ddy$ dabit $d^3y$ & ita porro: in quibus operationibus differentiale $dx$ perpetuo tanquam quantitas constans spectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio $y$ per $x$ determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo ex-

peditius ex iis, quae poſtea ſumus traditurí, definietur valor functionis $p$, quae per $dx$ multiplicata praebeat differentiale primum $dy$. Poſito ergo $dy = pdx$, differentiale ipſius $pdx$ dabit differentiale ſecundum $ddy$; unde ſi fuerit $dp = qdx$, ob $dx$ conſtans, orietur $ddy = qdx^2$, uti iam ante oſtendimus. Ulterius igitur progrediendo, cum differentialis ſecundi differentiale praebeat differentiale tertium, ponamus eſſe $dq = rdx$, eritque $d^3 y = rdx^3$: ſimili modo ſi huius functionis $r$ differentiale quaeratur, fueritque $dr = sdx$, habebitur differentiale quartum $d^4 y = sdx^4$; ſicque porro, dummodo noverimus differentiale primum cuiuſque functionis invenire, differentiale cuiuſque ordinis aſſignare poterimus.

133. Quo igitur formae ſingulorum horum differentialium, ſimulque ratio ea inveniendi clarius menti repraeſentetur, ea ſequenti tabella complecti viſum eſt.

Si $y$ fuerit functio quaecunque ipſius $x$,

| atque poſito | erit |
|---|---|
| $dp = qdx$ | $dy = pdx$ |
| $dq = rdx$ | $ddy = qdx^2$ |
| $dr = sdx$ | $d^3 y = rdx^3$ |
| $ds = tdx$ | $d^4 y = sdx^4$ |
| &c. | $d^5 y = tdx^5$ |

Cum igitur functio $p$ ex functione $y$ per differentiationem cognoſcatur, ſimilique modo ex $p$ inveniatur $q$, hincque porro $r$, & ex eo ulterius $s$, &c. differentialia cuiuſvis ordinis ipſius $y$ facile reperientur, dummodo differentiale $dx$ aſſumatur conſtans.

134. Cum $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, &c. ſint quantitates finitae, functiones nimirum ipſius $x$, differentiale primum ipſius $y$, rationem finitam habebit ad differentiale primum ipſius $x$, ſcilicet ut $p$ ad $1$; hancque ob cauſam differentialia $dx$ & $dy$ vocantur homogenea. Deinde cum $ddy$ ad $dx^2$ habeat rationem finitam ut $q$ ad $1$, erunt $ddy$ & $dx^2$ homogenea; ſimili modo homogenea erunt $d^3 y$ & $dx^3$, itemque $d^4 y$ & $dx^4$, & ita porro. Unde uti differentialia prima ſunt inter ſe homo-

mo-

mogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius $y$ ordinis $n$, quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneum erit cum $dx^n$, hoc est cum potestate differentialis $dx$, cuius exponens est $n$.

135. Cum igitur prae $dx$ evanescant omnes eius potestates, quarum exponentes sunt unitate maiores, prae $dy$ quoque evanescent $dx^2$, $dx^3$, $dx^4$, &c. & quae ad has potestates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum $ddy$, $d^3y$, $d^4y$, &c. Simili modo prae $ddy$ quia est homogeneum cum $dx^2$, omnes ipsius $dx$ potestates quadrato superiores $dx^3$, $dx^4$, &c. evanescent, evanescent ergo quoque $d^3y$, $d^4y$, &c. Atque prae $d^3y$, evanescent $dx^4$, $d^4y$; $dx^5$, $d^5y$, &c. Hincque facile, si propositae fuerint quaecunque expressiones huiusmodi differentialia involventes, dignosci poterunt, utrum sint homogeneae nec ne. Respici enim debebunt tantum differentialia, omissis quantitatibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus secundi altiorumque ordinum scribantur potestates ipsius $dx$ ipsis homogeneae, quae si praebeant ubique eundem dimensionum numerum, expressiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ esse inter se homogeneas. Nam $ddy^2$ denotat quadratum ipsius $ddy$, & quia $ddy$ homogeneum est cum $dx^2$, erit $ddy^2$ homogeneum cum $dx^4$. Deinde quia $dy$ cum $dx$ & $d^3y$ cum $dx^3$ homogeneum est, erit productum $dyd^3y$ cum $dx^4$ homogeneum: ex quo sequitur expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ inter se esse homogeneas, ideoque rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ & $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro $dy$, $ddy$, $d^3y$ & $d^5y$ his ipsius $dx$ potestatibus ipsis homogeneis $dx$, $dx^2$, $dx^3$, & $dx^5$, orientur hae expressiones $Pdx^3$ & $Qdx^3$, quae utique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius $dx$ potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinities sive maior sive minor altera, hincque una respectu alterius evanescet. Sic $\frac{Pd^3 y}{dx^2}$ ad $\frac{Qddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad $Pdx$ & altera ad $Qdx^3$, unde haec prae illa evanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{Pd^3 y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{Pd^3 y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones $\frac{Pd^3 y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$ & $\frac{Pd^3 y}{dx^2}$ quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Qdx^2 ddy^2}{Pdyd^3 y} = 1 \quad \text{ob} \quad \frac{Qdx^2 ddy^2}{Pdyd^3 y} = 0.$$

Hocque pacto expressiones differentiales quandoque mirifice contrahi possunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusvis quantitatis propositae differentiale primum inveniri potest: & quoniam differentialia secunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex secundis & ita porro sequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentialia inveniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina derivantur, quae usu sunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod significat *differentiale invenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur. *Differentiatio* autem deno-

nôtat operationem, qua differentialia inveniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentialia inveniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale investigatur, ita vicissim calculi species constituitur quoque in inventione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propositum fuerit differentiale quodcunque, eius respectu ea quantitas, cuius est differentiale, vocari solet integrale. Cuius denominationis ratio est, quod, cum differentiale considerari possit, tanquam pars infinite parva, qua quantitas quaepiam crescit, ipsa illa quantitas respectu huius partis tanquam totum seu integrum spectari potest, hancque ob causam eius vocatur integrale. Sic cum $dy$ sit differentiale ipsius $y$, vicissim $y$ erit integrale ipsius $dy$, & cum $ddy$ sit differentiale ipsius $dy$, erit $dy$ integrale ipsius $ddy$, similique modo erit $ddy$ integrale ipsius $d^3y$, & $d^3y$ ipsius $d^4y$ & ita porro: unde quaelibet differentiatio, si inverse spectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clarissime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo exposita explicari potest. Postquam enim esset ostensum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inveniri oporteat, retrogrediendo quoque monstravimus, quomodo, si proposita fuerit differentia, ea quantitas inveniri queat, cuius illa sit differentia; quam quantitatem respectu suae differentiae vocavimus eius summam. Uti igitur ad infinite parva procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita summae quae ibi erant vocatae, integralium nomen sortiuntur: & hanc ob causam integralia quoque non raro summae appellari solent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem invenire, idem est, quod nostro more dati differentialis integrale invenire dicimus.

141. Uti differentialia charactere $d$ designamus, ita ad

in-

integralia indicanda hac littera $\int$ utimur, quae ergo quantitatibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa sunt differentialia. Sic si differentiale ipsius $y$ fuerit $pdx$, seu $dy = pdx$, erit $y$ integrale ipsius $pdx$, quod hoc modo scribitur $y = \int pdx$, cum sit $y = \int dy$. Integrale ergo ipsius $pdx$, quod per $\int pdx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale est $pdx$. Simili modo cum sit $ddy = qdx^2$ existente $dp = qdx$; erit integrale ipsius $ddy$ hoc est $dy = pdx$, atque ob $p = \int qdx$, erit $dy = dx\int qdx$, ac propterea $y = \int dx\int qdx$. Si ulterius sit $dq = rdx$, erit $q = \int rdx$ & $dp = dx\int rdx$; unde si character $\int$ denuo praefigatur, fiet $p = \int dx\int rdx$, porroque $dy = dx\int dx\int rdx$, atque $y = \int dx\int dx\int rdx$.

142. Quia differentiale $dy$ est quantitas infinite parva, eius integrale autem $y$ quantitas finita, parique modo differentiale secundum $ddy$ infinities minus est, quam eius integrale $dy$, manifestum est differentialia prae suis integralibus evanescere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parva in ordines dividi solent, diciturque infinite parvum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima $dx$, $dy$. Infinite parvum secundi ordinis complectitur differentialia secundi ordinis, quae homogenea sunt cum $dx^2$; similique modo infinite parva, quae cum $dx^3$ sunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; sicque porro. Unde uti infinite parva primi ordinis prae quantitatibus finitis evanescunt, sic infinite parva secundi ordinis prae infinite parvis primi ordinis, atque generatim infinite parva cuiusque ordinis altioris prae infinite parvis ordinis inferioris evanescent.

143. His igitur infinite parvorum ordinibus constitutis, uti differentiale quantitatis finitae est infinite parvum primi ordinis, atque differentiale infinite parvi primi ordinis est infinite parvum secundi ordinis, & ita porro; ita vicissim manifestum est integrale infinite parvi primi ordinis esse quantitatem finitam, integrale autem infinite parvi secundi ordinis esse infinite parvum primi ordinis sicque deinceps.

Qua-

Quare si differentiale propositum fuerit infinite parvum ordinis $n$, eius integrale erit infinite parvum ordinis $n-1$; hincque uti differentiando ordo infinite parvorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipsas quantitates finitas perveniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum secundum hanc legem perveniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione instituta ad quantitates adhuc infinities maiores, sicque progrediendo obtinebimus similes infinitorum ordines, quorum quisque praecedentem infinities superat.

144. Superest ut in hoc Capite quaedam de usu signorum recepto moneamus, ne ambiguitati ullus locus relinquatur. Ac primo quidem signum differentiationis $d$ tantum afficit litteram immediate sequentem solam: sic $dxy$ non denotat differentiale producti $xy$, sed differentiale ipsius $x$ per ipsam quantitatem $y$ multiplicatum. Solet autem, quominus confusio nascatur, quantitas $y$ ante signum $d$ hoc modo scribi $ydx$, quo productum ex $y$ in $dx$ indicatur. Attamen si $y$ sit quantitas vel signum radicale $\surd$ vel logarithmicum habens praefixum, tum post differentiale poni solet: nimirum $dx\surd(aa-xx)$ significat productum ex quantitate finita $\surd(aa-xx)$ in differentiale $dx$, similique modo $dxl(1+x)$ est productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per $dx$ multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\surd x$ exprimit productum differentialis secundi $ddy$ & quantitatis finitae $\surd x$.

145. Neque vero signum $d$ litteram immediate sequentem solam afficit, sed etiam nequidem exponentem, si quem habet, spectat. Ita $dx^2$ non exprimit differentiale ipsius $x^2$, sed quadratum differentialis ipsius $x$, ita ut exponens 2 non ad $x$, sed ad $dx$ referri debeat. Posset etiam scribi $dxdx$, quemadmodum productum duorum differentialium $dx$ & $dy$ hoc modo $dxdy$ exponitur, verum prior modus $dx^2$, uti est brevior, ita usitatior. Praesertim si altiores potestates ipsius $dx$ essent indicandae, nimis prolixum foret $dx$ toties repeti: sic $dx^3$ denotat cubum ipsius $dx$, & in differentialibus altio-

rum

rum ordinum similis ratio observatur. Scilicet $ddy^4$ denotat potestatem quartam differentialis secundi ordinis $ddy$; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ significat quadratum differentialis tertii ordinis ipsius $y$ multiplicatum esse per $\sqrt{x}$; sin autem per quantitatem rationalem $x$ multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo $xd^3y^2$.

146. Sin autem velimus, ut signum $d$ plus quam solam litteram subsequentem afficiat, id peculiari modo indicari debet. Utimur hoc casu praecipue uncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Uti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum si velimus differentiale potestatis huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix evitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita ut $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum $d$ ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius $xdy$; & $d.^3xdy\sqrt{(aa+xx)}$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdy\sqrt{(aa+xx)}$, quae est productum ex quantitatibus finitis $x$ & $\sqrt{(aa+xx)}$ atque ex differentiali $dy$.

147. Quemadmodum autem signum differentiationis $d$ solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dxlx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $xdx\int dxlx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx\int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx\int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita ut $\int ydx.\int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148. Analysis infinitorum igitur cum in differentiali-

bus

bus tum in integralibus inveniendis verſatur, & hancobrem in duas praecipuas partes dividitur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur, quantitatum quarumvis differentialia inveniendi; in poſteriori vero via monſtratur differentialium propoſitorum integralia inveſtigandi: in utroque autem ſimul ſummus uſus, quem iſti calculi tam ad ipſam Analyſin quam ad Geometriam ſublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob cauſam iſta Analyſeos pars iam tanta accepit incrementa, ut modico volumine prorſus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in ſolvendis varii generis problematibus, deteguntur, ut ob haec nova inventa, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte deſcribi atque explicari poſſit. Dabo autem operam, ut quae adhuc ſunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel ſaltem methodos explicem, unde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures Analyſeos infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inveniuntur paſſim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi ſolet methodus differentialia ſecundi atque altiorum ordinum inveniendi: quoniam autem modum cuiuſque ordinis differentialia inveniendi in ipſo calculo differentiali ſum expoſiturus, hac ſubdiviſione, quae potius ex merito inventionis, quam ex re ipſa facta eſſe videtur, ſuperſedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyſeos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales tranſtulit, quia utrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam tranſcendentes accommodare conſtitui, hinc partem peculiarem facere ſuperfluum atque inſtituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare ſtatui, modumque ſum expoſiturus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non ſolum prima, ſed etiam ſecunda & altiorum ordinum expedite inveniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, ſive ſint functiones unius variabilis, ſive plurium, ſive demum explicite dentur, ſive per aequationes. Deinde inventionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem ſine calculi integralis ſubſidio pervenire licet: cuiuſmodi ſunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, viciſſimque arcuum circularium ſinus, & tangentes. Denique etiam quantitates utcunque ex his compoſitas & permixtas differentiare docebo; ſicque calculi differentialis pars prior, methodus ſcilicet differentiandi, abſolvetur.

151. Altera pars uſui, quem methodus differentiandi tam ad Analyſin quam Geometriam ſublimiorem affert, explicando eſt deſtinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inveniendas, partim ad ſeries tractandas atque ſummandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expreſſionum, quae certis caſibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae ſunt alia. Geometria autem ſublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curvarum, earumque curvatura ipſa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curvis vel reflexos vel refractos reſolvi poſſunt. Quibus etſi ampliſſimus tractatus impleri poſſet, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breviter ac perſpicue explicare.

CA-