CAPUT III.

DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARVIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumvis ſit magna, ulterius augeri poſſit, neque quicquam obſtet, quominus ad datam quantitatem quamcumque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas ſine fine augeri poterit: neque enim unquam tam magna fiet, ut ipſi nihil amplius adiici poſſit. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit poſitum, *omnem quantitatem in infinitum augeri poſſe*. Qui enim hoc negaverit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, ſuperare nequeat, atque ideo ſtatuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiici poſſit; quod cum ſit abſurdum atque quantitatis notioni adverſetur, neceſſario concedendum eſt, omnem quantitatem ſine fine continuo magis, hoc eſt, in infinitum augeri poſſe.

73. In ſingulis quantitatum ſpeciebus hoc etiam clarius perſpicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui ſtatuerit ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita uſquam eſſe determinatam, ut ulterius continuari non poſſit. Nullus enim datur numerus, ad quem non inſuper unitas addi, ſicque numerus ſequens maior exhiberi queat; hinc ſeries numerorum naturalium ſine fine progreditur, neque unquam pervenitur ad numerum maximum, quo maior prorſus non detur. Simili modo linea recta nunquam eouſque produci poteſt, ut inſuper ulterius prolongari non poſſit. Quibus evincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci poſſe. Quae cum ſint ſpecies quantitatum, ſimul

ſimul intelligitur, omni quantitate, quantumvis ſit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, ſicque augendo continuo ulterius ſine fine, hoc eſt in infinitum, procedi poſſe.

74. Quanquam autem haec ſunt adeo perſpicua, ut qui ea negare vellet, ſibi ipſe contradicere deberet; tamen iſta infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare ſunt conati, tantopere eſt offuſcata, tantiſque difficultatibus atque etiam contradictionibus obvoluta, ut, qua ſe extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri poſſit, quidam concluſerunt, dari revera quantitatem infinitam, eamque ita deſcripſerunt, ut nullum amplius augmentum ſuſcipere poſſit. Hoc autem ipſo ideam quantitatis evertunt, dum eiuſmodi quantitatem ſtatuunt, quae ulterius augeri nequeat. Praeterea vero ſecum ipſi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas ſit capax, finem faciunt, ſimul negant quantitatem ſine fine augeri poſſe, negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri poſſe, quoniam utraque locutio congruit: ſicque, dum quantitatem infinitam ſtatuunt, eam ſimul tollunt. Si enim quantitas ſine fine, hoc eſt in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita exiſtere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipſo, quod omnis quantitas in infinitum augeri poſſit, ſequi videtur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non evadet, niſi iam ſine fine increverit: quod autem ſine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi poteſt. Interim tamen non ſolum huiuſmodi quantitatem, ad quam incrementis ſine fine congeſtis pervenitur, certo charactere indicare, ſicque debito modo in calculum inducere licet, uti mox fuſius oſtendemus; ſed etiam in mundo eiuſmodi caſus exiſtere, vel ſaltem concipi poſſunt, quibus numerus infinitus actu exiſtere videatur. Sic ſi materia in infinitum ſit diviſibilis, uti plures Philoſophi ſtatuerunt, numerus

par-

partium, quibus datum quodque materiae frustum constat, revera erit infinitus; si enim statueretur finitus, materia certe non in infinitum foret divisibilis. Simili modo si universus mundus esset infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe esse non posset, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamsi inter se pugnare videantur, tamen si attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim statuit materiam in infinitum esse divisibilem, is negat in divisione materiae continua unquam ad partes tam parvas perveniri, quae ulterius dividi nequeant: nullas ergo materia habebit partes, ulterius individuas; cum singulae particulae, ad quas per continuam divisionem iam sit perventum, ulterius se subdividi patiantur. Qui igitur dicit hoc casu numerum partium fore infinitum, is partes ultimas, quae ulterius sint individuae, intelligit; ad quas cum nunquam perveniatur, & quae propterea nullae sunt, is has ipsas partes, quae nullae sunt, numerare conatur. Si enim materia sine fine continuo ulterius subdividi potest, partibus individuis seu simplicibus prorsus caret: neque adeo quicquam superest, quod numerari queat. Hanc ob rem qui materiam in infinitum divisibilem statuit, is simul negat, materiam ex partibus simplicibus esse compositam.

77. Quod si autem, dum de partibus alicuius corporis seu materiae loquimur, non ultimas seu simplices, quippe quae nullae sunt, intelligamus, sed eas, quas divisio revera produxit; tum admissa hac hypothesi de divisibilitate materiae in infinitum, unumquodque vel minimum materiae frustum non solum in plurimas partes dissecari, sed etiam nullus numerus tam magnus assignari poterit, quo non maior partium ex illo frusto sectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem ultimarum, sed quae ipsae adhuc sint ulterius divisibiles, quae unumquodque corpus componunt, omni numero assignabili erit maior. Simili mo-

do, si universus mundus sit infinitus, numerus corporum mundum constituentium pariter omni assignabili erit maior; qui cum finitus esse nequeat, sequitur numerum infinitum & numerum omni assignabili maiorem esse nomina synonyma.

78. Qui ergo hoc modo divisibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, se implicat, nihilque affirmare cogitur, quod sanae rationi adversetur. Qui autem contra materiam in infinitum divisibilem esse negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus se nullo prorsus modo extrahere possunt. Statuere enim coguntur unumquodque corpus nonnisi in certum partium numerum dissecari posse, ad quas si fuerit perventum, nulla divisio ulterior locum inveniat; quas ultimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia simplicia* vocant. Cur autem istae ultimae particulae nullam amplius divisionem admittant, duplex esse potest causa: altera, quod omni extensione careant; altera quod quidem sint extensae, sed tamen tam durae atque ita comparatae, ut nulla vis ad eas dissecandas sufficiat. Utrumvis patroni huius opinionis dicant, sese aeque difficultatibus implicant.

79. Sint enim ultimae particulae omnis extensionis expertes, ita ut partibus prorsus careant; qua explicatione quidem ideam entium simplicium optime tuentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero constare queat, concipi nullo modo potest. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus simplicibus esse compositum, huncque actu in mille partes secari; quae si sint aequales, erunt digiti cubici: sin autem sint inaequales, aliae erunt maiores aliae minores. Unus igitur digitus cubicus foret ens simplex, sicque maxima resultaret contradictio; nisi forte in digito cubico inesse tantum unum ens simplex, reliquumque spatium vacuum esse dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod isti Philosophi vacuum plane ex mundo profligant.

Quodsi

Quodsi obiiciant numerum entium simplicium, quae pedem cubicum materiae constituunt, millenario longe esse maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario sequitur, ex quovis alio numero quantumvis magno aeque manat. Hanc difficultatem Acutissimus LEIBNIZIUS, primus monadum inventor, probe perspexit, dum materiam absolute in infinitum divisibilem esse statuit. Neque ergo ante ad monades pervenire licet, quam corpus actu in infinitum sit divisum. Hoc ipso autem existentiam entium simplicium, ex quibus corpora constent, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus simplicibus esse composita, & ille qui statuit corpora in infinitum esse divisibilia, in eadem prorsus sunt sententia.

80. Neque magis autem sibi constant, si dicunt ultimas corporum particulas extensas quidem esse, sed ob summam duritiem in partes divelli non posse. Cum primum enim in ultimis particulis extensionem admittunt, eas ex partibus compositas esse statuunt, quae, utrum revera a se invicem separari queant nec ne, parum refert; etiamsi nullam causam assignare possint, unde tanta durities sit orta. Nunc autem plerique, qui divisibilitatem materiae in infinitum negant; hoc posterius incommodum satis sensisse videntur, quia priori ideae partium ultimarum potissimum inhaerent; hasque difficultates aliter diluere non possunt, nisi aliquot leviusculis metaphysicis distinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, ut ne consequentiis, quae secundum mathematica principia formantur, fidamus; neque dimensiones in partibus simplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonstrare debuissent, istas suas partes ultimas, quarum determinatus numerus corpus constituat, extensas prorsus non esse.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum invenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad distinctiones confugiunt, respondentes has obiectiones a

sen-

ſenſibus atque imaginatione ſuppeditari, in hoc autem negotio ſolum intellectum purum adhiberi oportere; ſenſus autem ac ratiocinia inde pendentia ſaepiſſime fallere. Intellectus ſcilicet purus agnoſcet fieri poſſe, ut pars milleſima pedis cubici materiae omni extenſione careat, quod imaginationi abſurdum videtur. Tum vero, quod ſenſus ſaepenumero fallant, res vera quidem eſt, at nemini minus quam mathematicis opponi poteſt. Matheſis enim nos imprimis a fallacia ſenſuum defendit, atque docet obiecta, quae ſenſibus percipiuntur, aliter revera eſſe comparata, aliter vero apparere: haecque ſcientia tutiſſima tradit praecepta, quae qui ſequuntur, ab illuſione ſenſuum immunes ſunt. Huiuſmodi ergo reſponſionibus, tantum abeſt, ut Metaphyſici ſuam doctrinam tueantur, ut eam potius magis ſuſpectam efficiant.

82. Verum ut ad propoſitum revertamur, etiamſi quis neget in mundo numerum infinitum revera exiſtere; tamen in ſpeculationibus mathematicis ſaepiſſime occurrunt queſtiones, ad quas, niſi numerus infinitus admittatur, reſponderi non poſſet. Sic, ſi quaeratur ſumma omnium numerorum, qui hanc ſeriem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. conſtituunt; quia iſti numeri ſine fine progrediuntur, atque creſcunt, eorum omnium ſumma certe finita eſſe non poterit: quo ipſo efficitur, eam eſſe infinitam. Hinc, quae quantitas tanta eſt, ut omni quantitate finita ſit maior, ea non infinita eſſe nequit. Ad huiuſmodi quantitatem deſignandam Mathematici utuntur hoc ſigno ∞, quo denotatur quantitas omni quantitate finita, ſeu aſſignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, ut dicatur eſſe Ellipſis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae eſſe Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem infiniti doctrina magis illuſtrabitur, ſi quid ſit infinite parvum Mathematicorum expoſuerimus. Nullum autem eſt dubium, quin omnis quantitas eouſque diminui queat, quoad penitus evaneſcat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parva nil aliud eſt niſi quantitas eva-

evaneſcens, ideoque revera erit $= 0$. Conſentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate aſſignabili minora: ſi enim quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate aſſignabili ſit minor, ea certe non poterit non eſſe nulla; namque niſi eſſet $= 0$, quantitas aſſignari poſſet ipſi aequalis, quod eſt contra hypotheſin. Quaerenti ergo, quid ſit quantitas infinite parva in Matheſi, reſpondemus eam eſſe revera $= 0$: neque ergo in hac idea tanta Myſteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum ſuſpectum reddiderunt. Interim tamen dubia, ſi quae ſupererunt, in ſequentibus, ubi hunc calculum ſumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur oſtenderimus, quantitatem infinite parvam revera eſſe cyphram, primum occurrendum eſt obiectioni, cur quantitates infinite parvas non perpetuo eodem charactere o deſignemus, ſed peculiares notas ad eas deſignandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila ſunt inter ſe aequalia, ſuperfluum videtur variis ſignis ea denotare. Verum quamquam duae quaevis cyphrae ita inter ſe ſunt aequales, ut earum differentia ſit nihil: tamen, cum duo ſint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum ſpectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quaſque cyphras eſt aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perſpicietur ex hac proportione geometrica $2 : 1 = 0 : 0$, in qua terminus quartus eſt $= 0$, uti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo ſit maior quam ſecundus, neceſſe eſt, ut & tertius duplo maior ſit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica ſunt planiſſima: cuilibet enim notum eſt, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, eſſeque $n.0 = 0$, ſicque fore $n : 1 = 0 : 0$. Unde patet fieri poſſe, ut duae cyphrae quamcumque inter ſe rationem geometricam teneant, etiamſi,

etiamsi, rem arithmetice spectando, earum ratio semper sit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecumque intercedere possit, ad hanc diversitatem indicandam consulto varii characteres usurpantur; praesertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter se tenent, est investiganda. In calculo autem infinite parvorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter varia infinite parva indagetur, quod negotium propterea, nisi diversis signis ad ea indicanda uteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque ullo modo expediri posset.

86. Si ergo, prouti in Analysi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite parvam, erit utique tam $dx = 0$, quam $a\,dx = 0$, denotante a quantitatem quamcumque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $a\,dx : dx$ finita, nempe ut $a : 1$; & hanc ob rem haec duo infinite parva dx & $a\,dx$, etiamsi utrumque sit $= 0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio investigetur. Simili modo, si diversa occurrunt infinite parva dx & dy, etiamsi utrumque sit $= 0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in investigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parva omnis vis calculi differentialis versatur. Usus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum igitur infinite parvum sit revera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, si ad eam infinite parvum vel addamus vel ab ea subtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parva, erit tam $a + dx$, quam $a - dx$, & generaliter $a \pm n\,dx = a$. Sive enim relationem inter $a \pm n\,dx$ & a arithmetice intueamur sive geometrice, utroque casu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifesta est; cum enim sit $n\,dx = 0$, erit $a \pm n\,dx - a = 0$: geometrica

ve-

vero ratio aequalitatis inde patet, quod ſit $\frac{a \pm n\,dx}{a} = 1$.

Hinc ſequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parva prae finitis evaneſcant, atque adeo horum reſpectu reiici queant*. Quare illa obiectio, qua Analyſis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, ſponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, niſi quod revera ſit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac ſublimiori ſcientia rigorem geometricum ſummum, qui in Veterum libris deprehenditur, aeque diligenter obſervari.

88. Quoniam quantitas infinite parva dx revera eſt $= 0$, eius quoque quadratum dx^2, cubus dx^3, & quaevis alia poteſtas affirmativum habens exponentem erit $= 0$, ideoque aeque prae quantitatibus finitis evaneſcent. At vero etiam quantitas infinite parva dx^2 prae ipſa dx evaneſcit; erit enim $dx \pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, ſive comparatio arithmetice ſive geometrice inſtituatur. De priori quidem dubium eſt nullum, at geometrice comparando erit

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Pari modo erit $dx \pm dx^3 = dx$, & generaliter $dx \pm dx^{n+1} = dx$, dummodo ſit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur uti in poteſtatibus fit, vocetur dx infinite parvum primi ordinis, dx^2 ſecundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifeſtum eſt prae infinite parvis primi ordinis, evaneſcere infinite parva altiorum ordinum.

89. Simili modo oſtendetur infinite parva tertii ac ſuperiorum ordinum evaneſcere prae infinite parvis ordinis ſecundi; atque in genere infinite parva cuiuſque ordinis ſuperioris evaneſcere prae infinite parvis ordinis inferioris. Ita ſi m fuerit numerus minor quam n, erit $a\,dx^m + b\,dx^n = a\,dx^m$,

quia

quia dx^n evaneſcit prae dx^m, uti oſtendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx evaneſcet prae $\sqrt{dx}$ ſeu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx}+b\,dx=a\sqrt{dx}$. Quodſi autem exponens ipſius dx ſit $=0$, erit $dx^0=1$, quamvis ſit $dx=0$; hinc poteſtas dx^n, cum fiat $=1$, ſi ſit $n=0$, ex finita ſtatim fit quantitas infinite parva, atque exponens n nihilo fit maior. Hinc ergo infiniti ordines infinite parvorum exiſtunt, quae etſi omnia ſint $=0$, tamen inter ſe probe diſtingui debent, ſi ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

90. Stabilita notione infinite parvorum facilius indolem infinitorum ſeu infinite magnorum exponere poterimus. Notum eſt valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem evadere, quo magis diminuatur denominator z; quare ſi z fiat quantitas omni aſſignabili quantitate minor, ſeu infinite parva, neceſſe eſt ut valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni aſſignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem ſi unitas ſeu quaevis alia quantitas finita dividatur per infinite parvum ſeu 0, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc ſignum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, iſta habebitur aequatio $\frac{a}{dx}=\infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod fit invertendo $\frac{a}{\infty}=dx=0$. Namque quo maior ſtatuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z, eo minor fit fractionis valor, atque ſi z fiat quantitas infinite magna ſeu $z=\infty$, neceſſe eſt, ut fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite parvus

91. Qui utrumvis horum ratiociniorum negaverit eum

in

in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta evertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum uti b, utrinque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0 . b$, atque ideo quantitas finita b per nihil 0 multiplicata praeberet quantitatem finitam a, quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $= 0$: nam 0 per 0 multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty} = 0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty} =$ quantitati finitae b: quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty} = b$ legitime sequatur haec $\infty = \frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite parvus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analysi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex divisione quantitatis finitae per infinite parvam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parva quotus, qui oritur ex divisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, ut sit quantitas infinite parva ad finitam, ita finita ad infinite magnam; uti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities

maior erit quam infinite parva. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non sunt improbandae, cum certissimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ sequitur fieri posse, ut nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri posset, nisi planissime per legitimam consequentiam esset deductum.

93. Quoniam inter infinite parva, si secundum rationem geometricam inter se comparantur, maximum deprehenditur discrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non solum geometrice sed etiam arithmetice comparatae discrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex divisione quantitatis finitae a per infinitae parvam dx oritur, $= A$, ita ut sit $\frac{a}{dx} = A$: erit utique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA sit quantitas infinita, sequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere posse. Hincque, si quantitas infinita per numerum finitum sive multiplicetur, sive dividatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitatibus infinitis negari potest, eas ulterius augeri posse. Facile autem perspicitur, si ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter se tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmeticam aequalitatis esse posse, cum potius earum differentia semper sit infinite magna.

94. Quantumvis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi utimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos trivialibus carere possumus. In Arithmetica enim, ubi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negativus & infinite magnus

gnus ſtatuitur, neque quiſquam eſt tam mente captus, ut hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim unquam negabit tangentem ſecantemve anguli recti non eſſe infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem ſit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti ſit $= 0$; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito eſſe poſſe finitum.

95. Cum ſit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: eſt enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc eſt ut numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiuſmodi relationes, ut aliae aliis infinities maiores eſſe queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; poſito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quiſque infinities maior eſt quam praecedentes: atque adeo ſi numerus m vel tantillum maior ſit quam n erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96

96. Quemadmodum in quantitatibus infinite parvis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes ſint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae ſint quantumvis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx}+b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum diviſione ortus $=1+\frac{bdx}{a}=1$ ob $dx=0$: interim tamen, ſi arithmetice comparentur, ob differentiam $=b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis eſt $=1+dx=1$; verum tamen differentia eſt $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc ſi ad rationem geometricam ſpectemus, infinite magna inferiorum graduum prae infinite magnis ſuperiorum graduum evaneſcunt.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri poſſe, ut productum ex quantitate infinite magna in infinite parvam non ſolum quantitatem finitam producat, quod ſupra eveniſſe vidimus; ſed etiam huiuſmodi productum eſſe poterit ſive infinite magnum ſive infinite parvum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, ſi per infinite parvam dx multiplicetur, dat productum finitum $=a$; ſin autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite parvum dx^2, vel dx^3, vel aliud ſuperioris ordinis, productum erit vel adx, vel adx^2, vel adx^3 &c. ideoque infinite parvum. Eodem modo intelligetur, ſi quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite par-

vam dx, productum fore infinite magnum: atque generatim si $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m, productum $abdx^{m-n}$ erit infinite parvum si m superat n; finitum si m aequat n; & infinite magnum si m superatur ab n.

98. Quantitates tam infinite parvae, quam infinite magnae in seriebus numerorum saepissime occurrunt, in quibus cum sint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum secundum leges continuitatis a quantitatibus finitis ad infinite magnas atque infinite parvas transitio fiat. Consideremus primum seriem numerorum naturalium, quae simul retro continuata erit

$$\&c. -4-3-2-1+0+1+2+3+4+ \&c.$$

Numeri ergo continuo decrescendo praebent tandem o. seu infinite parvum, unde ulterius continuati negativi evadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmativis decrescentibus transiri per o ad negativos crescentes. Sin autem eorum numerorum quadrata spectentur, quia omnia sunt affirmativa

$$\&c. +16+9+4+1+0+1+4+9+16+ \&c.$$

erit o quoque transitus numerorum affirmativorum decrescentium ad affirmativos crescentes; atque si signa mutentur, erit quoque o transitus numerorum negativorum decrescentium ad negativos crescentes.

99. Si series consideretur, cuius terminus generalis est $\sqrt{x}$, quae etiam retro continuata erit huiusmodi

$$\&c. +\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+ \&c.$$

ex qua patet o, quoque tanquam limitem considerari posse, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria transeatur. Si isti termini tanquam applicatae curvarum considerentur, perspicitur, si eae fuerint affirmativae atque eousque decreverint ut tandem evanescant, tum eas ulterius continuatas vel fieri negativas, vel iterum affirmativas vel adeo imaginarias.

Idem

Idem eveniet, ſi applicatae primum fuerint negativae; tum enim aeque poſt quam evanuerint, ſi ulterius continuentur, vel affirmativae fient, vel negativae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curvis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in ſeriebus occurrunt ſaepe termini infiniti: ſic in ſerie harmonica, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{x}$, indici $x = 0$ reſpondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque ſeries ita ſe habebit:

$$\&c. - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad ſiniſtram progrediendo termini creſcunt, ita ut $\frac{1}{0}$ iam ſit infinite magnus, quem cum tranſierint, fient negativi decreſcentes. Hinc quantitas infinite magna ſpectari poteſt tanquam limes, per quem numeri affirmativi progreſſi fiunt negativi, & viciſſim: unde pluribus viſum eſt, numeros negativos conſiderari poſſe, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac ſerie termini continuo creſcentes, poſtquam infinitum attigerint, abeant in negativos. At vero ſi ad ſeriem, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{xx}$, attendamus, poſt tranſitum per infinitum rurſus prodeunt termini affirmativi.

$$\&c. \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \&c.$$

quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in ſeriebus terminus infinitus conſtituit limitem, terminos reales ab imaginariis ſegregantem, uti fit in ſerie hac, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\&c. + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \&c.$$

ne-

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

&c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+$ &c.

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit 0 neque ∞, uti sit si terminus generalis fuerit $1+\sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores fiunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmativi, abeunt in negativos, transitus semper fit per limitem vel infinite parvum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curvis deprehendimus, clarius elucent.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inserviunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, ut

$$1+1+1+1+1+1+ \text{ \&c.}$$

eaque sine fine, hoc est in infinitum continuetur, nullum certe est dubium, quin omnium horum terminorum summa maior sit omni numero assignabili; eaque propterea infinita sit necesse est. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+ \text{ \&c.}$$

ponendo $x=1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+ \text{ \&c.}$$

ideoque summa $=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=$ infinito.

103. Quamvis autem hic nullum dubium nasci queat, cum idem numerus finitus infinities sumtus in infinitum abire debeat; tamen ipsa origo ex serie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

gravissima incommoda afferre videtur: si enim pro x successive ponantur numeri 1, 2, 3, &c. sequentes series cum suis summis prodibunt.

$$A \ldots 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} = \text{infinito}$$

$$B \ldots 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$C \ldots 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\tfrac{1}{2}$$

$$D \ldots 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\tfrac{1}{3}$$

&c.

Cum igitur series B singulos terminos praeter primum habeat maiores, quam series A, summa seriei B necessario multo maior esse deberet, quam summa seriei A: interim tamen iste calculus ostendit seriei A summam infinitam, seriei B vero summam negativam, hoc est nihilo minorem, quod concipi non potest. Multo minus cum solitis ideis conciliari potest, quemadmodum huius & sequentium serierum C, D, &c. summae fiant negativae, cum tamen omnes termini sint affirmativi.

104. Ob hanc rationem opinio supra allata multis probabilis videri solet, quantitates scilicet negativas quandoque considerari posse tanquam infinito maiores seu plus quam infinitas; & cum etiam numeros ultra nihil diminuendo perveniatur ad negativos, discrimen statuunt inter numeros negativos huiusmodi -1, -2, -3, &c. & huiusmodi

+

$\frac{+1}{-1}$, $\frac{+2}{-1}$, $\frac{+3}{-1}$, &c. illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam suggerit haec series

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

unde oriuntur sequentes series:

$$A \,..\, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \tfrac{1}{0} = \text{infinito}$$

$$B \,..\, 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

ubi cum singuli termini seriei B sint maiores, quam singuli termini seriei A, primis solis exceptis, quemadmodum summa seriei A sit infinita, seriei B vero summa aequalis 1, hoc est soli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem si vellemus negare esse $-1 = \frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmissima Analyseos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorsus admitti non potest. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales suppeditaverant, summas esse veras. Cum enim hae series ex continua divisione oriantur, dum residuum continuo ulterius dividitur: residuum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime residuum ultimum, hoc est quod in divisione infinitesima remanet, omitti potest, quippe quod fit infinite magnum. Quia autem hoc in superioribus seriebus non observatur, dum nullius residui ratio habetur, mirum non est, eas summationes ad absurdum deducere. Haecque responsio, uti est ex ipsa serierum genesi petita, ita quoque est verissima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur evolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, uti in terminis primum finitis tantum absolvitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius seriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ summam esse $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$: & qui summam huius seriei

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^{1000}$$

statuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error si x sit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perspicuum est eum, qui eiusdem seriei in infinitum continuatae seu huius:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^\infty$$

summam statuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate esse aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae si sit $x > 1$ utique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur seriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ \&c.}$$

ſumma revera ſit $=\frac{1}{1-x}$, ſi fuerit x fractio unitate minor; tum enim error $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ fit infinite parvus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto poteſt negligi. Sic poſito $x=\frac{1}{2}$, erit revera

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\&c.=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

ſimiliterque reliquarum ſerierum, ſi x ſit fractio unitate minor, ſumma vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem reſponſio valet de ſummis ſerierum divergentium, in quibus ſigna + & — alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi ſolent, ponendo pro x numeros negativos. Cum enim ſit:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\&c.$$

niſi ultimi reſidui ratio habeatur, foret:

A . . . $1-1+1-1+1-1+\&c.=\frac{1}{2}$
B . . . $1-2+4-8+16-32+\&c.=\frac{1}{3}$
C . . . $1-3+9-27+81-243+\&c.=\frac{1}{4}$
&c.

Patet autem ſeriei ſecundae B ſummam ideo non poſſe eſſe $=\frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu ſummentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiuſque ſeriei ſumma debet eſſe limes, ad quem eo propius perveniatur, quo plures termini actu addantur.

109. Ex his quidam concluſerunt huiuſmodi ſeries, quae vocantur divergentes, prorſus nullas habere ſummas fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio, qui pro ſumma ſeriei in infinitum continuatae haberi poſſet: quae ſententia, cum iſtae ſummae iam ob neglecta ultima reſidua erroneae ſint oſten-

ſae,

ſae, veritati maxime eſt conſentanea. Interim tamen contra eam ſummo iure obiici poteſt, has memoratas ſummas, quantumvis a veritate abhorrere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admiſſis plurima praeclara eſſe eruta, quibus ſi iſtas ſummationes prorſus reiicere vellemus, carendum eſſet. Neque vero hae ſummae, ſi eſſent falſae, perpetuo ad veritatem nos ducere poſſent; quin potius, cum non parum ſed infinite a veritate diſcrepent, nos quoque in infinitum a vero ſeducere deberent. Quod tamen cum non eveniat, difficillimus nobis reſtat nodus ſolvendus.

110. Dico igitur in voce *ſummae* latere totam difficultatem; ſi enim *ſumma* ſeriei, ut vulgo uſus fert, ſumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium eſt nullum, quin earum tantum ſerierum in infinitum excurrentium ſummae exhiberi queant, quae ſint convergentes, atque continuo propius ad certum ſtatumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem divergentes, quarum termini non decreſcunt, ſive ſigna + & — alternentur ſive ſecus, prorſus nullas habebunt ſummas fixas; ſi quidem vox ſummae hoc ſenſu pro aggregato omnium terminorum accipiatur. At vero in iis caſibus, quorum meminimus, quibus ex iſtiuſmodi ſummis erroneis veritas tamen elicitur; id non fit, quatenus expreſſio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, eſt ſumma ſeriei $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. ſed quatenus ea expreſſio evoluta hanc ſeriem praebet; ſicque in hoc negotio nomen ſummae prorſus omitti poſſet.

111. Haec igitur incommoda, haſque apparentes contradictiones penitus evitabimus, ſi voci *ſummae* aliam notionem, atque vulgo fieri ſolet, tribuamus. Dicamus ergo ſeriei cuiuſque infinitae *ſummam* eſſe expreſſionem finitam, ex cuius evolutione illa ſeries naſcatur. Hocque ſenſu ſeriei in-

infinitae $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. ſumma revera erit $= \frac{1}{1 - x}$; quia illa ſeries ex huius fractionis evolutione oritur: quicunque numerus loco x ſubſtituatur. Hoc pacto, ſi ſeries fuerit convergens, iſta nova vocis ſummae definitio, cum conſueta congruet; & quia divergentes nullas habent ſummas proprie ſic dictas, hinc nullum incommodum ex nova hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis utilitatem ſerierum divergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.