CAPUT II.

DE USU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam serierum per differentias maxime illustrari, ex primis rudimentis satis est notum. Progressionis enim arithmeticae, quae primum considerari solet, praecipua proprietas in hoc versatur, ut eius differentiae primae sint inter se aequales; hinc differentiae secundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde series, quarum differentiae secundae demum sunt aequales, quae hanc ob rem *secundi ordinis* commode appellantur, dum progressiones arithmeticae series *primi ordinis* vocantur. Porro igitur series *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae sunt constantes; atque ad *quartum ordinem* & sequentes eae referentur series, quarum differentiae quartae, & ulteriores demum sunt constantes.

38. In hac divisione infinita serierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes series ad haec genera revocare licet. Occurrunt enim innumerabiles series, quae, differentiis sumendis, nunquam ad terminos constantes deducunt: cuiusmodi, praeter innumeras alias sunt progressiones geometricae, quae nunquam praebent differentias constantes, uti ex hoc exemplo videre licet.

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \&c.$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \&c.$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \&c.$$

Cum enim series differentiarum cuiusque ordinis aequalis sit ipsi seriei propositae, aequalitas differentiarum prorsus excluditur. Quocirca plures serierum classes constitui debebunt, quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias constantes revocantur, subdividitur; quam classem in hoc capite potissimum considerabimus.

39. Duae autem res ad naturam serierum cognoscendam imprimis requiri solent, Terminus generalis atque Summa seu Terminus summatorius. Terminus generalis est expressio indefinita, quae unumquemque seriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea est functio quantitatis variabilis x, quae, posito $x = 1$, terminum seriei primum exhibet; secundum vero posito $x = 2$; tertium posito $x = 3$; quartum posito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscumque seriei terminus invenietur, etiamsi lex, qua singuli termini cohaerent, non respiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, statim terminus millesimus cognoscetur. Ita huius seriei

$$1, \quad 6, \quad 15, \quad 28, \quad 45, \quad 66, \quad 91, \quad 120, \quad \&c.$$

Terminus generalis est $2xx - x$; posito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; posito $x = 2$, oritur terminus secundus 6; si ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. unde patet huius seriei terminum centesimum, posito $x = 100$ fore $= 2 \cdot 10000 - 100 = 19900$.

40. Indices seu exponentes in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus sit in ordine: sic, termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices singulis cuiusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

TERMINI.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

unde statim patet G esse seriei propositae terminum septimum, cum eius index sit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, nisi terminus seriei, cuius index vel exponens est

nu-

numerus indefinitus x. Quemadmodum ergo in quolibet serierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel secundae, vel aliae sequentes sunt constantes, terminum generalem inveniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad investigationem summae summus progressuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progressiones arithmeticas, quarum differentiae primae sunt constantes; sitque a terminus seriei primus, & b terminus primus seriei differentiarum, cui sequentes omnes sunt aequales: unde series ita erit comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, &c.

DIFFERENTIAE.

b, b, b, b, b, &c.

Ex qua statim patet, terminum, cuius index sit $=x$, fore $a+(x-1)b$, eritque ergo terminus generalis $=bx+a-b$, qui ex terminis primis cum ipsius seriei, tum seriei differentiarum componitur. Quodsi autem terminus secundus seriei $a+b$ vocetur a^{1}, ob $b=a^{1}-a$, erit terminus generalis $=(a^{1}-a)x+2a-a^{1}=a^{1}(x-1)-a(x-2)$ unde ex cognitis terminis primo & secundo progressionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in serie secundi ordinis termini primi, ipsius seriei $=a$; differentiarum primarum $=b$; differentiarum secundarum $=c$; eritque ipsa series cum suis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a+b; a+2b+c; a+3b+3c; a+4b+6c; a+5b+10c; a+6b+15c;$ &c.

DIFFER. I.

$b; b+c; b+2c; b+3c; b+4c; b+5c;$ &c.

DIFFER. II.

$c, \quad c, \quad c, \quad c, \quad c,$ &c.

ex cuius inspectione liquet terminum, cuius index $= x$ fore $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)\ (x-2)}{1.\quad 2.}c$; qui ergo est terminus generalis seriei propositae. Ponatur autem ipsius seriei terminus secundus $= a^{I}$, terminus tertius $= a^{II}$, cum sit $b = a^{I} - a$; & $c = a^{II} - 2a^{I} + a$; uti ex natura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a + (x-1)(a^{I} - a) + \frac{(x-1)\ (x-2)}{1.\quad 2}(a^{II} - 2a^{I} + a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^{II}(x-1)\ (x-2)}{1.\quad 2} - \frac{2a^{I}(x-1)\ (x-3)}{1.\quad 2.} + \frac{a(x-2)\ (x-3)}{1.\quad 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right);$$

ideoque ex tribus terminis ipsius seriei definitur.

43. Sit series tertii ordinis $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, &c. eius differentiae primae $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$, &c. & differentiae

tiae secundae c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c. & tertiae d, d, d, &c. quippe quae sunt constantes.

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.		b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.
Differ. II.			c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.
Differ. III.				d,	d,	d,	&c.

Quia est $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$, $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; &c. erit terminus generalis, seu is cuius index est x,

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$

Sicque terminus generalis ex differentiis formabitur.

Cum autem porro sit

$$b = a^{I} - a;\ c = a^{II} - 2a^{I} + a;\ d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^{III} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3a^{II} \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$+ 3a^{I} \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

qui etiam hoc modo exprimetur, ut sit

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.		b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.
Differ. II.			c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.

Dif-

Differ. III. d, d^{I}, d^{II}, &c.

Differ. IV. e, e^{I}, &c.

Differ. V. f, &c.

ex ipsius seriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis b, c, d, e, f, &c. terminus generalis ita exprimetur ut sit:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

donec ad differentias constantes perveniatur. Ex quo patet, si nunquam prodeant differentiae constantes, terminum generalem per expressionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipsis terminis seriei formantur, si earum valores substituantur, prodibit terminus generalis in eiusmodi forma expressus, cuiusmodi pro seriebus primi, secundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro seriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

unde lex, qua sequentium ordinum termini generales componuntur, facile perspicitur. Ex his autem patet pro quovis ordine terminum generalem fore functionem ipsius x rationalem integram, in qua maxima ipsius x dimensio congruat cum ordine, ad quem series refertur. Ita serierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, secundi ordinis secundi gradus, & ita porro.

46.

46. Differentiae autem, uti supra vidimus, ex ipsis terminis seriei ita resultant, ut sit

$$b = a^{I} - a$$
$$b^{I} = a^{II} - a^{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$
&c.

$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c^{I} = a^{III} - 2a^{II} + a^{I}$$
$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II}$$
&c.

$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
&c.

Quare cum in seriebus primi ordinis sint omnes valores ipsius $c = 0$; erit
$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; &c.
unde patet has series simul esse recurrentes, & scalam relationis esse $2, -1$. Deinde, cum in seriebus secundi ordinis sint omnes valores ipsius $d = 0$, erit
$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$; $a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$; &c.
ideoque & hae erunt recurrentes scala relationis existente

$$3, -3, +1.$$

Simili modo apparebit omnes huius classis series, cuiuscunque sint ordinis, simul ad classem serierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, ut scala relationis constet ex coefficientibus potestatis binomii, uno gradu superioris, quam est ordo, ad quem series refertur.

47. Quia vero pro seriebus primi ordinis quoque omnes valores ipsius d & e, & sequentium differentiarum omnium sunt $= 0$, erit quoque in his

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$$
$$a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$$
&c.

aut

aut
$$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
&c.

Pertinebunt ergo & hinc ad ſeries recurrentes idque infinitis modis, cum ſcalae relationis eſſe queant:

$3, -3, +1;\ 4, -6, +4, -1;\ 5, -10, +10, -5, +1;$
&c.

Similique modo intelligitur unamquamque ſeriem huius, quam tractamus, claſſis ſimul eſſe ſeriem recurrentem innumeris modis: ſcala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

dummodo n ſit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec ſeries quoque ex evolutione fractionis, cuius denominator eſt $(1-y)^n$, prouti in ſuperiori libro de ſeriebus recurrentibus fuſius eſt oſtenſum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius claſſis ſerierum, cuiuſcunque ſint ordinis, terminos generales eſſe functiones ipſius x rationales integras, ita viciſſim apparebit omnes ſeries, quarum termini generales ſint huiuſmodi functiones ipſius x, ad hanc claſſem pertinere, atque tandem ad differentias conſtantes perduci. Et quidem, ſi terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax+b$, tum ſeries inde orta erit primi ordinis ſeu arithmetica, differentias primas habebit conſtantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio ſecundi gradus in hac forma $axx+bx+c$ contenta, tum ſeries ex eo oriunda, dum loco x ſucceſſive numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſtituuntur, erit ordinis ſecundi, atque differentias ſecundas habebit conſtantes: ſimili modo, terminus generalis tertii gradus ax^3+bx^2+cx+d dabit ſeriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non ſolum omnes ſeriei termini inveniuntur, ſed etiam ſeries differentiarum tam prima-

marum quam sequentium deduci possunt. Cum enim, si seriei terminus primus subtrahatur a secundo, prodeat seriei differentiarum terminus primus: secundus autem, si ipsius seriei terminus secundus a tertio auferatur, ita seriei differentiarum obtinebitur terminus, cuius index est x, si ipsius seriei terminus, cuius index est x, subtrahatur a sequente cuius index est $x + 1$. Quare si in termino seriei generali loco x ponatur $x + 1$, ab hocque valore terminus generalis subtrahatur, remanebit terminus generalis seriei differentiarum: si igitur X fuerit seriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX, (quae modo in praecedente capite ostenso invenietur, si statuatur ibi $\omega = 1$) terminus generalis seriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis seriei differentiarum secundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, sicque deinceps.

50. Quodsi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens potestatis ipsius x sit n, ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem uno gradu inferiorem, nempe gradus $n - 1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n - 2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n - 3$, & ita porro. Quare, si X fuerit functio primi gradus, uti $ax + b$, tum eius differentia ΔX erit constans $= a$; quae cum sit terminus generalis seriei primarum differentiarum, perspicitur seriem, cuius terminus generalis X sit functio primi gradus, fore arithmeticam seu primi ordinis. Simili modo si terminus generalis X fuerit functio secundi gradus ob $\Delta\Delta X$ constantem, series inde orta differentias secundas habebit constantes, eritque propterea ordinis secundi; sicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem constituens, eiusdem ordinis erit series ex eo nata.

51. Hanc ob rem series potestatum numerorum naturalium ad differentias constantes perveniunt, uti ex sequenti schemate fit manifestum.

POTEST. I.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.
Differ. I. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

POTEST. II.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c.
Differ. I. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.
Differ. II. 2, 2, 2, 2, 2, 2, &c.

POTEST. III.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, &c.
Differ. I. 7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.
Differ. II. 12, 18, 24, 30, 36, &c.
Differ. III. 6, 6, 6, 6, &c.

POTEST. IV.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c.
Differ. I. 15, 65, 175, 369, 671, 1105, &c.
Differ. II. 50, 110, 194, 302, 434, &c.
Differ. III. 60, 84, 108, 132, &c.
Differ. IV. 24, 24, 24, &c.

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inveniendis sunt praecepta, ea hic inservient ad terminos generales differentiarum quarumvis, quae ex seriebus nascuntur, inveniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam seriei fuerit cognitus, eius ope non solum omnes eius termini in infinitum inveniri, sed etiam series retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes sint numeri negativi, exhiberi poterunt, loco x numeros negativos substituendo: sic, si terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$ ponendo loco x tam negativos quam affirmativos indices, series utrinque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.

SERIES.

&c. $+5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27,$ &c.

Differ. I. $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ &c.

Differ. II. $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$ &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque series ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, ut, si differentiae tandem fiant constantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expressionem infinitam assignari queant: Quin etiam ex termino generali, ii termini, quorum indices sunt fracti, definientur, in quo serierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino serierum generali monitis, progrediamur ad summam, seu terminum summatorium serierum cuiusque ordinis investigandum. Proposita autem quacumque serie, TERMINUS *summatorius* est functio ipsius x, quae aequalis est summae tot terminorum seriei, quot unitates continet numerus x. Ita ergo terminus summatorius erit comparatus, ut si ponatur $x = 1$, prodeat terminus primus seriei; sin autem ponatur $x = 2$, ut prodeat summa primi & secundi, facto autem $x = 3$, summa primi, secundi ac tertii; sicque deinceps. Hinc, si ex serie proposita nova series formetur, cuius primus terminus aequalis sit primo illius, secundus aequalis summae duorum, tertius aequalis summae trium, atque ita porro, haec nova series vocatur illius *summatrix*, huiusque seriei summatricis terminus generalis erit terminus summatorius seriei propositae: ex quo inventio termini summatorii ad inventionem termini generalis revocatur.

54. Sit ergo series proposita haec

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \&c.$$

huiusque seriei summatrix sit

$$A, \; A^{I}, \; A^{II}, \; A^{III}, \; A^{IV}, \; A^{V}, \; \&c.$$

erit ex eius natura modo expoſita:

$$\begin{aligned} A &= a \\ A^{I} &= a + a^{I} \\ A^{II} &= a + a^{I} + a^{II} \\ A^{III} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} \\ A^{IV} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Hinc ſeriei ſummatricis differentiae erunt:

$$A^{I} - A = a^{I}; \; A^{II} - A^{I} = a^{II}; \; A^{III} - A^{II} = a^{III}; \; \&c.$$

unde ſeries propoſita termino primo minuta erit ſeries differentiarum primarum ſeriei ſummatricis. Quod ſi igitur ſeriei ſummatrici praefigatur terminus $= 0$, ut habeatur:

$$0, \; A, \; A^{I}, \; A^{II}, \; A^{III}, \; A^{IV}, \; A^{V}, \; \&c.$$

huius ſeries primarum differentiarum erit ipſa ſeries propoſita:

$$a, \; a^{I}, \; a^{II}, \; a^{III}, \; a^{IV}, \; a^{V}, \; \&c.$$

55. Hanc ob rem ſeriei propoſitae differentiae primae, erunt differentiae ſecundae ſummatricis, atque differentiae ſecundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, ſi ſeries propoſita tandem habeat differentias conſtantes, tunc etiam eius ſummatrix ad differentias conſtantes deducetur, eritque igitur ſeries eiuſdem naturae, at uno ordine ſuperior. Huiuſmodi ergo ſerierum perpetuo terminus ſummatorius exhiberi poterit per expreſſionem finitam. Namque terminus generalis ſeriei:

$$0, \; A, \; A^{I}, \; A^{II}, \; A^{III}, \; A^{IV}, \; \&c.$$

ſeu is, qui indici x convenit exhibebit ſummam $x - 1$ terminorum ſeriei huius $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, &c. atque ſi tum loco x ſcribatur $x + 1$, orietur ſumma x terminorum, ipſeque terminus ſummatorius.

56. Sit igitur ſeriei propoſitae

$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ a^{VI},$ &c.

Series differentiarum primarum

$b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ b^{V},\ b^{VI},$ &c.

Series differentiarum secundarum

$c,\ c^{I},\ c^{II},\ c^{III},\ c^{IV},\ c^{V},\ c^{VI},$ &c.

Series differentiarum tertiarum

$d,\ d^{I},\ d^{II},\ d^{III},\ d^{IV},\ d^{V},\ d^{VI},$ &c.

sicque porro donec ad differentias constantes perveniatur. Deinde formetur series summatrix, quae cum praefixa o in locum termini primi, cum suis differentiis continuis se habebit sequenti modo:

INDICES.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$ &c.

SUMMATRIX.

$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},$ &c.

SERIES PROPOSITA.

	$a,$	$a^{I},$	$a^{II},$	$a^{III},$	$a^{IV},$	$a^{V},$	$a^{VI},$	&c.
Differ. I.	$b,$	$b^{I},$	$b^{II},$	$b^{III},$	$b^{IV},$	$b^{V},$	$b^{VI},$	&c.
Differ. II.	$c,$	$c^{I},$	$c^{II},$	$c^{III},$	$c^{IV},$	$c^{V},$	$c^{VI},$	&c.
Differ. III.	$d,$	$d^{I},$	$d^{II},$	$d^{III},$	$d^{IV},$	$d^{V},$	$d^{VI},$	&c.

erit seriei summatricis terminus generalis, seu qui indici x respondet

$$0+(x-1)a+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}b+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}c+\&c.$$

qui simul exhibet summam $x-1$ terminorum seriei propositae, $a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},$ &c.

57. Quod si ergo in hac summa loco $x-1$ scribatur x, prodibit seriei propositae terminus summatorius summam x terminorum complectens

$$= na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \&c.$$

Hinc, si litterae b, c, d, e, valores ipsis assignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a, \; a^{I}, \; a^{II}, \; a^{III}, \; a^{IV}, \; a^{V}, \; \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \&c.$$

Invento ergo seriei cuiusvis ordinis hoc, quem ostendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus summatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic modus terminum summatorium per differentias seriei inveniendi imprimis ad eiusmodi series, quae tandem ad differentias constantes deducunt, est accomodatus; in aliis enim casibus expressio finita non reperitur. Quodsi autem ea, quae ante de indole termini summatorii sunt exposita, attentius perpendamus, alius modus se offert terminum summatorium immediate ex termino generali inveniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis casibus ad expressiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim proposita series quaecunque.

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \; f, \; \&c.$$

cuius terminus generalis, seu indici x respondens sit $= X$; terminus autem summatorius sit $= S$, qui cum summam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet unitates, erit summa $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo

adeo X differentia expreſſionis $S - X$, cum relinquatur, ſi haec a ſequente S ſubtrahatur.

59. Cum igitur ſit $X = \Delta(S - X)$ differentia eo modo ſumta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum diſcrimine, ut quantitas illa conſtans ω hic nobis ſit $= 1$. Quare, ſi ad ſummas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus ſummatorius quaeſitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet ſumma functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipſe terminus generalis X, eritque aggregatum terminus ſummatorius. Quoniam autem in ſummis involvitur quantitas conſtans, ſive addenda ſive ſubtrahenda; ea ad praeſentem caſum accomodari debebit. Manifeſtum autem eſt, ſi ponatur $x = 0$, quo caſu numerus terminorum ſummandorum eſt nullus, ſummam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa conſtans C ita determinari debebit, ut poſito $x = 0$, fiat quoque $S = 0$. Poſitis ergo in illa aequatione $S = \Sigma X + X + C$ tam $S = 0$, quam $x = 0$, valor ipſius C invenietur.

60. Quoniam ergo hic totum negotium ad ſummationem functionum ſupra monſtratam reducitur, ponendo $\omega = 1$, exinde depromamus ſummationes traditas; ac primo quidem pro poteſtatibus ipſius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$
$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$
$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$
$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$

quibus acceuſeatur ſummatio generalis poteſtatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi ubique loco ω unitas ſcribatur. Harum ergo formularum ope omnium ſerierum, quarum termini generales sunt functiones rationales integrae ipsius x; termini summatorii expedite inveniri poterunt.

61. Denotet $S.X$ terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, ut vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, ut terminus summatorius $S.X$ evanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

erit

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n}{2.3}x^{n-1} - \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4.5}x^{n-3}$$

$$+ \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6.7}x^{n-5} - \tfrac{3}{10}.\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{2.3\ldots 8.9}x^{n-7}$$

$$+ \tfrac{5}{6}.\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{2.3.4\ldots 10.11}x^{n-9} - \tfrac{691}{210}.\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{2.3\ldots 12.13}x^{n-11}$$

$$+ \tfrac{35}{2}.\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{2.3\ldots 14.15}x^{n-13} - \tfrac{3617}{30}.\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2.3\ldots 16.17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)}{2.3\ldots\ldots 18.19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)}{2.3\ldots\ldots 20.21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)}{2.3\ldots\ldots 22.23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)}{2.3\ldots\ldots 24.25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)}{2.3\ldots\ldots 26.27}x^{n-25}$$

&c.

62.

62. Hinc ergo summae pro variis ipsius n valoribus ita se habebunt.

$$S.x^0 = x$$
$$S.x^1 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$
$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x$$
$$S.x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$
$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$
$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$
$$S.x^7 = \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{7}{12}x^6 - \tfrac{7}{24}x^4 + \tfrac{1}{12}x^2$$
$$S.x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{2}{3}x^7 - \tfrac{7}{15}x^5 + \tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^9 = \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{2}x^9 + \tfrac{3}{4}x^8 - \tfrac{7}{10}x^6 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{20}x^2$$
$$S.x^{10} = \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{2}x^{10} + \tfrac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{5}{66}x$$
$$S.x^{11} = \tfrac{1}{12}x^{12} + \tfrac{1}{2}x^{11} + \tfrac{11}{12}x^{10} - \tfrac{11}{8}x^8 + \tfrac{11}{6}x^6 - \tfrac{11}{8}x^4 + \tfrac{5}{12}x^2$$
$$S.x^{12} = \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \tfrac{11}{6}x^9 + \tfrac{22}{7}x^7 - \tfrac{33}{10}x^5 + \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{691}{2730}x$$
$$S.x^{13} = \tfrac{1}{14}x^{14} + \tfrac{1}{2}x^{13} + \tfrac{13}{12}x^{12} - \tfrac{143}{60}x^{10} + \tfrac{143}{28}x^8 - \tfrac{143}{20}x^6 + \tfrac{65}{12}x^4 - \tfrac{691}{420}x^2$$
$$S.x^{14} = \tfrac{1}{15}x^{15} + \tfrac{1}{2}x^{14} + \tfrac{7}{6}x^{13} - \tfrac{91}{30}x^{11} + \tfrac{143}{18}x^9 - \tfrac{143}{10}x^7 + \tfrac{91}{6}x^5 - \tfrac{691}{9}x^3 + \tfrac{7}{6}x$$
$$S.x^{15} = \tfrac{1}{16}x^{16} + \tfrac{1}{2}x^{15} + \tfrac{5}{4}x^{14} - \tfrac{91}{24}x^{12} + \tfrac{143}{12}x^{10} - \tfrac{429}{16}x^8 + \tfrac{455}{12}x^6 - \tfrac{691}{24}x^4 + \tfrac{35}{4}x^2$$
$$S.x^{16} = \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{1}{2}x^{16} + \tfrac{4}{3}x^{15} - \tfrac{14}{3}x^{13} + \tfrac{52}{3}x^{11} - \tfrac{143}{3}x^9 + \tfrac{260}{3}x^7 - \tfrac{1382}{15}x^5 + \tfrac{140}{3}x^3 - \tfrac{3617}{510}x$$

&c.

quae summae ex forma generali usque ad potestatem vigesi-

mam

mam nonam continuari possunt. Atque adhuc ulterius progredi liceret, si coefficientes illi numerici ulterius essent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam observatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inveniri potest, excepto tantum termino ultimo, si in eo potestas ipsius x prima contineatur: tum enim in summa sequente unus terminus insuper accedit. Hoc autem omisso, si fuerit

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \&c.$$

erit sequens summa:

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \&c.$$

unde si n fuerit numerus par, sequens summa vera prodit: at si n fuerit numerus impar, tum in sequente summa praeterea desiderabitur terminus ultimus, cuius forma erit $\pm \phi x$. Interim tamen hic sine aliis subsidiis ita inveniri poterit. Cum enim si ponatur $x = 1$, summa unici tantum termini, (hoc est terminus primus, qui erit $= 1$) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inventis $x = 1$, ipsaque summa statuatur $= 1$, quo facto valor ipsius ϕ elicietur, eoque invento ulterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes istae summae inveniri potuissent. Sic, cum sit

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6} x^6 + \tfrac{1}{2} x^5 + \tfrac{5}{12} x^4 - \tfrac{1}{12} x^2$$

erit $S.x^6 = \frac{6}{7}.\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}.\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}.\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}.\frac{1}{12}x^3 + \phi x$

seu $S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \phi x$.

Ponatur nunc $x = 1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \phi$ ideoque $\phi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, uti ex forma generali invenimus.

64. Ope harum formularum summatoriarum nunc facile omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones ipsius x rationales integrae, termini summatorii inveniri po-

poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium huius seriei
$2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126,$ &c.
cuius terminus generalis est $\frac{3xx+x}{2}$.

Cum terminus generalis constet duobus membris, quaeratur pro utroque terminus summatorius ex formulis superioribus

$$S.\tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

& $$S.\tfrac{1}{2}x = \ldots \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

eritque $S.\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{5}{2}.6^2 = 90$, summa quinque terminorum
$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90$.

EXEMPLUM II.

Invenire terminum summatorium seriei
$1, 27, 125, 343, 729, 1331,$ &c.
quae continet cubos numerorum imparium.

Terminus generalis huius seriei est
$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1$,
unde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+8.S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$
& $$-12.S.x^2 = . -4x^3 - 6x^2 - 2x$$
atque $$+6.S.x = \ldots + 3x^2 + 3x$$
denique $$-1.S.x^0 = \ldots\ldots - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$.
Uti, si ponatur $x=6$ erit $36.71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex facto-

factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, fit

$$\Sigma\,(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

$$\&\quad \Sigma\,(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

$$\&\quad \Sigma\,(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&c.

si ad has summas ipsos terminos generales addamus, simulque constantem adiiciamus, quae posito $x = 0$, reddat terminum summatorium evanescentem, sequentes obtinebimus terminos summatorios

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

$$\&\quad S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\&\quad S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

sicque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas constans in his summis evanescit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis est $= x$, terminus summatorius erit $= \tfrac{1}{2}x(x+1)$ seriesque summatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus summatorius erit $= \dfrac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, & series summatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum summatorium habebit $= \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, qui erit terminus generalis seriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus summatorius erit $= \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$.

Hae autem series prae reliquis probe sunt notandae, quoniam earum ubique amplissimus est usus. Ex his enim desumuntur coefficientes binomii ad dignitates elevati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum versato abunde constat.

67. Ex his etiam illi termini summatorii, quos ante ex differentiis elicuimus, facile inveniuntur. Cum enim ibi terminum generalem sequenti forma invenerimus expressum

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \&c.$$

si cuiusque membri terminum summatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum summatorium huic termino generali convenientem. Sic cum sit

$$S\ 1 = x$$
$$\& \quad S\ (x-1) = \tfrac{1}{2}\, x\,(x-1)$$
$$\text{atque} \quad S\ (x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3}\, x\,(x-1)(x-2)$$
$$\& \quad S\ (x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4}\, x\,(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$\&c.$$

erit terminus summatorius quaesitus:

$$xa + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \&c$$

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inventio ad fractiones accomodari potest: quia enim supra §. 34. invenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n}$$

erit $$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inventas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

& $S.\frac{1}{(x+n)\ (x+n+1)\ (x+n+2)\ (x+n+3)} =$

$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}$

quae formae facile pro lubitu ulterius continuantur.

69. Quia erit $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1}$

erit quoque $S.\frac{1}{x+n}-S.\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1}$.

etsi ergo neuter horum duorum terminorum summatoriorum seorsim exhiberi potest, tamen eorum differentia cognoscitur; hincque in pluribus casibus summae serierum satis expedite assignantur: id quod usu venit, si terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores simplices resolvi potest. Tum enim tota fractio in fractiones partiales resolvatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, utrum terminus summatorius exhiberi queat nec ne.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium seriei huius:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ &c.

cuius terminus generalis est $=\frac{2}{xx+x}$.

Terminus iste generalis per resolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}$. Hinc terminus summatorius erit $=2\,S.\frac{1}{x}-2\,S.\frac{1}{x+1}$; qui ergo per praecedens lemma erit $=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}$. Sic, si fit $x=4$, erit $\frac{8}{5}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius seriei huius: $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117},$ &c.

cuius terminus generalis est $=\frac{1}{4xx+4x-3}$.

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resolvetur in has partes:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

At est $\quad S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

& $\quad S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

ergo $\quad S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

cuius pars octava dabit terminum summatorium quaesitum nempe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates evecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas seriérum exhibeamus, quarum numeratores sint $=1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

Terminus generalis est	Terminus summatorius erit
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2}-\frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.2.3.4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3}-\frac{1.2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.2.3.4.5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4}-\frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

un-

unde lex, qua istae expressiones progrediuntur, sponte appareret. Neque vero hinc terminus summatorius, qui conveniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi potest, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus summatorius praebet summam tot terminorum, quot unitates continentur in indice x; manifestum est harum serierum in infinitum continuatarum summas obtineri, si ponatur index x infinitus: quo casu expressionum modo inventarum termini posteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, evanescent. Hinc istae series infinitae finitas habebunt summas, quae erunt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \text{\&c.} = \frac{2}{1}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \text{\&c.} = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \text{\&c.} = \frac{4}{3}$$
$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \text{\&c.} = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \text{\&c.} = \frac{6}{5}$$
&c.

Omnium ergo serierum, quarum termini summatorii habentur, in infinitum continuatarum summae exhiberi poterunt posito $x = \infty$, dummodo hoc casu summae fiant finitae: quod quidem evenit, si in termino summatorio x tot habeat dimensiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CA-