CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.

I.

Ex iis, quae in Libro ſuperiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus ſunt expoſita, perſpicuum eſt, prout quantitas variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati. Sic, ſi quantitas variabilis x capiat incrementum ω, ita ut pro x ſcribatur $x + \omega$, omnes functiones ipſius x, cuiuſmodi ſunt xx; x^3; $\frac{a + x}{xx + aa}$, alios induent valores: ſcilicet xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$; x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a + x}{aa + xx}$ transſmutabitur in $\frac{a + x + \omega}{aa + xx + 2x\omega + \omega\omega}$.

Huiusmodi ergo alteratio semper orietur, nisi functio speciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, revera autem sit quantitas constans, veluti x^0: quo casu talis functio invariata manet, utcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum sint satis exposita, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus universa analysis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x: pro qua successive valores in arithmetica progressione procedentes substituantur, scilicet: x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c. ac denotet y^{I} valorem quem functio y induit, si in ea loco x substituatur $x+\omega$; simili modo sit y^{II} is ipsius y valor, si loco x scribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c. valores ipsius y, qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c. ita ut isti diversi valores ipsarum x & y sequenti modo sibi respondeant:

$$\begin{array}{lllllll} x; & x+\omega; & x+2\omega; & x+3\omega; & x+4\omega; & x+5\omega; & \&c. \\ y; & y^{I}; & y^{II}; & y^{III}; & y^{IV}; & y^{V}; & \&c. \end{array}$$

3. Quemadmodum series arithmetica x; $x+\omega$; $x+2\omega$; &c. in infinitum continuari potest; ita series ex functione y orta y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendebit ab indole functionis y. Sic, si fuerit $y=x$; vel $y=ax+b$; series y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y=\frac{a}{bx+c}$, series prodibit harmonica: si autem sit $y=a^x$, habebitur series geometrica. Neque ulla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius x oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x, ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare cum omnis series certa lege formata habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, uti in doctrina de seriebus fusius explicari solet.

4.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. inter se discrepant, attendimus; quas ut ad differentialium naturam accomodemus, sequentibus signis indicemus, ut sit
$y^{I} - y = \Delta y$; $y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I}$; $y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}$; &c.
Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega = 1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali uti, qui pro arbitrio augeri diminuive queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^{I} primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negativo agnoscitur.

5. Quoniam y^{II} oritur ex y, si loco x scribatur $x + 2\omega$; manifestum est eandem quantitatem esse orituram si primum pro x ponatur $x + \omega$, tumque denuo $x + \omega$ loco x statuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I}, si in hoc loco x scribatur $x + \omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipsius y^{I} quod capit posito $x + \omega$ loco x; sicque Δy^{I} vocatur simili modo *Differentia* ipsius y^{I}. Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipsius y^{II}, seu eius incrementum, quod accipit, si loco x ponatur $x + \omega$; atque Δy^{III} erit differentia, seu incrementum ipsius y^{III}, & ita porro. Hoc pacto ex serie valorum ipsius y, qui sunt y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. obtinebitur series differentiarum Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; &c. quae inveniuntur, si quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahatur.

6. Inventa serie differentiarum, si ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a sequente subtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae secundae*; hocque modo per characteres convenientissime repraesentantur, ut significet:

$\Delta \Delta y$

$$\Delta\Delta y = \Delta y^{\mathrm{I}} - \Delta y$$
$$\Delta\Delta y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{II}} - \Delta y^{\mathrm{I}}$$
$$\Delta\Delta y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{III}} - \Delta y^{\mathrm{II}}$$
$$\Delta\Delta y^{\mathrm{III}} = \Delta y^{\mathrm{IV}} - \Delta y^{\mathrm{III}}$$
&c.

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia ſecunda ipſius y; $\Delta\Delta y^{\mathrm{I}}$ differentia ſecunda ipſius y^{I}, & ita porro. Simili autem modo ex differentiis ſecundis, ſi denuo earum differentiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo ſcribendae $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{\mathrm{I}}$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{\mathrm{I}}$; &c. ſicque ultra quouſque libuerit.

7. Repraeſentemus ſingulas has differentiarum ſeries ita in ſchemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; Δy^{III}; Δy^{IV}; &c.

DIFF. II. $\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^{\mathrm{I}}$; $\Delta\Delta y^{\mathrm{II}}$; $\Delta\Delta y^{\mathrm{III}}$; &c.

DIFF. III. $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{\mathrm{I}}$; $\Delta^3 y^{\mathrm{II}}$; &c.

DIFF. IV. $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{\mathrm{I}}$; &c.

DIFF. V. $\Delta^5 y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quoſque terminos a ſequentibus ſubtrahendo. Quacunque ergo functione ipſius x loco y ſubſtituta, quoniam valores y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. per no-

notas compositiones facile formantur, ex iis sine labore singulae differentiarum series invenientur.

8. Ponamus esse $y = x$; eritque $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$: & ita porro. Unde differentiis sumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipsius x erunt constantes, ac proinde differentiae secundae omnes evanescent; pariterque differentiae tertiae, & sequentium ordinum omnes. Cum igitur sit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iste character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x, cuius valores successivi x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. arithmeticam progressionem constituere assumuntur, differentiae Δx, Δx^{I}, Δx^{II}, &c. erunt constantes atque inter se aequales; ac propterea erit $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^{3} x = 0$, $\Delta^{4} = 0$, sicque porro

9. Pro valoribus ipsius x, qui ipsi successive tribuuntur, progressionem arithmeticam hic assumsimus, ita ut horum valorum differentiae primae sint constantes, secundae ac reliquae omnes evanescant. Quod etsi ab arbitrio nostro pendet, cum aliam quamcunque progressionem, aeque adhibere potuissemus; tamen progressio arithmetica prae reliquis omnibus commodissime usurpari solet, cum quod sit simplicissima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere potest, pateat. Tribuendo enim ipsi ω valores tam negativos quam affirmativos, in hac serie valorum ipsius x omnes omnino continentur quantitates reales, quae in locum ipsius x substitui possunt: contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negativos nullus aditus patuisset. Hanc ob causam variabilitas functionum y ex valoribus ipsius x progressionem arithmeticam constituentibus aptissime diiudicatur.

10. Uti est $\Delta y = y^{I} - y$, ita differentiae ulteriores quoque ex terminis primae seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. definiri possunt.

Cum enim ſit $\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$
erit
$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$
&
$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$
ideoque
$$\Delta^{3} y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$
ſimili modo erit
$$\Delta^{4} y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$
&
$$\Delta^{5} y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$
quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in poteſtatibus Binomii obſervatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis ſeriei y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. determinatur, ita differentia ſecunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiuſque ordinis ipſius y, ſimili modo differentiae omnium ordinum ipſius y^{I}; y^{II}; &c. definientur.

11. Propoſita ergo quacunque Functione y ſingulae eius differentiae, tam prima, quam ſequentes, quae quidem differentiae ω, qua valores ipſius x progrediuntur, reſpondent, poterunt inveniri. Neque vero ad hoc opus eſt, ut ſeries valorum ipſius y ulterius continuetur; quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur, ſi in y loco x ſcribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^{I} ipſa functio y ſubtrahatur; ita differentia ſecunda $\Delta\Delta y$ obtinebitur ſi in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, ut oriatur Δy^{I}, atque Δy a Δy^{I} ſubtrahatur. Simili modo ſi differentiae ſecundae $\Delta\Delta y$ capiatur differentia, eam ſubtrahendo a valore, quem induit, ſi loco x ponatur $x + \omega$, proveniet differentia tertia $\Delta^{3} y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^{4} y$, &c. Dummodo ergo quis noverit differentiam primam cuiuſque functionis inveſtigare, ſimul poterit differentiam ſecundam, ter-

tiam,

tiam, omnesque sequentes invenire, propterea quod differentia secunda ipsius y nil aliud est, nisi differentia prima ipsius Δy; & differentia tertia ipsius y nil aliud, nisi differentia prima ipsius $\Delta\Delta y$; sicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusve partibus composita, ut sit $y = p + q + r +$ &c.; tum quia est $y^{I} = p^{I} + q^{I} + r^{I} +$ &c., erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ &c., similique modo porro $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ &c., unde inventio differentiarum, si functio proposita ex partibus fuerit composita, non parum facilior redditur. Quod si vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q, nempe $y = pq$, quia erit $y^{I} = p^{I} q^{I}$, & $p^{I} = p + \Delta p$, atque $q^{I} = q + \Delta q$, fiet $p^{I} q^{I} = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q$, hincque $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q$. Unde, si sit p quantitas constans $= a$, ob $\Delta a = 0$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a\Delta q$, similique modo differentia secunda $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, tertia $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra est aggregatum ex aliquot potestatibus ipsius x; omnes differentias functionum rationalium integrarum invenire poterimus, si differentias potestatum tantum exhibere noverimus. Hancobrem singularum potestatum quantitatis variabilis x differentias investigemus in sequentibus exemplis.

Cum autem sit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiamsi x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus esse $\Delta x = \omega$; & $\Delta\Delta x = 0$, simulque differentiae sequentium ordinum evanescunt. Quae cum sint manifesta a Potestate secunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^2.

Cum hic sit $y = x^2$, erit $y^{I} = (x + \omega)^2$, ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae est differentia prima. Iam ob ω

B quan-

quantitatem constantem, erit $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^3.

Ponatur $y = x^3$; &, cum sit $y^{I} = (x+\omega)^3$, erit

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

quae est differentia prima. Deinde ob

$$\Delta . xx = 2\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta . 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

&

$$\Delta . 3\omega^2 x = 3\omega^3; \quad \& \quad \Delta . \omega^3 = 0:$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3: \quad \text{atque} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3:$$

Differentiae vero sequentes evanescent.

EXEMPLUM III.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^4.

Posito $y = x^4$; ob $y^{I} = (x+\omega)^4$ erit

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4;$$

quae est differentia prima. Tum ex praecedentibus est:

$$\begin{aligned} \Delta . 4\omega x^3 &= 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4 \\ \Delta . 6\omega^2 x^2 &= \quad \ldots \quad 12\omega^3 x + 6\omega^4 \\ \Delta . 4\omega^3 x &= \quad \ldots \ldots \quad + 4\omega^4 \\ \Delta . \omega^4 &= \quad \ldots \ldots \ldots \quad 0 \end{aligned}$$

His colligendis erit differentia secunda:

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4:$$

Quia deinde porro est:

$$\begin{aligned} \Delta . 12\omega^2 x^2 &= 24\omega^3 x + 12\omega^4 \\ \Delta . 24\omega^3 x &= \quad \ldots \quad 24\omega^4 \\ \Delta . 14\omega^4 &= \quad \ldots \ldots \quad 0 \end{aligned}$$

pro-

prodibit differentia tertia:

$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$

atque tandem differentia quarta:

$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$

quae cum sit constans, differentiae sequentium ordinum evanescent.

EXEMPLUM IV.

Invenire differentias cuiusvis ordinis potestatis x^n.

Ponatur $y = x^n$; &, cum sit $y^{I} = (x + \omega)^n$; $y^{II} = (x + 2\omega)^n$; $y^{III} = (x + 3\omega)^n$; &c. Potestates evolutae dabunt:

$$y = x^n$$

$$y^{I} = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

Hinc, differentiis sumendis, prodibit:

$$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{I} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}7\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 19\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 37\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

ſumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 14\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{I} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 50\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{II} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 110\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex his per ſubtractionem ulterius eruitur

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y^{I} = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 60\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

atque porro

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

14. Quo lex, ſecundum quam iſtae differentiae poteſtatis

x^n

x^n progrediuntur, facilius perſpiciatur, ponamus primo brevitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$
$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$
$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$
&c.

Deinde ſequens formetur Tabula, quae pro ſingulis differentiis inſerviet.

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0	; &c.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1	; &c.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254	; &c.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796	; &c.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824	; &c.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000	; &c.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520	; &c.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120	; &c.

in qua Tabula numerus cuiuſvis ſeriei invenitur, ſi eiuſdem ſeriei praecedens ad numerum ſupra poſitum addatur, atque ſumma per indicem characteri Δ infixum multiplicetur. Sic, in ſerie differentiae $\Delta^5 y$ reſpondente, terminus 16800 invenitur, ſi praecedens 1800 ad ſupra ſcriptum 1560 addatur, atque ſumma 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac conſtituta, ſingulae differentiae Poteſtatis $x^n = y$ ſequenti modo ſe habebunt:

Δy

$$\Delta y = A\,\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\,\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = 2\,B\omega^2 x^{n-2} + 6\,C\omega^3 x^{n-3} + 14\,D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = 6\,C\omega^3 x^{n-3} + 36\,D\,\omega^4 x^{n-4} + 150\,E\omega^5 x^{n-5} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = 24\,D\omega^4 x^{n-4} + 240\,E\,\omega^5 x^{n-5} + 1560\,F\omega^6 x^{n-6} + \&c.$$

Generatim autem poteſtatis x^n differentia ordinis m, ſeu $\Delta^m y$, ſequenti modo exprimetur.

Sit

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1}\,I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2}\,K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3}\,L;$$

&c.

Deinde vero ſit:

$$\alpha = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^m + \&c.$$

$$\beta = m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{m+1} + \&c.$$

$$\gamma = m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{m+2} + \&c.$$

quibus valoribus inventis erit

$$\Delta^m y = \alpha\, I\omega^m x^{n-m} + \beta\, K\omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma\, L\,\omega^{m+2} x^{n-m-2}\ \&c.$$

cu-

cuius expreſſionis ratio ex modo, quo ſingulae differentiae ex valoribus y, y', y'', y''', &c. eliciuntur, ſponte ſequitur.

16. Ex his perſpicuum eſt, ſi eſponens n fuerit numerus integer affirmativus, tandem ad differentias perveniri conſtantes, hisque ulteriores omnes eſſe $= 0$. Sic erit

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta^2.\ x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3.\ x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4.\ x^4 = 24\omega^4$$

& tandem

$$\Delta^n.\ x^n = 1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ n.\ \omega^n$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias conſtantes deducetur. Scilicet, functio ipſius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet conſtantem $= a\omega$. Functio ſecundi gradus $axx + bx + c$ differentiam ſecundam habebit conſtantem $= 2a\omega\omega$; functionis autem tertii gradus differentia tertia erit conſtans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo invenimus differentias poteſtatis x^n, quoque latius patet, atque ad eas poteſtates, quarum exponens n eſt numerus negativus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiuſmodi poteſtatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum ſecundarum ac ſequentium non tam facile cernitur: erit ergo,

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta.\ x^2 = 2\omega x + \omega^2$$
$$\Delta.\ x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta.\ x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \ \&c.$$

Simili modo vero erit

$$\Delta . x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \ldots \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \ldots \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \ldots \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \ldots \ldots \&c.$$

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta . x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \ldots \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \ldots \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \ldots \&c.$$

$$\Delta . x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \ldots \&c.$$

18. Apparet itaque has differentias, ſi exponens ipſius x non fuerit numerus integer affirmativus, in infinitum progredi, ſeu ex terminorum numero infinito conſtare. Interim tamen eaedem differentiae quoque per expreſſionem finitam exhiberi poſſunt. Cum enim, poſito

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, ſit $y^{1} = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta . x^{-1} = \Delta . \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$;

un-

unde, si fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in seriem convertatur, prodit expressio superior. Simili modo erit

$$\Delta . x^{-2} = \Delta . \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta . \sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \ \& \ \Delta . \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae si more solito in series explicentur, superiores expressiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, sive fractarum sive irrationalium, inveniri possunt: sic si quaeratur differentia prima fractionis $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia est $y^1 = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit

$$\Delta y = \Delta . \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx},$$

quae expressio quoque in seriem infinitam converti potest. Ponatur $aa+xx = P$, & $2\omega x+\omega\omega = Q$; erit

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

Restitutis ergo loco P & Q valoribus erit:

$$\Delta y = \Delta . \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x+\omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx+4\omega^3 x+\omega^4}{(aa+xx)^3}$$
$$- \frac{8\omega^3 x^3+12\omega^4 x^2+6\omega^5 x+\omega^6}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

 qui

qui termini si secundum potestates ipsius ω ordinentur erit:

$$\Delta.\frac{1}{aa+xx}=-\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2}+\frac{\omega^2(3xx-aa)}{(aa+xx)^3}-\frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4}+\&c.$$

20. Similibus seriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi possunt.

Sit proposita ista functio $y=\sqrt{(aa+xx)}$; &, cum sit $y^1=\sqrt{(aa+xx+2\omega x+\omega\omega)}$, ponatur $aa+xx=P$, & $2\omega x+\omega\omega=Q$

$$\text{erit } \Delta y=\sqrt{(P+Q)}-\sqrt{P}=\frac{Q}{2\sqrt{P}}-\frac{QQ}{8P\sqrt{P}}+\frac{Q^3}{16PP\sqrt{P}}-\&c.$$

unde fiet

$$\Delta y=\Delta.\sqrt{(aa+xx)}=\frac{2\omega x+\omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}}-\frac{4\omega^2x^2+4\omega^3x+\omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}+\&c.$$

vel

$$=\frac{\omega x}{\sqrt{(aa+xx)}}+\frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}-\frac{aa\omega^3x}{2(aa+xx)^2\sqrt{(aa+xx)}}\ \&c.$$

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipsius x, quae sit y, differentiam hac forma exprimi posse, ut sit

$$\Delta y=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+\&c.$$

existentibus P, Q, R, S, &c. certis ipsius x functionibus, quae quovis casu ex functione y definiri possunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum transcendentium excluduntur, id quod ex sequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipsius x.

Ponatur $y=lx$; & cum sit $y^1=l(x+\omega)$, erit

erit

$$\Delta y = y^{I} - y = l(x+\omega) - lx = l\left(1+\frac{\omega}{x}\right).$$

Huiusmodi autem logarithmum supra docuimus per seriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta . lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{\&c.}$$

EXEMPLUM II.

Invenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x.

Posito $y = a^x$ erit $y^{I} = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$: at supra ostendimus esse

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

quo valore introducto erit

$$\Delta . a^x = y^{I} - y = \Delta y = \frac{a^x \omega l a}{1.} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius $= 1$, invenire differentiam sinus arcus x.

Sit $\sin x = y$, erit $y^{I} = \sin(x+\omega)$, unde $\Delta y = y^{I} - y = \sin(x+\omega) - \sin x$. At est $\sin(x+\omega) = \cos\omega . \sin x + \sin\omega . \cos x$, atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{\&c.}$$

&

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{\&c.}$$

quibus feriebus fubftitutis erit:

$$\Delta.\sin x = \omega.\cos x - \frac{\omega^2}{2}\sin x - \frac{\omega^3}{6}\cos x + \frac{\omega^4}{24}\sin x + \frac{\omega^5}{120}\cos x - \&c.$$

EXEMPLUM IV.

In circulo cuius radius = 1 invenire differentiam cofinus arcus x.

Pofito $y = \cos x$, ob $y^I = \cos(x + \omega)$
erit $y^I = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x$
& $\Delta y = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x - \cos x$
Seriebus ergo ante expofitis adhibendis prodibit:

$$\Delta.\cos x = -\omega\sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x - \&c.$$

22. Cum igitur propofita quacunque functione ipfius x, five algebraica five tranfcendente, quae fit y, eius differentia prima eiufmodi habeat formam ut fit:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

fi huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam fecundam ipfius y huiufmodi formam effe habituram:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \&c.$$

fimilique modo differentia tertia ipfius y, erit huiufmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \&c.$$

ficque porro.

Ubi notandum eft litteras P, Q, R, &c. hic non pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera in diverfis differentiis eandem functionem ipfius x denotari: ideo enim tantum iifdem litteris utor, ne fufficiens diverfarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum *iftae differentiarum formae* probe funt *notandae*, cum in Analyfi infinitorum maximum ufum offerant.

23. Cum igitur modum expofuerim, quo cuiufvis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae fequentium ordinum inveniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y fucceffivis y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. reperiuntur: viciffim ex differentiis ipfius y cuiufque ordinis datis, ifti ipfi variati valores ipfius y elici poterunt. Erit enim

$$y^{I} = y + \Delta y$$
$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$
$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$
&c.

ubi coefficientes numerici iterum ex evolutione binomii nafcuntur. Quemadmodum ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. funt valores ipfius y, qui oriuntur fi loco x fucceffive ponantur hi valores $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, &c. ftatim valorem ipfius $y^{(n)}$ affignare poterimus, qui prodit fi loco x fcribatur $x + n\omega$, erit fcilicet ifte valor:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\Delta^3 y + \text{\&c.}$$

Hincque adeo etiam valores ipfius y praeberi poffunt fi n fuerit numerus negativus. Sic, fi loco x ponatur $x - \omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{\&c.}$$

fin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y tranfibit in:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{\&c.}$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inverfa, qua, fi detur differentia, ex ea ipfa illa functio, cuius eft differentia, inveftigari debeat. Cum autem hoc fit difficillimum atque faepe numero ipfam analyfin infinitorum requirat, cafus

ſus tantum quoſdam faciliores evolvamus. Primum igitur, regrediendo, ſi functionis cuiuſpiam differentiam invenerimus, viciſſim hac differentia propoſita, ipſa illa functio, unde eſt nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax + b$ differentia ſit $a\omega$, ſi quaeratur cuiusnam functionis differentia ſit $a\omega$; reſponſio erit in promtu, eam functionem eſſe $ax + b$. In hac igitur reperitur quantitas conſtans b, quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio noſtro pendet. Perpetuo autem ſi functionis cuiuſvis P differentia fuerit Q, quoque functionis P + A, (denotante A quantitatem quamcunque conſtantem,) differentia erit Q. Hinc, ſi iſta differentia Q proponatur, functio, ex qua ea eſt orta, erit P + A, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum conſtans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaeſitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod ſumma differentiae opponi ſolet, tum etiam, quod functio quaeſita revera ſit ſumma omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum enim eſt $y^{I} = y + \Delta y$, & $y^{II} = y + \Delta y + \Delta y^{I}$, ſi valores ipſius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x - \omega$ reſpondet, ſcribatur y_{I}, huncque praecedens y_{II}, & qui ultra praecedunt y_{III}, y_{IV}, y_{V}, &c. hincque ſeries formetur retrograda, cum ſuis differentiis:

$$y_{V};\ y_{IV};\ y_{III};\ y_{II};\ y_{I};\ y$$

&

$$\Delta y_{V};\ \Delta y_{IV};\ \Delta y_{III};\ \Delta y_{II};\ \Delta y_{I}$$

erit

$$y = \Delta y_{I} + y_{I}$$

&

ob $y_{I} = \Delta y_{II} + y_{II}$, porroque $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$

erit utique

$$y = \Delta y_{I} + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_{V}$$

&c.

ſic-

sicque erit functio y, cuius differentia est Δy, summa omnium valorum antecedentium differentiae Δy, qui oriuntur, si loco x scribantur valores antecedentes $x-\omega$; $x-2\omega$; $x-3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam usi sumus signo Δ, ita summam indicabimus signo Σ: scilicet, si functionis y differentia fuerit z, erit $z=\Delta y$; unde, si y detur, differentiam z invenire ante docuimus. Quod si autem data sit differentia z, eiusque summa y reperiri debeat, fiet $y=\Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z=\Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y=\Sigma z$; ubi constans quantitas quaecunque adiici poterit ob rationes supra datas; ex quo, aequatio $z=\Delta y$, si invertatur, dabit quoque $y=\Sigma z+C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia sit $a\Delta y=az$, erit $\Sigma az=ay$, si quidem a sit quantitas constans. Quia ergo est $\Delta x=\omega$; erit $\Sigma\omega=x+C$ & $\Sigma a\omega=ax+C$; atque ob ω quantitatem constantem, erit $\Sigma\omega^2=\omega x+C$; $\Sigma\omega^3=\omega^2x+C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias potestatum ipsius x supra inventas invertamus, erit

$$\Sigma\omega=x;\quad \text{hincque}\quad \Sigma 1=\frac{x}{\omega};$$

Deinde habemus

$$\Sigma\,(2\omega x+\omega^2)=x^2;$$

unde fit

$$\Sigma x=\frac{x^2}{2\omega}-\Sigma\frac{\omega}{2}=\frac{x^2}{2\omega}-\frac{x}{2}.$$

Porro est

$$\Sigma\,(3\omega xx+3\omega^2x+\omega^3)=x^3$$

seu $$3\omega\Sigma x^2+3\omega^2\Sigma x+\omega^3\Sigma 1=x^3$$

ergo $$\Sigma x^2=\frac{x^3}{3\omega}-\omega\Sigma x-\frac{\omega^2}{3}\Sigma 1$$

seu $$\Sigma x^2=\frac{x^3}{3\omega}-\frac{x^2}{2}+\frac{\omega x}{6}$$

simi-

ſimili modo erit

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\sum x^2 - \omega^2 \sum x - \frac{\omega^3}{4}\sum 1$$

ubi, ſi loco $\sum x^2$, $\sum x$ & $\sum 1$ valores ante inventi ſubſtituantur, reperietur:

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Deinde, cum ſit

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega \sum x^3 - 2\omega^2 \sum x^2 - \omega^3 \sum x - \frac{\omega^4}{5}\sum 1$$

erit, adhibendis ſubſtitutionibus:

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

ſimili modo ulterius progrediendo reperietur

$$\sum x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

&

$$\sum x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x$$

quas expreſſiones infra facilius invenire docebimus.

28. Si ergo differentia propoſita fuerit functio rationalis integra ipſius x, eius ſumma, (ſeu ea functio, cuius ea eſt differentia) ex his formulis facile invenitur. Quia enim differentia ex aliquot poteſtatibus ipſius x conſtabit, quaeratur uniuſcuiuſque termini ſumma, omneſque iſtae ſummae colligantur.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inventarum, erit

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

& $$\Sigma bx = \;.\;.\; \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

atque $$\Sigma c = \;.\;.\;.\;.\; \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has summas erit

$$\Sigma(axx+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega-b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2 - 3b\omega + 6c)}{6\omega}x + C$$

quae est functio quaesita, cuius differentia est $axx+bx+c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia est $x^4 - 2\omega^2 xx + \omega^4$.

Operationem simili modo instituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

&

$$-\Sigma 2\omega^2 x^2 = \;.\; -\frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

atque

$$+\Sigma\omega^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \omega^3 x$$

unde functio quaesita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C$$

 Si

Si enim hic loco x ponatur $x + \omega$, atque a quantitate resultante subtrahatur ista inventa, remanebit proposita differentia $x^4 - 2\omega^2 x^2 + \omega^4$.

29. Si summas, quas pro potestatibus ipsius x invenimus, attentius inspiciamus, in terminis primis, secundis, ac tertiis mox quidem legem observabimus, qua illi secundum singulas potestates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita est perspicua, ut summam potestatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in sequentibus docebitur esse:

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2.3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2.3.4.5}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-6)\omega^7}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 8.\ 9}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-8)\omega^9}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 10.\ 11}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-10)\omega^{11}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 12.\ 13}x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-12)\omega^{13}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 14.\ 15}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-14)\omega^{15}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 16.\ 17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-16)\omega^{17}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 18.\ 19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-18)\omega^{19}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 20.\ 21}x^{n-19}$$

+

$$
\begin{aligned}
&+\frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-20)\,\omega^{21}}{2\,.\,3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;22\,.\,23}\,x^{n-22}\\
&-\frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-22)\,\omega^{23}}{2\,.\,3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;24\,.\,25}\,x^{n-23}\\
&+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-24)\,\omega^{25}}{2\,.\,3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;26\,.\,27}\,x^{n-25}\\
&-\frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-26)\,\omega^{27}}{2\,.\,3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;28\,.\,29}\,x^{n-27}\\
&+\frac{8615841276005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;(n-28)\,\omega^{29}}{2\,.\,3\;.\;.\;.\;30\,.\,31}\,x^{n-29}
\end{aligned}
$$

$$\&c. + C$$

cuius progressionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis est situm, qui quemadmodum formentur, hic locus nondum est, ubi exponi queat.

30. Apparet autem nisi n sit numerus integer affirmativus, hanc summae expressionem in infinitum progredi, neque hoc modo summam in forma finita exhiberi posse. Ceterum hic notandum est, non omnes potestates ipsius x proposita x^n inferiores occurrere; desunt enim termini x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, &c. quippe quorum coefficientes sunt $=0$, etiamsi termini secundi x^n coefficiens hanc legem non sequatur, sed sit $=-\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius espressionis ope summae potestatum, quarum exponentes sunt vel negativi vel fracti in forma infinita exhiberi solo excepto casu quo $n=-1$, quia tum fit terminus $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, posito $n=-2$; erit

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{3x^3} + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\omega^3}{5x^5}$$
$$- \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\omega^5}{7x^7} + \tfrac{3}{10}\cdot\frac{\omega^7}{9x^9} - \tfrac{5}{6}\cdot\frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210}\cdot\frac{\omega^{11}}{13x^{13}}$$
$$- \tfrac{35}{2}\cdot\frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30}\cdot\frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c.$$

31. Si ergo differentia proposita fuerit potestas ipsius x quaecumque, eius summa hinc perpetuo assignari, seu functio, cuius ea sit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia proposita aliam habeat formam, ut in potestates ipsius x, tanquam partes, distribui nequeat, tum summa difficillime ac saepenumero prorsus non inveniri potest: nisi forte pateat, eam ex quapiam functione esse ortam. Hanc ob causam conveniet plurium functionum differentias investigare easque probe notare, ut si quando huiusmodi differentia proponatur, eius summa, seu functio unde est orta, statim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas suppeditabit, quarum ope inventio summarum mirifice sublevabitur.

32. Facilius autem saepe ex differentia proposita reperitur summa quaesita, si haec ex factoribus simplicibus constet, qui progressionem arithmeticam constituant, cuius differentia sit ipsa quantitas ω. Sic, si proposita fuerit functio $(x+\omega)(x+2\omega)$, eius differentia quaeratur: quia, posito $x+\omega$ loco x, haec functio abit in $(x+2\omega)(x+3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x+2\omega)$. Quare vicissim, si proponatur differentia $2\omega(x+2\omega)$, eius summa erit $(x+\omega)(x+2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Si-

Simili modo, si proponatur functio $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit eius differentia $2\omega(x+(n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma(x+n\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus constet, ut sit $y=(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit

$$y^{I}=(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y=3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur esse:

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)=$$
$$\frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega).$$

unde lex inveniendi summas, si differentia ex pluribus huiusmodi factoribus constet, sponte patet. Quamvis autem hae differentiae sint functiones rationales integrae, tamen earum summae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractarum summas inveniendas. Sit enim proposita fractio

$$y=\frac{1}{x+n\omega};\ \text{quia erit}\ y^{I}=\frac{1}{x+(n+1)\omega}$$

erit

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega} = -\frac{1}{\omega}.\ \frac{1}{x+n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)}$$

ob $y^{1} = \dfrac{1}{(x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{2\omega}.\frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)}$$

Simili modo erit porro

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)\ (x+(n+3)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{3\omega}.\ \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}.$$

35. Modus iste summandi probe est tenendus, quia huiusmodi differentiarum summae per praecedentem methodum inveniri non possunt. Quodsi autem differentia insuper ha-

habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progressione procedant, tum tutissimus modus investigandi summas est, ut differentia proposita in suas fractiones simplices resolvatur, quarum singulae etsi summari nequeunt, tamen binis coniungendis toties summa inveniri potest, quoties id quidem fieri licet, tantum enim erit dispiciendum, utrum summa ope huius formulae inveniri queat:

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etsi enim neutra harum summarum per se exhiberi potest, tamen earum differentia cognoscitur.

36. His igitur casibus negotium redit ad resolutionem cuiusque fractionis in fractiones suas simplices, quae in superiori libro fusius est ostensa. Quemadmodum ergo eius beneficio summae inveniri queant, aliquot exemplis docebimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}$$

Resolvatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega}$$

erit $$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}=$$

$$\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x}$$

at eſt

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega};$$

unde ſumma quaeſita erit

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur ſumma, cuius differentia eſt $\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}$.

Poſita hac differentia $=z$, erit $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3\omega}$

ideoque

$$\Sigma z=\Sigma\frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}=\Sigma\frac{1}{x+\omega}-$$

$$\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x+2\omega}.$$

quae eſt ſumma quaeſita. Quoties ergo hoc modo ſigna ſummatoria Σ ſeſe tandem tollunt, toties differentiae propoſitae ſumma exhiberi poterit; ſin autem haec deſtructio non ſuccedat, ſignum hoc eſt, ſummam inveniri non poſſe.

CA-