PRAEFATIO.

Quid sit Calculus Differentialis, atque in genere Analysis infinitorum, iis qui nulla adhuc eius cognitione sunt imbuti, vix explicari potest: neque hic, uti in aliis disciplinis fieri solet, exordium tractationis a definitione commode sumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; sed quoniam ad eam intelligendam eiusmodi opus est notionibus, non solum in vita communi, verum etiam in ipsa Analysi finitorum minus usitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione evolvi atque explicari solent: quo fit, ut eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam satis dilucide fuerint perspecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles versatur: etsi enim omnis quantitas sua natura in infinitum augeri & diminui potest; tamen dum calculus ad certum quoddam institutum dirigitur, aliae quantitates constanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctionis ac diminutionis variari: ad quam distinctionem notandam illae quantitates constantes, hae vero variabiles vocari solent; ita ut hoc discrimen non tam in rei natura, quam in quaestionis, ad quam calculus refertur, indole sit positum. Quoniam haec differentia inter quantitates constantes & variabiles exemplo maxime illustrabitur, consideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii explosi; siquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in ista investigatione est habenda: primo scilicet quantitas pulveris pyrii; tum elevatio tormenti supra horizontem; tertio longitudo iactus super plano horizontali; quarto tempus, quo globus explosus in aere versatur: ac nisi experimenta eodem tormento instituantur, insuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a

va-

varietate tormenti & globi animum removeamus, ne in quaestiones nimium implicatas incidamus. Quodsi ergo servata perpetuo eadem pulveris pyrii quantitate, elevatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulveris seu vis impulsus erit quantitas constans, elevatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; si quidem pro omnibus elevationis gradibus has res definire velimus, ut inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus elevationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si servata eadem tormenti elevatione, quantitas pulveris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim elevatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulveris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, ut mutata una reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulveris pyrii eadem manebat, mutata tormenti elevatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; suntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab elevatione tormenti, haecque mutata simul certas quasdam mutationes patientes: posteriori vero casu pendent a quantitate pulveris pyrii, cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x *denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab* x *pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuius-*

mo-

modi sunt quadratum eius xx, *aliaeve potentiae quaecunque. nec non quantitates ex his utcunque compositae; quin etiam transcendentes*, & *in genere quaecunque ita ab* x *pendent, ut aucta vel diminuta* x *ipsae mutationes recipiant. Hinc, iam nascitur quaestio, qua quaeritur, si quantitas* x *data quantitate sive augeatur sive diminuatur, quantum inde quaevis eius functiones immutentur, seu quantum incrementum decrementumve accipiant. Casibus quidem simplicioribus haec quaestio facile resolvitur: si enim quantitas* x *augeatur quantitate* ω, *eius quadratum* xx *hinc incrementum capiet* 2xω + ωω; *sicque incrementum ipsius* x *se habebit ad incrementum ipsius* xx, *ut* ω *ad* 2xω + ωω, *hoc est, ut* 1 *ad* 2x + ω; *similique modo in aliis casibus ratio incrementi ipsius* x *ad incrementum, vel decrementum, quod quaevis eius functio inde adipiscitur, considerari solet. Est vero investigatio rationis huiusmodi incrementorum ipsa non solum maximi momenti, sed ei etiam universa Analysis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, sumamus exemplum superius quadrati* xx, *cuius incrementum* 2xω + ωω, *quod capit, dum ipsa quantitas* x *incremento* ω *augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, ut* 2x + ω *ad* 1; *unde perspicuum est, quo minus sumatur incrementum* ω, *eo propius istam rationem accedere ad rationem* 2x *ad* 1; *neque tamen ante prorsus in hanc rationem abit, quam incrementum illud* ω *plane evanescat. Hinc intelligimus, si quantitatis variabilis* x *incrementum* ω *in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius* xx *incrementum inde oriundum quidem evanescere, verumtamen ad id rationem tenere ut* 2x *ad* 1; & *quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius* x *est intelligendum; quippe quarum incrementa evanescentia, quae capiunt, dum ipsa quantitas* x *incrementum evanescens sumit ad hoc ipsum certam* & *assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem* calculi Differentialis, *qui est* methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur: *hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata, qui convenientissime ita definitur, ut dicatur esse* methodus ex cognita ratione incrementorum evanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inveniendi. *Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parva quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati* x *incrementum tribuatur* ω, *ut abeat in* $x+\omega$, *eius quadratum* xx *abibit in* $xx+2x\omega+\omega\omega$, *ideoque incrementum capit* $2x\omega+\omega\omega$; *quare incrementum ipsius* x, *quod est* ω, *se habebit ad incrementum quadrati, quod est* $2x\omega+\omega\omega$, *uti* 1 *ad* $2x+\omega$; *quae ratio abit in* 1 *ad* $2x$, *tum demum, cum* ω *evanescit. Fiat igitur* $\omega=0$, *& ratio istorum incrementorum evanescentium, quae sola in calculo differentiali spectatur, utique est ut* 1 *ad* $2x$; *neque vicissim haec ratio veritati esset consentanea, nisi revera illud incrementum* ω *evanesceret, penitusque nihilo fieret aequale. Quodsi ergo hoc nihilum per* ω *indicatum referat incrementum quantitatis* x, *quia hoc se*

ha-

habet ad incrementum quadrati xx *ut* 1 *ad* 2x, *erit quadrati* xx *incrementum* $= 2x\omega$, *ideoque etiam nihilo aequale; unde simul constat annihilationem horum incrementorum non obstare, quominus eorum ratio, quae est ut* 1 *ad* 2x *sit determinata. Quod nihilum iam hic littera* ω *exhibetur, id in calculo differentiali, quia ut incrementum quantitatis* x *spectatur, signo* dx *repraesentari, eiusque differentiale vocari solet; positoque* dx *loco* ω, *ipsius* xx *differentiale erit* 2xdx. *Simili modo ostenditur fore cubi* x^3 *differentiale* $= 3xxdx$, *& in genere cuiusque dignitatis* x^n *differentiale fore* $= nx^{n-1}dx$. *Quaecunque autem aliae functiones ipsius* x *proponantur, in calculo differentiali regulae traduntur eorum differentialia inveniendi: verum perpetuo tenendum est, cum haec differentialia absolute sint nihila, ex iis nihil aliud concludi, nisi eorum rationes mutuas, quae utique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes; quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parva negligerentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinitae parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul reiiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per calculum differentialem eaedem conclusiones ac per Geometriam elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam si ea infinite parva, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde necessario*

sario error, isque eo maior, quo magis ea coacervantur, resultare debet; hocque si minus eveniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compensantur, esset tribuendum, quam ipse calculus ab erroris suspicione liberaretur. Quodsi autem nullo novo errore huiusmodi compensatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipsum, quod volo, evincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & absolute pro nihilo esse habenda; neque infinite parva, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parva ita describuntur, ut instar pulvisculorum respectu vasti montis vel etiam totius globi terrestris spectari debeant: etsi enim qui magnitudinem totius globi terrestris calculo determinare susceperit, ei error non unius sed plurium millium pulvisculorum facile condonari soleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque gravis esset haec obiectio, si ullam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu est, quid lucri inde sperent, qui infinite parva a nihilo distingui volunt: metuunt autem, ne, si plane evanescant, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perduci sentiunt, tollatur: quomodo enim absolute nihila inter se comparari queant, nullo modo concipi posse profitentur. Necesse ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem instituant: hanc tamen magnitudinem tam parvam admittere coguntur, ut quasi esset nulla, spectari ac sine errore in calculo negligi possit. Neque tamen certam ac definitam ipsi magnitudinem, licet incomprehensibiliter parvam, assignare audent; semper enim si eam bis terve minorem assumerent, eodem modo comparationes se essent habiturae. Ex quo perspicuum est, nihil plane ipsam magnitudinem ad comparationem instituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamsi illa magnitudo penitus evanescat. Ex dictis autem supra manifestum est, eam comparationem, quae in calculo differentiali spectatur, ne locum quidem habere, nisi illa incrementa prorsus evanescant: incrementum enim quanti-

tita-

titatis x, *quod in genere indicavimus per* ω, *ad incrementum quadrati* xx, *quod est* $2x\omega+\omega\omega$, *rationem habet ut* 1 *ad* $2x+\omega$; *quae semper differt a ratione* 1 *ad* 2x, *nisi sit* $\omega=0$; *at si statuamus esse* $\omega=0$, *tum demum vere affirmare possumus; hanc rationem fieri exacte ut* 1 *ad* 2x. *Interim tamen perspicitur, quo minus illud incrementum* ω *accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita considerare, atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum illorum constituit, verum est obiectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is iecisse existimandus est, cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum evanescunt, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem speculationis vestigia deprehendimus apud antiquissimos Auctores, quibus idcirco idea quaedam levisque cognitio Analysis infinitorum abiudicari nequit. Paullatim deinde haec scientia maiora accepit incrementa, neque subito ad id fastigium, in quo nunc cernitur, est evecta; etiamsi quidem in ea multo plura adhuc sint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, utcunque sint compositae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa evanescentia inter se comparandi; sed sensim haec inventio ad functiones continuo magis complicatas processit. Quod scilicet ad functiones rationales attinet, ratio ultima, quam earum incrementa evanescentia inter se tenent, multo ante* NEUTONI *ac* LEIBNIZII *tempora assignari potuit; ita ut Calculus differentialis, quatenus ad solas functiones rationales applicatur, diu ante haec tem-*

pora inventus sit censendus. Tum vero nullum est dubium, quin NEUTONO *eam calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales versatur, acceptam referre debeamus; ad quam insigni suo Theoremate de evolutione generali potestatum binomii feliciter est deductus, quo eximio invento limites calculi differentialis iam mirifice erant amplificati.* LEIBNIZIO *autem non minus sumus obstricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut singulare artificium spectatum, in formam disciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in systema collegerit, ac dilucide explicaverit. Hinc enim maxima subsidia suggerebantur, ad hunc calculum ulterius excolendum, & ea, quae adhuc desiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur studio cum ipsius* LEIBNIZII, *tum* BERNOUILLIORUM *ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, sunt promoti, tum vero etiam solidissima fundamenta Calculi integralis constituta; quibus insistentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt.* NEUTONUS *vero etiam amplissima dederat specimina Calculi integralis, cuius prima inventio, cum a prima origine calculi differentialis vix separari queat, non ita absolute constitui potest; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda restat, hic calculus ne nunc quidem pro absolute invento haberi potest; sed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre contigerit, id grata mente agnoscere debemus. Atque haec de gloria inventionis huius calculi tenenda esse iudico, de qua quidem antehac tantopere est disceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae isti calculo a diversarum nationum Mathematicis imponi solent, attinet, ea omnia huc redeunt, ut cum data hic definitione egregie consentiant: sive enim incrementa illa evanescentia, quorum ratio consideratur, differentialia vocentur, sive fluxiones, ea semper nihilo aequalia sunt intelligenda; in quo vera notio infinite parvorum constitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus*

secun-

secundi & altiorum ordinum curiose magis quam utiliter sunt disputata, reddentur planissima, cum omnia per se aeque evanescant neque ea unquam per se, sed potius eorum relatio mutua spectari soleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa evanescentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, si & huius functionis incrementum evanescens cum aliis conferatur, res ad differentialia secunda referri est censenda; sicque porro progressio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita ut semper quantitates finitae revera animo obversentur, signaque differentialium tantum ad eas commode repraesentandas adhibeantur. Primo quidem intuitu ista Analysis infinitorum descriptio plerisque levis ac nimis sterilis videtur, etsi species illa arcana infinite parvorum re haud plus polliceatur: verum si rationes, quae inter incrementa evanescentia functionum quarumvis intercedunt, probe cognoscamus, haec cognitio saepenumero per se maximi est momenti; tum vero in plerisque iisque maxime arduis investigationibus ita est necessaria, ut sine eius adminiculo nihil plane intelligi possit. Veluti si quaestio sit de motu globi ex tormento explosi, simulque ratio resistentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per spatium finitum sit futurus, nullo modo statim definire licet, dum tam directio semitae, in qua globus incedit, quam ipsius celeritas, a qua resistentia pendet, quovis momento immutatur. Quo minus autem spatium, per quod motus fiat, consideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodsi autem illud spatium plane evanescens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum resistentiae per regulas motus accurate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse

esse arbitror usum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel levissimam investigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingrediatur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, ut rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes usus huius Analyseos sublimioris usque adeo diffunditur, ut omnia, quae sine eius interventu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro universum Calculum differentialem ex veris principiis derivare, atque ita copiose pertractare, ut nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inventa. In duas opus divisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inveniendi; sive functiones unicam variabilem sive duas pluresve involvant. In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. De usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent evoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS
PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI

EXPLICATIONEM