

E S S A Y
D'UNE DÉMONSTRATION MÉTAPHYSIQUE
DU PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'ÉQUILIBRE.

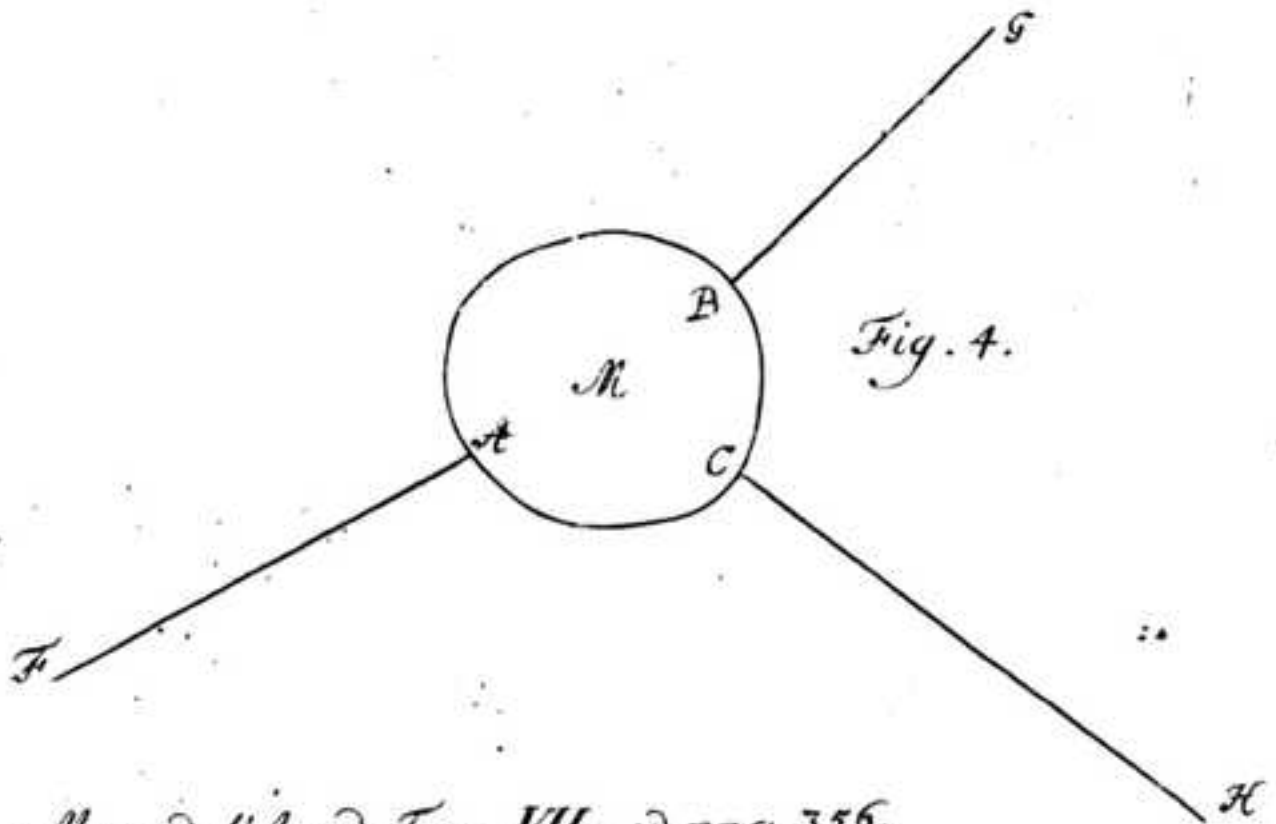
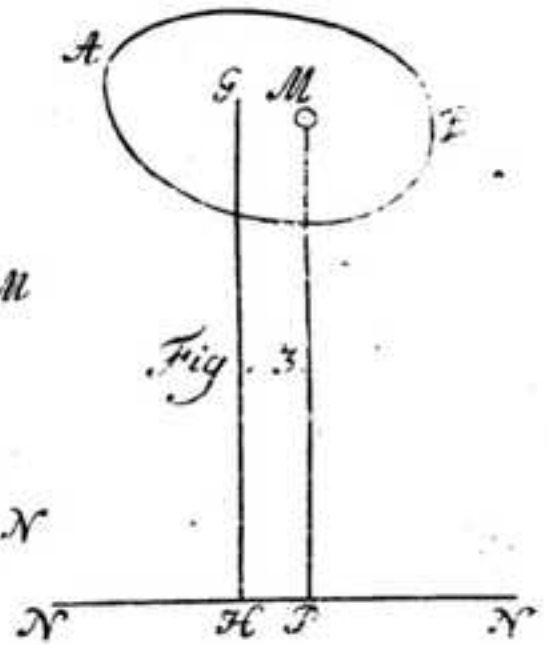
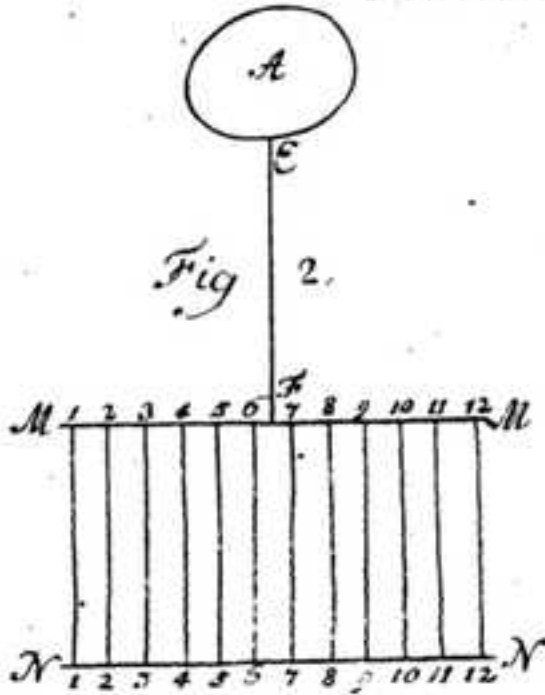
PAR M. EULER.

I.

Comme l'équilibre est produit par l'action des forces, il faut commencer par fixer la juste idée des forces & de la manière dont elles agissent. Or on nomme force, tout ce qui est capable de changer l'état des corps, tant de leur mouvement que du repos: car, puisque tout corps de soi-même demeure toujours dans le même état, soit de repos ou de mouvement, s'il y arrive quelque changement, la cause subsiste nécessairement hors du corps; & c'est cette cause, quelle qu'elle soit, qui est nommée force. Dans chaque force il y a deux choses à considérer, la quantité & la direction: par la quantité on comprend combien une force est plus grande ou plus petite qu'une autre, & la direction nous donne à connoître en quel sens chaque force agit sur les corps pour en troubler l'état.

Fig. 1.

II. Pour mieux éclaircir cela, soit A un corps quelconque, sur lequel agit une force quelconque suivant la direction EF: on comprend que si le corps étoit en repos, il seroit entraîné par cette force précisément selon la direction EF; & s'il étoit en mouvement, il seroit détourné de sa route selon cette même direction. Ainsi la direction est toujours la ligne droite, sur laquelle la force tend à transporter le corps; & cette tendance suffit à déterminer la direction, puis-



puisqu'il n'est pas ici question du mouvement actuel, qui sera imprimé au corps par la force, ce qui demanderoit sans doute une recherche plus profonde, & qui ne seroit plus du ressort de la Métaphysique. Je me borne ici à fixer uniquement l'idée de la direction, suivant laquelle une force agit sur un corps.

III. Il est aussi aisé de se former une idée juste de la quantité des forces en général : car, puisque la quantité ne se connoit que par comparaison, on n'a qu'à prendre une certaine force connue au lieu de l'unité, qui servira de mesure commune de toutes les autres forces. Ainsi prenant l'unité pour marquer cette force connue, lorsqu'on sçait le nombre, qui convient à la force EF, on aura une juste idée de sa quantité ; puisque ce nombre indique, combien de fois la force EF contient en soi la force prise pour l'unité.

IV. On peut encore considérer la chose de cette manière. Qu'on conçoive au Corps A attachée la corde EF, à laquelle tient une barre MM à angles droits, qui soit tirée vers une autre barre fixe NN par un certain nombre de filets, 11, 22, 33, 44, &c. dont chacun ait une force de se contracter égale à la force prise pour l'unité. Donc, si N marque le nombre de ces filets, ce nombre marquera en même tems la force, dont le corps A sera tiré par la corde EF ; car toutes les forces, dont les filets tendent à se contracter, concourent à approcher la barre MM de la barre immobile NN ; & partant, puisque leurs forces sont égales chacun à 1, & leur nombre = N, la force totale, qui en résulte pour entrainer le corps A avec la barre MM, sera = N, & la corde EF représentera en même tems la direction de cette force, qui agit sur le corps A.

Fig. 2.

V. Cela posé, il est clair que l'action de cette force consiste dans la contraction actuelle des filets 11, 22, 33, &c. & lorsque le corps A est effectivement entrainé par la corde EF, l'action sera d'autant plus grande, plus les filets seront devenus courts. Or je suppose ici, que les filets conservent toujours la même force pour se contracter,



ter, de sorte que la force totale, qui résulte de leur union, demeure constamment $\equiv N$. Ainsi le raccourcissement des filets fournira la plus juste mesure de l'action de la force totale N : & partant si nous supposons, qu'ils se soient contractés de la quantité z , ou que la longueur de chacun soit diminuée de z , de sorte que le corps A ait été entraîné par l'espace $\equiv z$, cette action sera exprimée par le produit Nz , qui marque le raccourcissement total de tous les filets.

VI. Soit x la distance du corps A au plan fixe NN , & b la longueur de la corde EF , qu'on doit considérer comme une quantité constante, & $x - b$ indiquera la longueur de chaque filet. Donc la somme des longueurs de tous les filets ensemble sera $\equiv N(x - b)$, qui est par conséquent la quantité, dont la diminution est le véritable objet de la force, ou bien la force, entant qu'elle sollicite le Corps A, tend à rendre cette quantité $N(x - b)$ de plus en plus petite. Or b étant une quantité constante, l'action de la force consiste dans la diminution de la quantité Nx ; car si les filets se contractent de la quantité z , on aura Nz pour la diminution de la quantité Nx .

VII. Voilà donc en quoi consiste, pour ainsi dire, le but de la force N , que nous considérons ; c'est de diminuer de plus en plus la quantité Nx , qui est le produit de la force N par la distance du corps A à la barre immobile NN . Or il est évident que cette distance absolue n'entre point proprement dans la considération ; car si nous concevions la barre NN éloignée à toute autre distance du corps A, la même contraction des filets produiroit toujours la même diminution dans la quantité Nx , pourvu que cette barre soit toujours perpendiculaire à la direction EF , suivant laquelle on conçoit, que le corps est sollicité par la force N .

VIII. Ayant donné cette idée de l'action de chaque force, on en tirera aisément ce principe général :

Que toute force agit autant qu'elle peut.

& dès qu'on aura compris le sens de cette proposition, on ne pourra refuser de l'admettre comme un Axiome. Car, puisque l'action d'une force consiste dans la contraction des filets, dont nous concevons la force composée; ces filets ne cesseront pas de se contracter, tant qu'ils ne rencontrent pas un obstacle invincible, qui s'oppose à leur contraction ultérieure: donc ces filets, & partant aussi la force qui en est composée, agira autant qu'elle peut, ou que les circonstances lui permettront d'agir.

IX. Lorsqu'un corps, ou un système de corps, est en équilibre, puisque les forces dont il est sollicité, sont tellement opposées entr'elles, qu'elles ne sçauroient agir, ou remuer le corps, il faut que l'action des forces soit la plus grande, ou que les filets, dont nous concevons les forces composées, se trouvent dans leur plus grande contraction, de sorte qu'il seroit impossible qu'elles se contractassent davantage. Ainsi un corps, ou système de corps, sera en équilibre, lorsqu'il est disposé en sorte avec les forces dont il est sollicité, que la contraction des filets est la plus grande, ou que la somme des longueurs de tous les filets pris ensemble soit la plus petite qu'il est possible.

X. Qu'on considère une force quelconque, qui concourt avec d'autres forces, pour maintenir un corps en équilibre; & soit cette force = N . Qu'on prenne à volonté sur la direction de cette force un point fixe, & soit x la distance de ce point à celui du corps, auquel la force est appliquée, & nous avons vu, que par la contraction des filets sus-mentionnés cette quantité Nx devient diminuée. Donc, si l'on assemble dans une somme ces formules Nx , qui couviennent à chacune des forces sollicitantes, cette somme doit être la plus petite, puisque la contraction de tous les filets pris ensemble doit être la plus grande dans le cas d'équilibre.

XI. La force de ce raisonnement consiste en ce que nous réduisons toutes les forces à un certain nombre de filets semblables & égaux en-

tr'eux, qui par leur force contractive composent les forces mêmes. Ainsi, lorsque le corps qui soutient l'action des forces, est en équilibre, il faut en vertu de nôtre axiome, que tous ces filets se trouvent dans leur plus grande contraction. Car, s'il étoit possible qu'ils se contractassent davantage, ils le feroient, & partant le corps ne seroit pas en équilibre. Donc, si le corps est en équilibre, il s'ensuit nécessairement, que les filets ne sauroient recevoir une plus grande contraction, ou ce qui revient au même, que la somme de toutes les forces sollicitantes soit la plus petite.

XII. Voilà donc une règle générale pour tous les équilibres des corps, qui sont sollicités par des forces quelconques, pourvu que ces forces soient constantes, ou qu'elles tirent avec les mêmes efforts, à quelques distances que les corps se trouvent à leur égard. Suivant cette règle on considérera chaque force à part, on prendra sur sa direction un point fixe, & on multipliera la force par la distance de ce point au lieu de l'application de la force. Ensuite on assemblera tous ces produits dans une somme, laquelle sera un *Minimum* dans le cas d'équilibre. Réciproquement donc on pourra déterminer, par la Méthode des plus grands & plus petits, l'état d'équilibre, lorsque les forces sont constantes; ou que la quantité N qui a exprimé jusqu'ici la force, n'est pas dépendante de la quantité x , qu'on considère ici comme variable.

Fig. 3.

XIII. De cette espece est la force de la gravité, entant qu'enous faisons abstraction de sa variation, qu'elle subit en des distances ou plus grandes, ou plus petites, du centre de la Terre. Donc si nous considérons un corps quelconque AB , dont les parties ne soient sollicitées que par la gravité, nous envisagerons chaque particule M séparément, qui étant sollicitée suivant la direction verticale MP , nous y prendrons à volonté un point fixe P , qui soit dans la ligne horizontale NN , nous poserons la distance $MP = x$; & nommant la masse de la particule $M = dM$, ce dM exprimera en même tems le poids de la parti-

particule M , ou la force dont elle est sollicitée suivant MP : donc $x dM$ fera le produit Nx pour cette particule ; & partant la somme de tous les $x dM$, qui résultent de toutes les particules du corps, fera la plus petite, lorsque le corps se trouve en équilibre.

XIV. Mais on sçait que la somme de tous les $x dM$ exprime le produit du poids entier du corps par la distance de son centre de gravité à la même ligne horizontale NN . Posant donc M pour le poids du corps, dont G soit le centre de gravité, & GH la distance de G à NN , le produit $M.GH$ étant égal à la somme de tous les $x dM$, sera un *Minimum* en cas d'équilibre. D'où l'on voit que les corps pèsans ne sçauroient être en équilibre, à moins que leur centre de gravité ne se trouve aussi bas qu'il est possible. Ainsi ce grand principe de la plus grande descente du centre de gravité, connu depuis longtems, sans qu'il eut été jamais démontré, est une suite nécessaire de ce que je viens d'établir.

XV. Mais la règle établie jusqu'ici ne peut être appliquée qu'aux forces, qui agissent avec le même effort à toutes distances, ou qui sont constantes. Car, si les forces ne sont pas constantes, leur résolution en des filets employée cy-dessous n'a plus lieu, ou bien il faudra supposer le nombre des filets variable, pendant qu'ils se contractent. Pour cet effet ce que nous avons posé cy-dessus $= Nx$ doit être décomposé dans ses élémens $N dx$; & puisque pour chaque distance x la force ou le nombre des filets est variable, soit elle $= P$, & ayant $P dx$ pour l'élément de la distance dx , l'intégrale $\int P dx$ fera la juste valeur, qui doit être prise au lieu de Nx , lorsque la force est variable.

XVI. Pour mettre cela dans un plus grand jour, on n'a qu'à regarder, comment les formules Nx tirées des forces constantes deviennent un *Minimum*. Or cela arrive, lorsque leurs différentiels $N dx$ pris ensemble évanouissent, & dans ces différentiels il n'est plus ques-

tion, si la force N est constante ou non. Donc, si la force est variable, savoir $= P$, on aura $P dx$ au lieu de $N dx$ pour en égaler la somme à zero; d'où il est évident, que la formule qui devient alors un *Minimum*, sera composée de ces formules $\int P dx$; qu'on doit tirer de chacune des forces sollicitantes: où il est clair que dans le cas des forces constantes, ou de $P = N$, on aura les mêmes formules Nx pour rendre un *Minimum*, que nous avons trouvées cy-dessus.

Fig. 4.

XVII. Voici donc le Principe universel, qui convient à tout état d'équilibre, & dont la vérité vient d'être déduite des axiomes, que personne ne sçauroit révoquer en doute. En vertu de ce principe on considérera chaque force dont le corps en équilibre est sollicité séparément en cette manière: soient $P, Q, R, \&c.$ les forces, qui agissent sur le corps M selon les directions AF, BG, CH ; sur lesquelles on prenne des points fixes F, G, H à volonté; & ayant nommé les distances $AF = x, BG = y, CH = z$, l'état d'équilibre aura toujours cette propriété, que la somme des formules $\int P dx + \int Q dy + \int R dz \&c.$ y est un *Minimum*.

XVIII. On voit bien qu'il est indifférent dans cette recherche, à quelque distance on veuille prendre ces points F, G, H , pourvu qu'ils soyent regardés dans le calcul comme fixes; car les différentiels dx, dy, dz demeureront toujours les mêmes. Or lorsque les forces sont variables, comme on considère les forces centrales, en les exprimant par de certaines fonctions des distances à leurs centres, il conviendra pour la commodité du calcul de prendre les points F, G, H , dans les centres mêmes des forces. Ainsi, s'il étoit $P = ax^n, Q = \beta y^n, \& R = \gamma z^n$, l'expression à rendre un *Minimum* feroit,

$$\frac{a}{n+1} x^{n+1} + \frac{\beta}{n+1} y^{n+1} + \frac{\gamma}{n+1} z^{n+1} \&c.$$

&

& cette recherche du *Minimum* se fera aisément dans tous les cas où de telles forces se trouvent.

XIX. Puisque chaque force P fournit dans le calcul une telle formule $\int P dx$, cette valeur est indubitablement quelque chose de bien essentiel à l'action des forces, puisque c'est d'elle que dépend uniquement l'équilibre, de sorte que, pourvu qu'on ait la valeur $\int P dx$, sans avoir égard à la force même, on est en état de déterminer l'équilibre ; ou bien la quantité $\int P dx$ concourt essentiellement à former l'équilibre. Il est donc très raisonnable de donner à cette quantité un nom particulier, qui convienne à son emploi ; & il me semble que celui d'*effort* n'exprime pas mal la nature de cet emploi.

XX. Pour juger donc de l'équilibre, il s'agit d'abord de trouver l'effort, qui convient à chaque force sollicitante ; pour cet effet ayant pris sur la direction de la force un point fixe F , & mis la distance $AF = x$, on n'a qu'à multiplier la force même P par le différentiel de cette distance dx , & l'intégrale $\int P dx$ sera l'effort de la force P . Alors le principe universel de l'équilibre, que nous venons de démontrer, sera renfermé dans cette règle bien simple :

Que la somme de tous les efforts, auxquels un corps en équilibre est assujetti, est un Minimum.

XXI. Lorsque le corps, dont on cherche l'état d'équilibre, est flexible ou même fluide, il en faut considérer séparément tous les élémens, & les forces, dont ils sont sollicités ; pour en tirer d'abord les efforts, auxquels chaque élément est assujetti. Ensuite on trouvera par le calcul intégral la somme de tous les efforts, ou l'effort total, qui agit sur le corps, & qui étant rendu un *Minimum*, montrera les conditions de l'équilibre. L'application que j'ai déjà faite de ce principe à une infinité de cas différens, tant par rapport à la nature des corps, qu'à la diversité des forces, en fait suffisamment voir l'importance, & les grands avantages, qu'on a encore lieu d'en espérer.



XXII. Je finirai par une remarque, qui ne contribuera pas peu à comprendre plus distinctement, comment ce principe est lié avec l'état d'équilibre. Cette remarque porte, qu'on n'a pas besoin d'introduire dans le calcul de l'équilibre les forces, qui attachent le corps à un objet fixe, ou qui le tiennent arrêté. Ainsi, pour trouver par cette méthode la courbure d'une chaîne suspendue, on ne regardera pas les forces, que soutiennent les clous, desquels la chaîne est suspendue; & lorsqu'il est question de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un vaisseau, il n'est pas nécessaire de considérer les forces dont le vaisseau est pressé par le fluide. Mais dans l'un & l'autre cas il suffira de considérer les seules forces de la gravité pour en déterminer l'état d'équilibre.

XXIII. La raison de cette différence se comprend aisément par la manière dont nous avons considéré l'action des forces, qui consistoit dans la contraction des filets. Ainsi, s'il y a des forces à l'action desquelles le corps ne sauroit obéir, comme sont celles, dont le corps est soutenu, ou arrêté, ou attaché à un objet immobile, telles forces n'entreront point dans notre calcul, ou bien leurs efforts doivent être considérés comme évanouissans, puisque les parties du corps qui en sont arrêtées, sont effectivement immobiles. Donc, ces forces étant exclues, il ne reste que les forces qui sont capables d'imprimer au corps quelque mouvement, qu'on doit considérer pour rechercher l'état d'équilibre, en prenant leurs efforts, & rendant leur somme un *Minimum*.

