SOLVTIO

PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EULERO,

Problema.

Tab. IV Fig. 1. Datis Diametris coniugatis E *e*, F *f* ellipsis tam magnitudine quam positione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Constructio.

Iungatur E F, et ex centro ellipsis C ducatur recta C G ita vt ang: F C G = ang: E C F; tum ducatur F G ita vt ang: C F G = ang: C E F; sicque triangulum C F G simile fiat triangulo C E F. Deinde iuncta *e* G angulus C *e* G bisecetur recta *e* H huicque ex centro C parallela educatur C I, huicque constituatur perpendicularis C K, quibus recta per E alteri diametro F *f* parallela acta I E K occurrat in punctis I et K. Ex E porro tam in C I quam C K demittantur perpendicula E L et E M, atque in C I capiatur C A media proportionalis inter C L et C I, itemque in C K capiatur C B media proportionalis inter C M et C K, erunt C A et C B semiaxes principales, tam positione quam magnitudine, determinati.

Alia

Alia Conſtructio.

Sint C E et C F ſemidiametri coniugatae, ſtatuatur Fig. 2.
E D = E C, vt C E D ſit triangulum iſoſceles, et capiantur E G = E H = C F, iungatur C H ipſique parallela ducatur G I rectam E D ſecans in I. Per I agatur C I K = C E, iunctaque E K biſecetur in M, erit recta C M poſitio alterius axis, eique perpendicularis C R poſitio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque in C M perpendiculum F N, quo producto in L vt ſit N L = F N erunt E K et F L ordinatae ad axem C M, et cum inſuper dentur tangentes in E et F et in L, eſt enim tangens E P parallela C F et tangens L Q parallela C K, hinc vtriusque ſemiaxis quantitas facile determinatur. Erit nempe alter ſemiaxis C A media proportionalis inter C M et C P, et alter C B media proportionalis inter C R et C Q ducta L R ad C Q perpendiculari.

Alia Conſtructio.

Cum diametri coniugatae in centro ſe ad angulos obliquos Fig. 3.
intuſecent, quorum alter acutus, alter obtuſus, eligantur binae ſemidiametri coniugatae C E, C F angulum acutum E C F conſtituentur, ſtatuaturque vt ante E D = E C, ac fiat E G = E H = C F, tum ductae, C H per G parallela agatur G I: iunctaque C I angulus E C I biſecetur recta C U, quae aequalis capiatur mediae proportionali inter C E et C I, eritque U alter focus: vnde ſimul alter e regione ſitus habebitur: Datis autem focis et puncto in ellipſi axes principales facile aſſignantur.

Demonstratio

harum Constructionum.

Fig. 4. Sit E C F quadrans ellipticus, in quo datae sunt semidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit C A alter semiaxium principalium cuius tam positio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius positione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis statuatur angulus A C M, vt sit angulus $ECM = 2\Phi$, et quia puncta E et M ab axe C A aequidistant, a centro quoque C aequidistabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur M P ipsi C F parallela, eritque angulus $EPM = ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\Phi$; et $CMP = \theta - 2\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:

$\sin. EPM : CM = \sin. PCM : PM = \sin. CMP : CP$

seu $\sin. \theta : e = \sin. 2\Phi : PM = \sin.(\theta - 2\Phi) : CP$

Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e \sin. 2\Phi}{\sin. \theta} \text{ et } CP = \frac{e \sin. (\theta - 2\Phi)}{\sin. \theta}$$

Iam ex natura ellipsis est

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2}(CE^2 - CP^2) \text{ siue}$$

$$CE^2, PM^2 + CF^2, CP^2 = CE^2, CF^2$$

vbi si valores pro PM et CP substituantur, orietur

$$\frac{e^4 \sin. 2\Phi^2}{\sin. \theta^2} + \frac{eeff \sin. (\theta - 2\Phi)^2}{\sin. \theta^2} = eeff$$

quae diuisa per ee et multiplicata per $\sin \theta^2$, abit in

$$ee \sin. 2\Phi^2 + ff \sin. (\theta - 2\Phi)^2 = ff \sin. \theta^2.$$

At est $\sin. (\theta - 2\Phi) = \sin. \theta \cos. 2\Phi - \cos. \theta \sin. 2\Phi$, ideoque

sin.

$\sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2\cos.2\Phi^2 - 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi + \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

Vnde cum sit $ee\sin.2\Phi^2 = ff(\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2)$ erit

ob $1-\cos.2\Phi^2 = \sin.2\Phi^2$:

$\sin\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2\sin.2\Phi^2 + 2\sin.\theta\cos.\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.\theta^2\sin.2\Phi^2$

At est $2\sin.\theta\cos.\theta = \sin.2\theta$ et $\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2 = \cos.2\theta$, ergo

$\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - \cos.2\theta\sin.2\Phi^2$

sicque erit

$$ee\sin.2\Phi^2 = ff\sin.2\theta\sin.2\Phi\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi^2$$

quae diuisa per $\sin.2\Phi$ dabit

$$ee\sin.2\Phi = ff\sin.2\theta\cos.2\Phi - ff\cos.2\theta\sin.2\Phi$$

ex qua tandem elicitur:

$$\frac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} = \text{tang.}\,2\Phi = \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens est $= \frac{ff\sin.2\theta}{ee+ff\cos.2\theta}$; si hic angulus bisecetur recta CA, haec iam erit positio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demisso ex E in CA perpendiculo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipsi CF erit parallela, donec ipsi CA productae occurrat in T, ex natura tangentis constat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e\sin.\Phi$ et $CR = e\cos.\Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e\sin.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}$ et $CT = \frac{e\sin.\theta}{\sin.(\theta-\Phi)}$.

Hinc itaque erit:

semiaxis $CA = e\sqrt{\frac{\sin.\theta\cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$.

Alter semiaxis ad CA erit normalis, qui si intelligatur linea CB repraesentari, cum sit

 $RE^2 =$

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2}(CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipsis erit $CB = \frac{CA.RE}{\sqrt{(CA^2-CR^2)}}$.

Iam est $CA.RE = ee \sin.\Phi \sqrt{\frac{\sin.\theta \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$

$\sqrt{(CA^2-CR^2)} = \sqrt{(\frac{ee \sin.\theta \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)} - ee \cos.\Phi^2)}$ seu

$\sqrt{(CA^2-CR^2)} = e\sqrt{\frac{\cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}(\sin.\theta - \sin.(\theta-\Phi)\cos.\Phi)$

Cum autem sit $\theta = \theta - \Phi, + \Phi$ erit

$\sin.\theta = \sin.(\theta-\Phi)\cos.\Phi + \cos.(\theta-\Phi)\sin.\Phi$; ex quo habebitur

$\sqrt{(CA^2-CR^2)} = e\sqrt{\frac{\cos.(\theta-\Phi)\sin.\Phi \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$

Ergo prodibit alter semiaxis.

$CB = e \sin.\Phi \sqrt{\frac{\sin.\theta}{\cos.(\theta-\Phi)\sin.\Phi}} = e\sqrt{\frac{\sin.\theta \sin.\Phi}{\cos.(\theta-\Phi)}}$.

Idem hic calculus locum habebit, si figura ad alteram semidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter se permutari debent; vnde denuo orietur.

$CA = f\sqrt{\frac{\sin.\theta \cos.(\theta-\Phi)}{\sin.\Phi}}$ et $CB = f\sqrt{\frac{\sin.\theta \sin.(\theta-\Phi)}{\cos.\Phi}}$

si ergo axes coniugatos quaesitos ponamus alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit

$a = e\sqrt{\frac{\sin.\theta \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}} = f\sqrt{\frac{\sin.\theta \cos.(\theta-\Phi)}{\sin.\Phi}}$

$b = e\sqrt{\frac{\sin.\theta \sin.\Phi}{\cos.(\theta-\Phi)}} = f\sqrt{\frac{\sin.\theta \sin.(\theta-\Phi)}{\cos.\Phi}}$.

Hinc erit primo $ab = ef \sin.\theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas descriptorum:

Deinde hinc etiam denuo angulum Φ determinare poterimus; erit enim

$\frac{ee \sin.\theta \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)} = \frac{ff \sin.\theta \cos.(\theta-\Phi)}{\sin.\Phi}$

seu $ee \sin.2\Phi = ff \sin.2(\theta-\Phi) = ff \sin.2\theta \cos.2\Phi - ff \cos.2\theta \sin.2\Phi$

vnde

vnde fit vt ante :

$$\frac{\sin.\,2\,\Phi}{\cos.\,2\,\Phi} = \text{tang. } 2\,\Phi = \frac{ff \sin.\,2\,\theta}{ee + ff \cos.\,2\,\theta}.$$

Ex quatuor superioribus formulis quoque obtinemus :

$$\frac{\sin.\,(\theta - \Phi)}{\cos.\,\Phi} = \frac{ee \sin.\,\theta}{aa} = \frac{bb}{ff \sin.\,\theta} = A$$

$$\frac{\cos.\,(\theta - \Phi)}{\sin.\,\Phi} = \frac{aa}{ff \sin.\,\theta} = \frac{ee \sin.\,\theta}{bb} = B$$

vnde fit

$$\sin.\,\theta - \frac{\cos.\,\theta \sin.\,\Phi}{\cos.\,\Phi} = A \text{ et } \frac{\cos.\,\theta \cos.\,\Phi}{\sin.\,\Phi} + \sin.\,\theta = B$$

ergo $\frac{\cos.\,\theta \sin.\,\Phi}{\cos.\,\Phi} = \sin.\,\theta - A$ et $\frac{\cos.\,\theta \cos.\,\Phi}{\sin.\,\theta} = B - \sin.\,\theta$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent :

$\cos.\,\theta^2 = (A+B) \sin.\,\theta - AB - \sin.\,\theta^2$ seu $1 + AB = (A+B) \sin.\,\theta$.

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$AB = \frac{ee}{ff}$ et $(A+B) \sin.\,\theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc ista nota ellipseos proprietas resultat : $aa + bb = ee + ff$.

Porro si alterum focum ponamus in U, erit vti constat

$$CU = \sqrt{(aa - bb)} = \sqrt[4]{(aa - bb)^2}$$

at $(aa - bb)^2 = (aa + bb)^2 - 4aabb$.

Cum igitur sit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef \sin.\,\theta$ erit

$$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff(1 - 2 \sin.\,\theta^2)}$$

verum est $1 - 2 \sin.\,\theta^2 = \cos.\,2\,\theta$, hincque obtinetur :

$$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 - 2eeff. \cos.\,2\theta)}$$

His inuentis ratio constructionum datarum fiet perspicua :

Pro I. *Constructione*. Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1. 2θ; et cum sit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit $CG = \frac{ff}{e}$; Porro ducta eG erit tang. $CeG = \frac{CG \sin.\,eCG}{Ce - CG \cos.\,eCG}$

At $Ce = e$; sin. $eCG =$ sin. 2θ et cos. $eCG = -$cos. 2θ, vnde fit tang. $CeG = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$ quae est expressio ante pro tang. 2ϕ inuenta. Erit ergo $CeG = 2\phi$, anguloque CeG bisecto per eH erit angulus CeH eique aequalis $ECI = \phi$. Vnde recta CI erit positio alterius axis, eique normalis CK dabit positionem alterius. Deinde recta IEK per E ipsi CF parallela ducta est tangens ellipsis in E, quare si ex E in vtrumque axem perpendicula EL, EM demittantur, semiaxis CA erit media proportionalis inter CL et CI, itemque semiaxis CB media proportionalis inter CM et CK, plane vti constructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Constructione.* Ob triangulum CED isosceles et angulum $ECD = EDC = \theta$ erit ang: $CED = 180° - 2\theta$. Deinde ob $EC = e$, $EG = EH = CF = f$, quia GI ipsi CH est parallela, erit $EI = \frac{ff}{e}$. Porro est tangens $ECI = \frac{EI \sin. CED}{CE - EI \cos. CED}$ ergo ob sin. $CED =$ sin. 2θ et cos. $CED = -$cos. 2θ habebitur tangens $ECI = \frac{ff \sin. 2\theta}{ee + ff \cos. 2\theta}$, eritque ergo $ECI = 2\phi$; vnde sumta $CK = CE = e$, bisectaque EK in M, recta CM angulum $ECK = 2\phi$ bisecabit, ita vt sit $ECM = \phi$, ideoque CMAP positio alterius axis, cuius semissis quantitas CA vt ante definitur, et determinatio alterius semiaxis CB ex ipsa constructione est manifesta.

Fig. 3. *Pro III. Constructione.* Ex ratione praecedentis constructionis intelligitur rectam CU angulum ECI bisecantem dare positionem axis transuersi. Cum igitur sit $CE = e$, $EI = \frac{ff}{e}$ et $CEI = 180° - 2\theta$ et erit $CI = \sqrt{(CE^2 + EI^2 - 2\,CE.EI \cos. CEI)} = \sqrt{(ee + \frac{f^4}{ee} + 2ff \cos. 2\theta)} = \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos. 2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum ſit CU media proportionalis inter CE et CI erit $CU = \sqrt{e.\frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos. 2\theta)}}$

ſeu $CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff \cos. 2\theta)}$.

Ex qua expreſſione manifeſtum eſt fore U alterum ellipſeos focum, vnde ſimul alter focus innoteſcit.

Hic tantum certum eſſe oportet, rectam CU eſſe poſitionem axis transuerſi non vero coniugati; ſed in hoc error facile euitatur, ſi perpendamus, axem transuerſum ſemper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae conſtituunt, cadere.

Verum vt hae conſtructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, conſtructionem, quam *Pappus Alexandrinus* ſine demonſtratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonſtrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non ſatis feliciter ſupplere conatus eſt, hic non ſolum conſtructionem *Pappi*, ſed etiam eius rationem coronidis loco ſubiungam.

Sint igitur CE et CF ſemidiametri ellipſis datae, ac per F agatur ipſi CE parallela indefinita, quae ellipſin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perſpicuum eſt, ſi puncta G et H eſſent cognita, poſitionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, vt puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaeſita G et H, atque ellipſis centrum C tranſire, et quoniam angulus GCH rectus eſt iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH exiſtere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipſis nouimus, quoniam CE et ſemidiame- Fig. 5.

ter

ter coniugata ad C F, tangensque in F ab axibus principalibus in G et H ſecatur, eſſe rectangulum F G, F H aequale quadrato ipſius C E. Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaeſitus per C et ambo deſiderata tangentis puncta G et H tranſiturus determinatur: altera vt quod eius centrum in ipſa hac recta G H ſitum eſſe debet, altera vero quod rectangulum F G, F H quadrato ipſius C E aequale eſſe debet. Tranſeat iſte circulus etiam nunc incognitus per rectae C F productae punctum K. et quia erit C F. F K = F G. F H, erit quoque C F. F K = C E², ideoque F K tertia proportionalis ad C F et C E quarum cum vtraque ſit data, innoteſcet punctum K et circulus quaeſitus tranſire debet per puncta C et K, ita vt eius centrum in rectam G H cadat. Biſecta ergo C K in L, eique in L iuncta normali L I rectam G H in I ſecante erit I centrum circuli quaeſiti, ex quo circulus radio I C vel I K deſcriptus rectam G H in punctis quaeſitis ſecabit; quae eſt *Pappi* conſtructio.

Sequens autem conſtructio ſimplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non ſolum axium principalium poſitionem ſed etiam quantitatem ſponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus eſt, iam in ſe complectitur, ita vt ne mediae quidem proportionalis ſumtione indigeamus.

Noua Conſtructio.

Problematis propoſiti.

Fig. 6. Sint C E, C F ſemidiametri coniugatae propoſitae ad angulum acutum E C F inclinatae, ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum CEDF. Tum producatur E C in e, vt sit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur $CG = CF$. Iunctis E G et e G producatur E G in H, vt sit $GH = Ge$, et ducta e H bisecetur in I; atque in recta CL capiatur $KL = KI$. Deinde ex centro C circini apertura C I describatur arcus M N rectas F D et E D secans in M et N, atque ad has rectas ex punctis istis perpendiculares constituantur MO et NO se mutuo in O secantes, per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum M N ducatur recta COA, erit haec semiaxis transuersus, in eoque punctum O alter ellipseos focus. Denique ad C A normaliter statuatur $CB = CL$, eritque C B semiaxis coniugatus.

Demonstratio.

Ponantur semidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$ angulus vero $ECF = \theta$; erit ex constructione $Ce = e$, $CG = f$, et angulus $GCe = 90° - \theta$, ideoque cos. $GCe = \sin.\theta$. Porro vocetur semiaxis transuersus $CA = a$, et semiaxis coniugatus $CB = b$; erit per supra inuenta $aa + bb = ee + ff$ et $abef \sin.\theta$. Hinc fiet:

$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef \sin.\theta$ et $aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef \sin.\theta$

ergo $a + b = \sqrt{(ee + ff + 2ef \sin.\theta)}$ et $a - b = \sqrt{(ee + ff - 2ef \sin\theta)}$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et cos. $GCe = \sin.\theta$ reperitur $EG = \sqrt{(ee + ff + 2ef \sin.\theta)}$, ex triangulo vero eCG, vbi est $Ce = e$, $CG = f$ et cos. $GCe = \sin.\theta$, fit $Ge = \sqrt{(ee + ff - 2ef \sin.\theta)}$. Hanc ob rem habebitur:

$a + b = EG$ et $a - b = eG$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

Cum iam ſit $GH = eG$, erit $2a = EH$, ac biſecta eH in I, ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipſi EH eiusque ſemiſſis, vnde $a = CI$; et quia $IK = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}Ge$, et $KL = IK$, erit $CL = CI - 2IK = CI - GH = a - Ge$, ideoque $CL = b$. Aequatur ergo CI ſemiaxi transuerſo et CL ſemiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipſis conſtat, quia ED et FD ſunt ellipſis tangentes, ſi ex altero foco O in has tangentes perpendicula demittantur ON et OM, punctorum M et N a centro C diſtantias ſemiaxi transuerſo aequari. Viciſſim ergo ſi puncta M et N ita accipiantur, vt eorum diſtantia a centro C aequalis ſit ſemiaxi transuerſo CI, quemadmodum ea quoque in conſtructione ſunt ſumta, atque ex his punctis ad tangentes perpendicula ducantur MO et NO, haec perpendicula ſe inuicem in foco O eſſe interſectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O, qui cum in axe transuerſo ſit ſitus, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non ſolum axi transverſo aequalis, ſed etiam veram eius poſitionem tenet. Cum igitur ſit CA ſemiaxis transuerſus, ſi ad eum normaliter ſtatuatur $CB = CL$, erit quoque CB ſemiaxis coniugatus.

DE

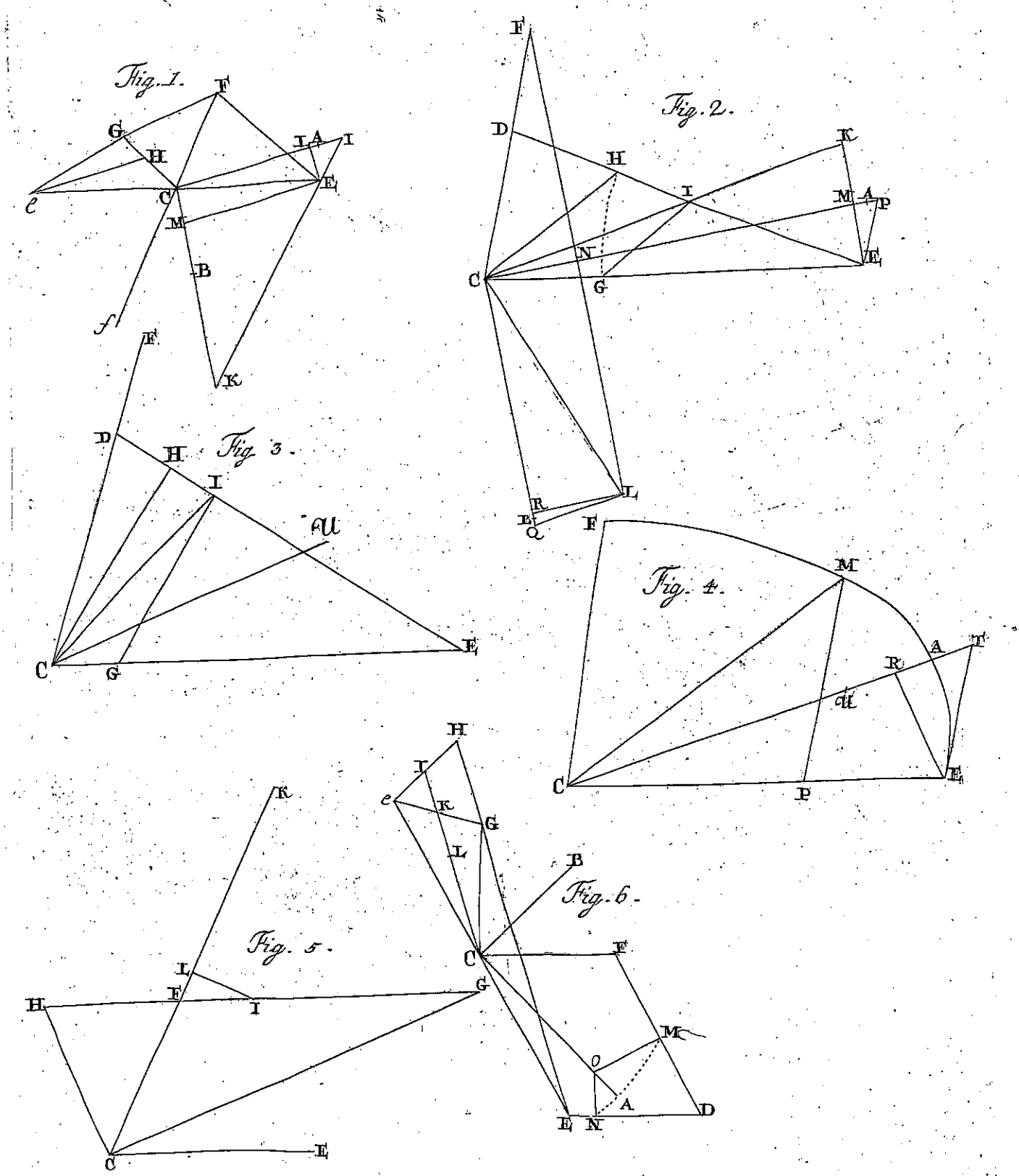
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.