



R E C H E R C H E S
S U R L E S R A C I N E S I M A G I N A I R E S
D E S E Q U A T I O N S
P A R M. E U L E R.

Toute équation algébrique étant délivrée des fractions & des signes radicaux, se réduit toujours à cette forme générale :

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \dots + N = 0$$
 où les lettres A. B. C. D. . . . N marquent des quantités constantes réelles, ou affirmatives ou negatives sans en exclure le zero. Les racines d'une telle équation sont les valeurs, qui étant mises pour x produisent une équation identique $0 = 0$. Or si $x + a$ est un diviseur ou facteur de la formule proposée, l'autre facteur étant indiqué par X, de sorte que l'équation ait cette forme $(x + a) X = 0$, il est clair que cela arrive si $x + a = 0$, ou $x = -a$. D'où l'on voit que les racines d'une équation se trouvent en cherchant les diviseurs ou facteurs de cette meme équation; & toutes les racines d'une équation se tirent de tous ses diviseurs simples de la forme $x + a$.

§. 2. Donc pour trouver toutes les racines d'une équation proposée, on n'a qu'à chercher tous les facteurs simples de la quantité :

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + N;$$
 & si nous posons ces facteurs :

$$(x + a) (x + \beta) (x + \gamma) (x + \delta) \&c.$$

il est d'abord clair que le nombre de ces facteurs doit être égal à l'exposant n ; & partant le nombre de toutes les racines qui seront :

$$x =$$



$x = -\alpha$; $x = -\beta$; $x = -\gamma$; $x = -\delta$; &c. sera aussi égal à ce même exposant n , puisqu'un tel produit $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta)$ &c. ne sauroit devenir égal à zero, à moins qu'un de ses facteurs n'évanouisse. Toute équation donc de quelque degré qu'elle soit, aura toujours autant de racines, que l'exposant de sa plus haute puissance contient d'unités.

§. 3. Or il arrive fort souvent que toutes ces racines ne sont pas des quantités réelles, & que quelques unes, ou peut-être toutes, sont des quantités imaginaires. On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zero, ni plus petite que zero, ni égale à zero; ce sera donc quelque chose d'impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a + b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'est ni positive, ni negative, ni zero. Ainsi cette équation $x^3 - 3xx + 6x - 4 = 0$ ayant ces trois racines $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{-3}$; & $x = 1 - \sqrt{-3}$, les deux dernières sont imaginaires, & il n'y aura qu'une racine réelle $x = 1$. D'où l'on voit, que si l'on ne vouloit comprendre sous le nom de racines que celles qui sont réelles, leur nombre seroit souvent beaucoup plus petit que le plus haut exposant de l'équation. Et partant quand nous disons que chaque équation a autant de racines, que l'exposant de son degré indique, cela se doit entendre de toutes ses racines tant réelles qu'imaginaires.

§. 4. Nous concevons donc, que de quelque degré que soit l'équation proposée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + N = 0$$

elle puisse toujours être représentée par une telle forme;

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) \dots (x + \nu) = 0$$

où le nombre de ces facteurs simples soit $= n$. Et puisque ces facteurs étant multipliés actuellement ensemble doivent produire l'équation proposée, il est évident que les quantités A, B, C, D, \dots, N seront tellement déterminées par les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \nu$, qu'il sera :

$$A =$$



A = à la somme de ces quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \nu$

B = à la somme de tous leurs produits de deux à deux

C = à la somme de leurs produits de trois à trois.

D = à la somme de leurs produits de quatre à quatre

⋮

& enfin

N = au produit de toutes ensemble, $\alpha \beta \gamma \delta \dots \nu$.

Donc puisque le nombre des ces égalités est = n , les valeurs des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \nu$ en seront réciproquement déterminées.

§. 5. Quoiqu'il semble que la connoissance des racines imaginaires d'une équation ne puisse avoir aucune utilité, vu qu'elles ne fournissent point de solutions de quelque problème que ce soit; neantmoins il est fort important dans toute l'analyse de se rendre familier le calcul des quantités imaginaires. Car non seulement nous en acquerons une connoissance plus parfaite de la nature des équations; mais l'Analyse des infinis en tire des secours très considérables. Car toutes les fois qu'il se présente à intégrer une fraction, il en faut résoudre le dénominateur dans tous ses facteurs simples soit réels ou imaginaires, & de là on tire enfin l'intégrale, qui quoiqu'elle renferme des logarithmes imaginaires, on a des moyens de les réduire à des arcs de cercle réels. Outre cela il arrive souvent qu'une expression, qui renferme des quantités imaginaires, soit neantmoins réelle, & dans ces cas le calcul des imaginaires est absolument nécessaire.

§. 6. Il est démontré dans l'Algebre, que lorsqu'une équation a des racines imaginaires, leur nombre est toujours pair, de sorte que toute équation ou n'aura point du tout des racines imaginaires, ou elle en aura deux, ou quatre, ou six, ou huit &c. & jamais le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation ne sauroit être impair. Mais on soutient de plus, que les racines imaginaires vont tellement de pair en pair, que tant la somme que le produit de deux devient réel. Ou ce qui revient au même, si $x + y\sqrt{-1}$ est un des facteurs imaginaires d'une équation, on soutient qu'il se trouvera toujours parmi les autres



un tel facteur $x - y\sqrt{-1}$ aussi imaginaire, qui étant multiplié par celui-là $x + y\sqrt{-1}$ donne un produit réel. Or le produit de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$ étant $= xx + yy$, & la somme $= 2x$, il est clair que l'un & l'autre sont des quantités réelles.

§. 7. Pour mieux éclaircir cela, soit $2m$ le nombre des facteurs simples imaginaires d'une équation quelconque, puisqu'on fait que ce nombre est pair; & on soutient qu'on peut toujours ranger ces facteurs tellement deux à deux, que leurs produits deviennent réels. Ainsi ces facteurs imaginaires au nombre de $2m$ se réduiront à des facteurs réels au nombre de m , & ces derniers facteurs ne seront plus simples, mais de la forme $xx + px + q$: ils seront donc du second degré. On dit donc que toute équation, ne pouvant être résolue en des facteurs simples réels, a toujours des facteurs réels du second degré. Cependant personne, à ce que je sache, n'a encore démontré assez rigoureusement la vérité de ce sentiment: je tâcherai donc d'en donner une démonstration, qui ne soit assujettie à aucune exception.

§. 8. Or d'abord il est évident, que lorsqu'une équation n'a que deux facteurs simples imaginaires, leur produit est nécessairement réel. Car le produit de ces deux facteurs multiplié par le produit de tous les autres, qu'on suppose réels, doit produire l'équation proposée, c. à d. une quantité réelle, ce qui seroit impossible, si le produit des deux facteurs imaginaires n'étoit pas réel. On voit de même, que si une équation a quatre racines imaginaires, toutes les autres étant réelles, le produit de ces quatre facteurs imaginaires sera aussi réel. Et en général quel que soit le nombre des facteurs imaginaires d'une équation, leur produit doit être nécessairement une quantité réelle; donc si le nombre des facteurs imaginaires d'une équation est $= 2m$, le produit de tous ces facteurs multipliés ensemble sera de cette forme: $x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + cx^{2m-3} + \&c.$ où tous les coefficients $a, b, c, \&c.$ sont des quantités réelles.

§. 9. Il faut donc commencer par prouver, qu'une équation du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dont



Toutes les racines sont imaginaires, est toujours résoluble en deux facteurs réels du second degré $(xx + px + r)(xx + qx + s) = 0$; car si toutes les racines sont réelles, ou deux au moins, une telle résolution n'a aucune difficulté. Mais si toutes les quatre sont imaginaires la chose est non seulement moins évidente, mais il y a même des cas, qui ne paroissent pas admettre une telle résolution. Un très savant Géometre me proposa autrefois cette équation:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

par laquelle il vouloit prouver, que la résolution en deux facteurs réels n'étoit pas toujours possible. Et en effet il paroît d'abord fort difficile de combiner de ces quatre facteurs simples imaginaires tellement deux à deux ensemble, que leurs produits deviennent réels.

§. 10. Le doute tiré de cette équation étant trop important, pour que je le puisse passer en donnant une démonstration générale de la propriété, dont il s'agit, je m'en vai développer plus soigneusement ce cas, avant que d'entreprendre cette démonstration. Et d'abord puisque les coefficients de cette équation, qui sont 1, 2, 4, 2, 1 tiennent le même ordre, en commençant par le devant ou par l'arrière, il est certain que l'équation proposée est résoluble en deux facteurs de cette forme :

$$(xx + px + 1)(xx + qx + 1)$$

dont le produit $x^4 + (p+q)x^3 + (pq+2)xx + (p+q)x + 1$ étant comparé avec la forme proposée $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ fournit ces deux égalités $p+q = 2$ & $pq+2 = 4$ ou $pq = 2$. Donc il y aura $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = 4 - 4 \cdot 2 = -4$, & partant $p-q = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$: d'où nous tirons ces valeurs:

$$p = 1 + \sqrt{-1} \quad \& \quad q = 1 - \sqrt{-1}$$

de sorte que l'équation proposée :

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$



est maintenant réduite à ces deux facteurs du second degré :

$(x^2 + (1 + \sqrt{-1})x + 1) (x^2 + (1 - \sqrt{-1})x + 1) = 0$
qui sont à la vérité imaginaires.

§. 11. Mais pour décider s'il est possible ou non, de réduire cette équation à deux facteurs réels du second degré, il faut chercher les quatre facteurs simples, pour voir si l'on en peut combiner autrement deux à deux, afin qu'on parvienne à des produits réels. Or le premier facteur double $x^2 + (1 + \sqrt{-1})x + 1$ donne ces deux facteurs simples :

$$x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{-1} - 1 - 4} = 0$$

$$x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{-1} - 1 - 4} = 0$$

& l'autre facteur double $x^2 + (1 - \sqrt{-1})x + 1$ donne ces deux facteurs simples :

$$x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{-1} - 1 - 4} = 0$$

$$x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{-1} - 1 - 4} = 0.$$

Il s'agit donc de voir, si le premier facteur simple étant multiplié par le troisième ou le quatrième produit un facteur double réel ou non? puisque nous voyons déjà, que le produit du premier par le second est imaginaire.

§. 12. Cependant il n'est pas si aisé de reconnoître si les produits, qu'on trouve par ces multiplications du premier facteur par le 3^{me} ou le 4^{me} sont réelles ou imaginaires, & la difficulté naît des termes imaginaires $\sqrt{2\sqrt{-1} - 1 - 4}$ & $\sqrt{-2\sqrt{-1} - 1 - 4}$, donc on ne peut pas comparer l'imaginaire avec celui des autres nombres $1 + \sqrt{-1}$ & $1 - \sqrt{-1}$. Or je remarque que la formule $\sqrt{2\sqrt{-1} - 1 - 4}$ peut se réduire à une telle forme $u + v\sqrt{-1}$, & alors l'autre formule $\sqrt{-2\sqrt{-1} - 1 - 4}$ deviendra égale à $u - v\sqrt{-1}$. Car faisant ces égalités :

$$\sqrt{2\sqrt{-1} - 1 - 4} = u + v\sqrt{-1} \quad \& \quad \sqrt{-2\sqrt{-1} - 1 - 4} = u - v\sqrt{-1}$$



& prenant les quarrés, on obtiendra celles-cy :

$$2\sqrt{-1-4} = uu - vv + 2uv\sqrt{-1} \quad \& \quad -2\sqrt{-1-4} = uu - vv - 2uv\sqrt{-1}$$

d'où l'on tirera : $-4 = uu - vv$ & $2\sqrt{-1} = 2uv\sqrt{-1}$, ou bien $vv - uu = 4$ & $uv = 1$. Et ensuite on formera :

$$(vv + uu)^2 = (vv - uu)^2 + 4uuvv = 16 + 4 = 20; \text{ desorte que } vv + uu = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

De là on trouvera enfin $vv = \sqrt{5} + 2$, $uu = \sqrt{5} - 2$ & par conséquent

$$v = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \quad \& \quad u = \sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

§. 13. Ces deux valeurs de v & u étant réelles, substituons les dans les expressions des quatre facteurs simples trouvés cy-dessus; & ces facteurs deviendront :

$$\text{I. } x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}(1 + u) + \frac{1}{2}(1 + v)\sqrt{-1}$$

$$\text{II. } x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}(1 - u) + \frac{1}{2}(1 - v)\sqrt{-1}$$

$$\text{III. } x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(u - v\sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}(1 + u) - \frac{1}{2}(1 + v)\sqrt{-1}$$

$$\text{IV. } x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}(u - v\sqrt{-1}) = x + \frac{1}{2}(1 - u) - \frac{1}{2}(1 - v)\sqrt{-1}$$

Maintenant il est clair que le produit du premier par le troisieme devient effectivement réel, de même que celui du second par le quatrieme. Car on aura

$$\text{le produit du I par le III} = (x + \frac{1}{2}(1 + u))^2 + \frac{1}{4}(1 + v)^2$$

$$\text{le produit du II par le IV} = (x + \frac{1}{2}(1 - u))^2 + \frac{1}{4}(1 - v)^2$$

Voilà donc l'équation proposée :

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

réduite à ces deux facteurs réels du second degré

$$xx + (1 + u)x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{4}(vv + uu) = 0$$

$$xx + (1 - u)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{4}(vv + uu) = 0$$

où est $v = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$; $u = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ & $vv + uu = 2\sqrt{5}$.

§. 14.



§. 14. Cet exemple nous conduit à un problème plus général, qui ne manquera pas de nous éclaircir déjà considérablement sur le sujet en question. Ce problème regarde cette équation du quatrième degré, plus générale :

$$x^4 + ax^3 + (b+2)xx + ax + 1 = 0$$

qu'il faut résoudre en deux facteurs doubles ou du second degré, qui soient réels.

Posons d'abord ces deux facteurs de la forme suivante

$$(xx + px + 1)(xx + qx + 1) = 0$$

& on voit d'abord qu'il faut qu'il soit :

$$p + q = a \quad \& \quad pq = b \quad \text{d'où l'on tirera}$$

$$p = \frac{a + \sqrt{aa - 4b}}{2} \quad \& \quad q = \frac{a - \sqrt{aa - 4b}}{2}$$

Donc toutes les fois que $aa > 4b$ le problème est résolu, vu que les deux facteurs supposés deviennent réels.

§. 15. Mais lorsque $aa < 4b$, ces deux facteurs seront imaginaires, & ne satisferont pas à la question. Dans ces cas il faut considérer les facteurs simples qui seront :

$$\text{I. } x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{pp - 4} = 0$$

$$\text{II. } x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{pp - 4} = 0$$

$$\text{III. } x + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{qq - 4} = 0$$

$$\text{IV. } x + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{qq - 4} = 0$$

Posons $4b = aa + cc$, puisque $aa < 4b$ & on aura

$$p = \frac{a + c\sqrt{-1}}{2} \quad \& \quad q = \frac{a - c\sqrt{-1}}{2} \quad \text{donc:}$$

$$\sqrt{pp - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{aa - cc - 16 + 2ac\sqrt{-1}} \quad \&$$

$$\sqrt{qq - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{aa - cc - 16 - 2ac\sqrt{-1}}$$



Ces deux formules étant imaginaires, soit :

$$V(aa - cc - 16 + 2acV - 1) = u + vV - 1 \quad \&$$

$$V(aa - cc - 16 - 2acV - 1) = u - vV - 1$$

& de là nous tirerons :

$$uu - vv = aa - cc - 16 \quad \& \quad uv = ac$$

§. 16. Ces égalités nous fournissant celle-ci ;

$$(uu + vv)^2 = (aa - cc - 16)^2 + 4aac = (aa + cc)^2 - 32(aa - cc) + 256$$

$$\text{donc } vv + uu = V((aa + cc)^2 - 32(aa - cc) + 256)$$

or cette quantité irrationnelle renfermant après le signe radical la somme de deux quarrés, sera toujours réelle, & meme sa valeur sera plus grande que $aa - cc - 16 = uu - vv$ ou que $vv - uu = 16 + cc - aa$. Nous aurons donc les valeurs suivantes réelles pour v & u , favoir :

$$v = V \frac{V((aa + cc)^2 - 32(aa - cc) + 256) + 16 + cc - aa}{2}$$

$$u = V \frac{V((aa + cc)^2 - 32(aa - cc) + 256) - 16 - cc + aa}{2}$$

& remettant pour cc la valeur $4b - aa$, on aura

$$v = V(V(4bb - 16(aa - 2b) + 64) + 8 + 2b - aa)$$

$$u = V(V(4bb - 16(aa - 2b) + 64) - 8 - 2b + aa)$$

ou bien :

$$v = V(2V((b + 4)^2 - 4aa) + 8 + 2b - aa)$$

$$u = V(2V((b + 4)^2 - 4aa) - 8 - 2b + aa)$$

§. 17. Ayant trouvé ces valeurs réelles pour v & u dans le cas où $4b > aa$ ou $4b = aa + cc$, nos quatre facteurs simples imaginaires feront.



$$\begin{aligned} \text{I. } & x + \frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1}) + \frac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1} = x + \frac{1}{4}(a+u) + \frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1} \\ \text{II. } & x + \frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1}) - \frac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1} = x + \frac{1}{4}(a-u) + \frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1} \\ \text{III. } & x + \frac{1}{4}(a+c\sqrt{-1}) + \frac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1} = x + \frac{1}{4}(a+u) - \frac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1} \\ \text{IV. } & x + \frac{1}{4}(a-c\sqrt{-1}) - \frac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1} = x + \frac{1}{4}(a-u) - \frac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

d'où il est clair que les produits du I. facteur par le III & du II par le IV sont réels, devenant :

$$\begin{aligned} & xx + \frac{1}{2}(a+u)x + \frac{1}{16}(aa+cc) + \frac{1}{16}(uu+vv) + \frac{1}{8}(au+cv) \\ & xx + \frac{1}{2}(a-u)x + \frac{1}{16}(aa+cc) + \frac{1}{16}(uu+vv) - \frac{1}{8}(au+cv) \end{aligned}$$

où il faut remarquer que $aa+cc=4b$; $vv+uu=4\sqrt{(b+4)^2-4aa}$

§. 18. Pour exprimer plus commodément la valeur de $au+cv$ cherchons en celle du carré, $aa+uu+cc+vv+2acuv$.

$$\begin{aligned} aa+uu &= 2aa\sqrt{(b+4)^2-4aa} - 8aa - 2aab + a^4 \\ cc+vv &= \left. \begin{array}{l} + 8b \\ - 2aa \end{array} \right\} \sqrt{(b+4)^2-4aa} + 32b + 8bb - 4aab \\ & \quad - 8aa - 2aab + a^4 \end{aligned}$$

$2acuv = 2aac = 8aab - 2a^4$; donc nous aurons

$$(au+cv)^2 = 8b\sqrt{(b+4)^2-4aa} + 32b - 16aa + 8bb$$

& la racine carrée se trouvera:

$$au+cv = 2\sqrt{(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{(b+4)^2-4aa})}$$

& partant les deux facteurs réels cherchés seront dans le cas $4b > aa$:

$$\begin{aligned} & xx + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x\sqrt{(2\sqrt{(b+4)^2-4aa} - 8 - 2b + aa)} \\ & \quad + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}\sqrt{(b+4)^2-4aa} + \frac{1}{4}\sqrt{(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{(b+4)^2-4aa})} \\ & xx + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x\sqrt{(2\sqrt{(b+4)^2-4aa} - 8 - 2b + aa)} \\ & \quad + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}\sqrt{(b+4)^2-4aa} - \frac{1}{4}\sqrt{(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{(b+4)^2-4aa})} \end{aligned}$$

§. 19. Par ce cas particulier on comprendra plus aisément ce que je veux prouver en général, c'est que toute équation, de quelque degré



degré qu'elle soit, est toujours résoluble en des facteurs réels ou simples ou doubles. Ou puisque deux facteurs simples joints ensemble produisent un facteur double, il faut démontrer que toute équation d'un degré pair comme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \&c. \dots + N = 0$$

est résoluble en m facteurs réels doubles de la forme $xx + px + r$, & qu'une équation d'un degré impair comme

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \dots + N = 0$$

a premièrement un facteur simple réel, & ensuite m facteurs doubles aussi tous réels. Pour cet effet je développerai les propositions suivantes, qui conduiront à la démonstration de ce que je viens d'avancer.

Theoreme. I.

§. 20. *Toute équation d'un degré impair dont la forme générale est :*

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \dots + N = 0$$

a toujours une racine réelle au moins, & si elle en a plusieurs, leur nombre sera impair.

DEMONSTRATION.

Qu'on pose $x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \dots + N = y$ & qu'on considère la ligne courbe exprimée par cette équation: & il est évident qu'à chaque abscisse x ne répond qu'une seule appliquée y qui sera toujours réelle; & que là où l'appliquée y évanouit, la valeur de l'abscisse x sera une racine de l'équation proposée. Donc cette équation aura autant de racines réelles qu'il y a d'endroits, où l'appliquée y évanouit, ce qui arrive là, où la courbe traverse l'axe des abscisses; de sorte que le nombre des racines réelles sera égal au nombre des intersections de la courbe avec l'axe, sur lequel on prend les abscisses. Pour juger donc du nombre de ces intersections, posons premièrement l'abscisse x positive & infiniment grande ou $x = \infty$, & il est



est clair, qu'il deviendra alors $y = \infty^{2m+1} = \infty$, d'où il s'ensuit que la branche de la courbe, qui répond aux abscisses positives infinies, se trouve au dessus de l'axe, puisque ses appliquées y sont positives. Or posant les abscisses negatives & aussi infinies ou $x = -\infty$, il fera $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$; donc les appliquées seront ici negatives, & la branche de la courbe se trouvera au dessous de l'axe. Cette branche étant continue avec l'autre située au dessus de l'axe, il faut absolument que la courbe traverse quelque part l'axe, & si elle le traverse en plusieurs points, le nombre de ces points doit être impair. D'où il s'ensuit que l'équation proposée aura nécessairement une racine réelle au moins, & si elle en a plusieurs, que leur nombre sera toujours impair, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 21. Donc puisque le nombre de toutes les racines de l'équation proposée est $= 2m+1$ ou impair, & que le nombre des racines réelles est aussi impair, il s'ensuit que le nombre des racines imaginaires, s'il y en a, sera toujours pair.

Theoreme. II.

§. 22. Toute équation d'un degré pair, dont la forme générale est :

$$x^{2m} + A x^{2m-1} + B x^{2m-2} + \dots + N = 0$$

ou n'aura aucune racine réelle, ou si elle a des racines réelles, leur nombre sera toujours pair.

DEMONSTRATION.

Considérons encore la courbe exprimée par cette équation

$$x^{2m} + A x^{2m-1} + B x^{2m-2} + \dots + N = y$$



qui ne consistera que d'un seul trait continu, puisque à chaque abscisse x il répond toujours une seule appliquée. Posons $x = +\infty$ & il sera aussi $y = +\infty$; donc la branche de la courbe, qui répond aux abscisses positives infinies, sera située au dessus de l'axe. Or posant $x = -\infty$, on aura pareillement $y = (-\infty)^{2^m} = +\infty$, de sorte que la branche de la courbe, qui répond aux abscisses negatives infinies, se trouvera aussi au dessus de l'axe. Donc il sera possible que la courbe ne traverse nulle part l'axe des abscisses; & si elle passe quelque part par l'axe, pour descendre dans la région au dessous, il faut qu'elle y repasse pour retourner dans celle de dessus. Par conséquent si la courbe traverse l'axe, il faut que le nombre de toutes les interseptions soit pair. Donc puisque chaque interseption donne une racine réelle de l'équation proposée, il s'ensuit ou qu'elle n'aura point du tout de racines réelles, ou si elle en a, que leur nombre sera toujours pair. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 23. Puisque le nombre de toutes les racines, tant réelles qu'imaginaires, de l'équation proposée est $= 2^m$, & partant pair, & que le nombre des racines réelles, si elle en a, est aussi pair, il s'ensuit que le nombre des racines imaginaires, si elle en a, est aussi pair.

SCHOLIE.

§. 24. Ces deux Theoremes avec leurs démonstrations sont déjà si connus, que j'aurois pu m'y rapporter sans les détailler. Mais comme ils renferment le fondement de toute la Theorie, dont il s'agit ici: que le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque est toujours pair: j'ai cru en devoir tirer le commencement; & cela d'autant plus que le theoreme suivant, qui n'est pas si généralement connu, demande une démonstration semblable.

Theoreme III.

§. 25. Toute équation d'un degré pair quelconque, où le dernier terme, ou l'absolu, a une valeur negative, comme

x^{2^m}



$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots - OO = 0$$

a toujours deux racines réelles au moins, l'une positive & l'autre négative.

DEMONSTRATION.

Posant $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots - OO = y$ pour considérer la courbe exprimée par cette équation, nous venons de voir, que cette courbe s'étend des deux cotés à l'infini au dessus de l'axe. Or posant $x = 0$, nous aurons $y = -OO$, & partant le point de la courbe qui répond à $x = 0$, sera au dessous de l'axe: il faut donc que la courbe passe de ce point de l'un & l'autre coté par l'axe pour monter au dessus. Donc puisque chaque intersection donne une racine réelle de l'équation proposée, & que de ces deux intersections l'une doit répondre à une abscisse x affirmative, l'autre à une négative, il est certain que l'équation proposée aura au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 26. Cette démonstration nous fait aussi comprendre, que quand une équation semblable à la proposée aura plusieurs racines réelles positives, leur nombre sera impair, de même le nombre de toutes les racines réelles négatives sera aussi impair.

Theoreme IV.

§. 27. Toute équation du quatrième degré, comme

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré.

DEMONSTRATION.

On fait que posant $x = y - \frac{1}{4}A$, cette équation se change dans une autre du même degré, où le second terme manque; & comme cette transformation se peut toujours faire, supposons que dans l'équation

G g 2

propo-



proposée le second terme manque déjà, & que nous ayons cette équation

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

à résoudre en deux facteurs réels du second degré; & il est d'abord clair, que ces deux facteurs seront de cette forme

$$(xx + ux + a)(xx - ux + \beta) = 0$$

dont comparant le produit avec l'équation proposée, nous aurons :

$$B = a + \beta - uu; \quad C = (\beta - a)u; \quad D = a\beta$$

d'où nous tirerons :

$$a + \beta = B + uu; \quad \beta - a = \frac{C}{u}$$

& partant $2\beta = uu + B + \frac{C}{u}$, & $2a = uu + B - \frac{C}{u}$

ayant donc $4a\beta = 4D$, nous obtiendrons cette équation

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D \quad \text{ou bien}$$

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0$$

d'où il faut chercher la valeur de u . Or puisque le terme absolu $-CC$ est essentiellement négatif, nous venons de démontrer, que cette équation a au moins deux racines réelles; prenant donc l'une ou l'autre pour u , les valeurs a & β seront également réelles, & par conséquent les deux facteurs supposés du second degré $xx + ux + a$ & $xx - ux + \beta$ seront réels. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 28. Toute expression donc du quatrième degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

quoique tous ses quatre facteurs simples soient imaginaires, se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré: ou bien
chacun



chacun des quatre facteurs simples a parmi les autres son compagnon, par lequel étant multiplié il produit un produit réel.

COROLL. II.

§. 29. Et, si une expression d'un degré quelconque n'a que quatre facteurs simples imaginaires, puisque leur produit est réel, & compris dans cette forme $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, il est aussi certain, que ce produit est résoluble en deux facteurs réels du second degré, dont chacun renferme deux facteurs simples imaginaires.

COROLL. III.

§. 30. De là il est aussi évident, qu'une équation quelconque du cinquième degré est toujours résoluble en trois facteurs réels, dont un est simple & deux doubles ou du second degré. Car cette équation ayant une racine réelle, aura un facteur simple réel, & l'autre facteur étant du quatrième degré, se décompose en deux facteurs doubles réels.

COROLL. IV.

§. 31. La résolution des équations en facteurs réels, ou simples ou doubles, est donc prouvée pour les équations du cinquième degré & pour tous les degrés inférieurs. Mais ce theoreme n'est pas suffisant à prouver cette résolution pour aucun degré supérieur, à moins que le nombre des racines imaginaires ne soit plus petit que 6. Car alors ce nombre sera ou 4, ou 2, ou 0, & dans tous ces cas la possibilité de cette résolution est évidente.

SCHOLIE I.

§. 32. J'ai déjà prouvé cy dessus que cette équation du quatrième degré, $x^4 + ax^3 + (b + 2)x^2 + ax + 1 = 0$, qui n'est qu'un cas particulier de la générale de ce degré, que je viens de considérer ici, est toujours résoluble en deux facteurs réels du second degré. Or cette résolution, qui a été assez embarrassante dans le cas $4b > aa$, se déduit immédiatement de la methode employée dans ce theoreme, sans avoir égard à la forme des racines imaginaires. Cet usage me paroît assez important, pour que je fasse l'application de la



résolution générale à ce cas. Or pour éviter les fractions' posons $a = 4c$ & $b > 4cc$, de sorte que l'équation à résoudre soit :

$$x^4 + 4cx^3 + (b+2)xx + 4cx + 1 = 0.$$

Maintenant pour ôter le second terme soit $x = y - c$ & notre équation prendra cette forme :

$$y^4 + (2 + b - 6cc)y^2 + (8c^3 - 2bc)y + 1 - 2cc + bcc - 3c^4 = 0$$

dont supposant les facteurs réels du second degré

$$(yy + uy + \alpha) (yy - uy + \beta) = 0$$

à cause de

$$B = 2 + b - 6cc; C = 8c^3 - 2bc; \& D = 1 - 2cc + bcc - 3c^4$$

pour trouver u nous aurons cette équation à résoudre :

$$u^6 + (4 + 2b - 12cc)u^4 + (bb + 4b - 16bcc - 16cc + 48c^4)u^2 - 4cc(4cc - b)^2 = 0$$

qui étant divisée par $uu + b - 4cc$ donne

$$u^4 + (4 + b - 8cc)u^2 + 16c^4 - 4bcc = 0$$

Or le premier facteur $uu + b - 4cc$ étant posé $= 0$, ne donne que des valeurs imaginaires pour u , à cause de $b > 4cc$: donc il faut chercher quelque valeur réelle de l'autre équation, d'où l'on tire

$$uu = -2 - \frac{1}{2}b + 4cc \pm \sqrt{(2 + \frac{1}{2}b)^2 - 16cc}$$

& la valeur réelle de u sera :

$$u = \sqrt{\sqrt{(2 + \frac{1}{2}b)^2 - 16cc} - 2 - \frac{1}{2}b + 4cc}$$

ou bien remettant aa pour $16cc$

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{(b+4)^2 - 4aa} - 8 - 2b + aa}$$

d'où l'on trouve les mêmes facteurs, qui ont été assignés cy-dessus.

SCHOLIE II.

§. 33. La force de la démonstration de ce Theoreme revient à ce que l'inconnue u se détermine par une équation du 6^me degré, & que le dernier terme de cette équation est essentiellement négatif.

L'une



L'une & l'autre de ces deux circonstances se peut découvrir par le seul raisonnement, sans qu'on ait besoin de chercher l'équation même, qui renferme l'inconnue u . Donc puisque dans la suite, où je passerai à des équations de plus hauts degrés, il seroit trop difficile & même impossible de trouver l'équation, par laquelle l'inconnue u est déterminée; il sera important de découvrir les deux circonstances mentionnées par le seul raisonnement, pour l'équation proposée du quatrième degré, afin de frayer le chemin pour mettre en usage ce même raisonnement, lorsque l'équation proposée sera d'un plus haut degré.

Soit donc l'équation proposée dégagée déjà du second terme

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

& posant les quatre racines de cette équation

$$x = a; \quad x = b; \quad x = c; \quad x = d$$

il est d'abord clair que la somme de ces quatre racines

$$a + b + c + d \text{ sera égale à zero.}$$

Ensuite posant en général un des facteurs doubles de cette équation $xx - ux + \beta$ ou $xx - ux + \beta = 0$, il est certain que u sera la somme de deux racines quelconques des quatre supposées a, b, c, d . Donc cette lettre u regardée comme notre inconnue peut avoir autant de valeurs différentes, qu'il y a de diverses combinaisons de deux lettres prises de ces quatre a, b, c, d . Or ce nombre de combinaisons

étant comme on fait $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, la lettre u est susceptible de 6 va-

leurs différentes, & non de plusieurs. Donc la lettre u sera déterminée par une équation du 6^me degré, qui aura les six racines suivantes:

$$\text{I. } u = a + b; \quad \text{II. } u = a + c; \quad \text{III. } u = a + d$$

$$\text{IV. } u = c + d; \quad \text{V. } u = b + d; \quad \text{VI. } u = b + c$$

Donc puisque $a + b + c + d = 0$, si nous posons les trois premières de ces six racines:

$$\text{I. } u = p; \quad \text{II. } u = q; \quad \text{III. } u = r$$

les



les trois dernières seront :

$$\text{IV. } u = -p; \quad \text{V. } u = -q; \quad \text{VI. } u = -r$$

de sorte que le négatif de chaque valeur de u fera aussi une valeur de u .

Sachant maintenant ces six racines, l'équation qui les fournira toutes sera :

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r) = 0$$

ou combinant par toutes les deux ensemble, dont l'une est la négative de l'autre, nous aurons :

$$(uu - pp)(uu - qq)(uu - rr) = 0.$$

ce qui donnera une équation du sixième degré, où toutes les puissances impaires de u manquent, tout comme nous l'avons trouvée dans la démonstration du Theoreme.

Mais je remarque de plus, que le dernier terme constant de cette équation sera $= -pp - qq - rr = -ppqqrr$, lequel étant donc un carré avec le signe $-$, sera essentiellement négatif. D'où il s'ensuit que cette équation aura nécessairement au moins deux racines réelles, dont l'une ou l'autre prise pour u donnera un facteur réel double de l'équation proposée. Voilà donc une autre démonstration du Theoreme proposé, à laquelle seront semblables celles des theoremes suivans.

Or on m'objectera sans doute, que j'ai supposé ici, que la quantité pqr étoit une quantité réelle, & que son carré $ppqqrr$ étoit affirmatif; ce qui étoit encore douteux, vu que les racines a, b, c, d , étant imaginaires, il pourroit bien arriver, que le carré de la quantité pqr , qui en est composée, fût négatif. Or je reponds à cela, que ce cas ne sauroit jamais avoir lieu; car quelque imaginaires que soient les racines a, b, c, d , on fait pourtant qu'il doit y avoir

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= B \\ abc + abd + acd + bcd &= C \\ abcd &= D \end{aligned}$$



ces quantités B. C. D. étant réelles. Mais puisque $p = a + b$;
 $q = a + c$; $r = a + d$, leur produit

$$pqr = (a + b)(a + c)(a + d)$$

est déterminable, comme on fait, par les quantités B, C, D, & sera par conséquent réel: tout comme nous avons vu, qu'il est effectivement $pqr = C$, & $ppqqr = CC$. On reconnoitra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, & qu'on ne sauroit me faire des objections de ce côté contre les démonstrations suivantes.

Theoreme V.

§. 34. *Toute équation du 8^{me} degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du quatrième degré.*

DEMONSTATION.

Ayant fait évanouir le second terme, l'équation proposée du 8^{me} degré aura cette forme:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0$$

dont les deux facteurs du quatrième degré en général seront

$$x^4 - ux^3 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \zeta = 0$$

Si nous égalons le produit de ces deux facteurs à l'équation proposée, nous obtiendrons 7 égalités, c'est à dire précisément autant qu'il y a de coëfficiens inconnus $u, a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$. De ces égalités on éliminera successivement les lettres $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, ce qui se pourra faire, comme on fait, sans qu'on ait besoin d'aucune extraction de racine; de sorte que les valeurs de ces lettres seront toutes exprimées réellement par les quantités connus B, C, D, E, F, G, H, & l'inconnu u : & enfin on parviendra à une équation, qui ne renfermera plus que l'inconnu u avec les quantités connus, de laquelle il faut chercher la valeur de u ; & cette valeur étant trouvée réelle, les valeurs des lettres éliminées



$\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ seront aussi réelles, & partant les deux facteurs supposés du quatrième degré également réels.

Il s'agit donc de trouver l'équation, qui nous détermine la valeur de u . Or en général u exprimera la somme de quatre racines quelconques de l'équation proposée, dont le nombre de toutes les racines étant $= 8$, la lettre u aura autant de valeurs différentes, qu'il y a de diverses combinaisons de 4 racines prises des huit de l'équation; ainsi le nombre de toutes les valeurs de u sera $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$.

& partant l'inconnue u sera déterminée par une équation du 70^{me} degré. De plus si nous supposons que p soit une des valeurs de u , p sera la somme de quelques quatre racines de l'équation proposée, & la somme des autres quatre sera $= -p$, puisque la somme de toutes les huit racines est $= 0$. Ainsi si $u - p$ est un facteur de l'équation du 70^{me} degré, $u + p$ en sera un aussi, & partant joignant ces deux facteurs ensemble, $uu - pp$ sera un facteur double ou du second degré de ladite équation du 70^{me} degré. Par conséquent cette équation aura 35 facteurs de la forme $uu - pp$, ou elle sera un tel produit

$$(uu - pp) (uu - qq) (uu - rr) (uu - ss) \&c.$$

le nombre de ces facteurs étant $= 35$. Donc le dernier terme ou le terme absolu de cette équation sera le produit de 35 quarrés négatifs, & par conséquent aussi un quarré négatif comme $-ppqqrrss \&c.$ à cause du nombre 35 impair. Or la racine de ce quarré, $pqrss \&c.$ est une quantité réelle déterminable par les coefficients B, C, D, E, &c de l'équation proposée, & partant son quarré $ppqqrrss \&c.$ une quantité positive. Donc le coefficient inconnu u étant déterminé par une équation du 70^{me} degré, dont le dernier terme est essentiellement négatif, cette équation aura au moins deux valeurs réelles, dont l'une étant posée pour u fournira un facteur réel du 4^{me} degré de l'équation proposée, qui sera par conséquent résoluble en deux facteurs réels du 4^{me} degré. C. Q. F. D.

COROLL.



COROLL. I.

§. 35. Or chaque facteur du 4^{me} degré étant résoluble en deux facteurs réels du second degré, il s'ensuit que toute équation du huitième degré est toujours résoluble en quatre facteurs réels du second degré de la forme $x^2 + px + q$.

COROLL. II.

§. 36. On voit aussi que toute équation du neuvième degré est résoluble en un facteur simple réel & quatre facteurs doubles ou du second degré également réels.

COROLL. III.

§. 37. Cette proposition nous fait aussi voir, que la même résolution en facteurs réels ou simples ou doubles, doit avoir lieu dans toutes les équations du 6^{me} ou 7^{me} degré. Car on n'a qu'à multiplier une telle équation, ou par x^2 , ou par x , pour la réduire au huitième degré.

SCHOLIE. I.

§. 38. Ayant multiplié une équation du sixième degré par x^2 , pour avoir une du 8^{me} degré, les deux facteurs du 4^{me} degré de celle-cy renfermeront ce multiplicateur x^2 , qu'il en faut par conséquent retrancher, pour avoir les facteurs de l'équation proposée du 6^{me} degré. Or il arrivera, ou que l'un des deux facteurs du 4^{me} degré contiendra x^2 , ou que chacun en contienne x : dans le premier cas on aura après la division par x^2 un facteur réel du second degré & un du 4^{me}; qui étant séparé en deux du second, on aura les trois facteurs doubles de l'équation proposée. Or dans l'autre cas divisant chaque facteur par x , on obtiendra deux facteurs réels du 3^{me} degré, dont chacun renferme un facteur simple réel: de sorte que dans l'un & l'autre cas l'équation du 6^{me} degré se résout en facteurs réels, ou simples, ou doubles. On verra de même, que les équations du 7^{me} degré sont également résolubles en tels facteurs, puisqu'on fait que ces équations ont toujours un facteur simple réel, par lequel étant divisées elles seront réduites à des équations du 6^{me} degré.



SCHOLIE. 2.

§. 39. S'il paroît encore douteux, si après avoir trouvé une valeur réelle de u , les autres coëfficiens $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. seront aussi déterminés par des expressions réelles ; vu qu'il pourroit arriver que quelques uns renfermeroient des quantités irrationnelles, qui pourroient devenir imaginaires. Mais pour lever ce doute, on n'a qu'à regarder u comme une quantité déjà connue, desorte que le nombre des égalités, auxquelles il faut satisfaire, surpasse d'une unité le nombre des inconnuës $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. qui sont à déterminer. Ainsi on éliminera l'une après l'autre de ces quantités, tant que cela se pourra faire sans extraire des racines ; cela étant fait, il restera un certain nombre d'égalités, & le nombre des inconnuës sera d'une unité moindre. Supposons qu'il reste encore à déterminer quelques inconnuës, dont chacune monte dans les équations a plusieurs dimensions. Dans ce cas on peut toujours combiner deux égalités tellement ensemble, qu'il en résulte une, où l'inconnuë à déterminer n'aura pas plus d'une dimension, & de là on tirera sa valeur par une expression rationnelle. Suivant cette méthode on parviendra enfin à deux égalités, qui contiennent la dernière quantité inconnuë, & à quelque dignité qu'elle y monte, on a dans l'algèbre des moyens d'en former par la voie de combinaison d'autres équations, où les puissances de l'inconnuë seront successivement abaissées, & enfin on parviendra à une équation, dans laquelle ne se trouvera que la première puissance de l'inconnuë, qui en sera par conséquent déterminée par une expression rationnelle ; laquelle étant substituée dans les valeurs des autres coëfficiens déjà trouvées, fournira aussi pour ceux-cy des expressions rationnelles. De sorte que lorsqu'on aura trouvé pour u une valeur réelle, les valeurs de tous les autres coëfficiens le deviendront aussi nécessairement.

Theoreme VI.

§. 40. *Toute équation du 16^{me} degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du 8^{me} degré.*

DEMON.



DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouir le second terme de l'équation, elle aura cette forme $x^{16} + Bx^{14} + Cx^{13} + Dx^{12} + \&c. \dots = 0$.

& le nombre des coefficients B, C, D, &c. sera = 15. Supposant donc les deux facteurs du 8^{me} degré.

$$x^8 - ux^7 + ax^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$$

$$x^8 + ux^7 + \theta x^6 + \iota x^5 + \kappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi = 0$$

si l'on égale le produit de ces deux facteurs à l'équation proposée, on obtiendra 15 égalités, desquelles il faut chercher les valeurs des coefficients $u, a, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ dont le nombre est aussi = 15, de sorte que c'est un problème déterminé. Donc si nous pour le commencement regardons le coefficient u comme connu, nous aurons une égalité de plus, que des inconnues $a, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ & partant on en pourra tirer leurs valeurs déterminées par u & B, C, D, E, &c. sans avoir besoin d'aucune extraction de racine: ces valeurs seront donc rationnelles & par conséquent aussi réelles pourvu qu'on ait une valeur réelle pour u . Tout revient donc à démontrer, qu'il est toujours possible de trouver une valeur réelle pour le coefficient u . Or ayant éliminé successivement toutes les lettres $a, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ on parviendra enfin à une équation composée des coefficients connus B, C, D, E, &c. & de l'inconnu u , qui y montera à un certain degré de dimensions, dont l'exposant se conclura par ce raisonnement. La quantité u marquant en général la somme de 8 racines quelconques prises des 16 racines de l'équation proposée, il est clair par les règles des combinaisons, que la quantité u est susceptible d'autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités dans cette formule:

$$\frac{16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8} = 12870$$

Donc l'équation, qui déterminera les valeurs de l'inconnu u sera nécessairement du 12870^{me} degré. Or puisque la somme de toutes les 16



racines de l'équation proposée est $\equiv 0$, si la somme de 8 quelconques, c. à d. une valeur de u est $\equiv p$, la somme des 8 autres sera $\equiv -p$, & partant $-p$ est aussi une valeur de u . Ou bien si $u-p$ est un facteur de l'équation, qui détermine u , $u+p$ en fera aussi un facteur, donc leur produit $uu-pp$ renfermant les deux racines p & $-p$ en fera aussi un facteur. Par conséquent cette équation sera composée de $\frac{1}{2} \cdot 12870 \equiv 6435$ facteurs de la forme $uu-pp$, ou elle sera le produit de tels facteurs :

$$(uu-pp) (uu-qq) (uu-rr) (uu-ss) \&c. \equiv 0$$

le nombre de ces facteurs étant $\equiv 6435$. Or ce nombre étant impair le dernier terme ou l'absolu de cette équation sera $\equiv -ppqqrrss \&c.$ Posant donc $ppqrss \&c. \equiv P$, il est certain, que P est déterminable par les coefficients $B, C, D, E, \&c.$ en sorte qu'il en est une fonction rationnelle, & partant réelle. Donc le dernier terme de notre équation, qui doit servir à déterminer u , sera $\equiv -PP$, c. à d. il sera essentiellement négatif. De là il s'ensuit que cette équation aura nécessairement au moins deux racines réelles, l'une affirmative & l'autre négative, qui par conséquent étant prises pour $+u$ & $-u$ fourniront deux facteurs réels du 8^{me} degré de l'équation proposée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 41. Donc puisque chacun de ces deux facteurs du 8^{me} degré est résoluble en 4 facteurs réels du 2 degré, il est clair que toute équation du 16 degré est résoluble en 8 facteurs doubles réels : & une équation du 17^{me} degré ayant certainement un facteur simple réel, elle aura outre cela encore 8 facteurs doubles réels.

COROLL. II.

§. 42. La même résolubilité en facteurs réels, ou simples, ou doubles, aura aussi lieu en toutes les équations d'un degré inférieures que le 16^{me}. Car multipliant une telle équation par x , ou x^2 , ou x^3 &c. pour l'élever au 16 degré, on en cherchera les 8 facteurs doubles réels, desquels retranchant les facteurs x , qui y ont été introduits par



la multiplication, on aura les facteurs réels de la proposée, qui seront ou simples ou doubles.

COROLL. III.

§. 43. Il est donc démontré, que toutes les équations, qui ne surpassent pas le 17^{me} degré, sont toujours résolubles en facteurs réels, ou simples, ou doubles.

SCHOLIE.

§. 44. Si nous examinons la force de ces démonstrations, nous trouverons qu'elle consiste en ce que l'équation finale qui renferme la seule inconnüe u , devient d'un degré pair & que son dernier terme est un quarré négatif; ce qui est arrivé dans la résolution des équations du 4^{me}, 8^{me} & 16^{me} degré. On s'apercevra de même, que la dernière circonstance du terme absolu négatif ne sauroit avoir lieu, à moins que l'exposant du degré de l'équation pour u ne soit un tel nombre pair comme $2n$, que sa moitié n est un nombre impair: car le dernier terme étant le produit de n quarrés négatifs, deviendroit positif, si n étoit un nombre pair. Et c'est la raison que notre démonstration ne sauroit être appliquée à des équations du 12^{me} ou 20^{me} degré; car si nous voulions opérer de la même manière sur une équation par exemple du 20 degré, en la décomposant en deux facteurs du 10 degré comme $x^{10} + ux^9 + \&c.$ & $x^{10} - ux^9 + \&c.$ après avoir fait évanouir le second terme, on verroit que la quantité u dût être déterminée par une équation du

$$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 4.11.13.17.19 \text{ degré}$$

dont la moitié étant encore un nombre pair, produiroit le dernier terme de l'équation affirmatif, & on n'en sauroit plus tirer la conclusion dont nous avons besoin. Or pour peu que nous réfléchissons sur cette circonstance, nous trouverons, que le dernier terme ne devient nécessairement négatif, que lorsque l'équation proposée est d'un degré, dont l'exposant est une puissance de 2, & partant la manière de démon-

montrer, dont je me sers ici, n'aura lieu après, que dans les équations du 32^{me} & 64^{me} & 128^{me} &c. degré. Or ces cas sont suffisans pour notre dessein, puisqu'ayant démontré la résolubilité en facteurs réels pour des équations d'un degré quelconque, elle vaut aussi pour toutes les équations d'un degré inférieur.

Theoreme VII.

§. 45. *Toute équation d'un degré, dont l'exposant est une puissance du binaire comme 2ⁿ (n étant un nombre entier plus grand que 1) est résoluble en deux facteurs réels du degré 2ⁿ⁻¹.*

DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouir le second terme l'équation dont il s'agit, sera de cette forme :

$$x^{2^n} + Bx^{2^{n-2}} + Cx^{2^{n-3}} + Dx^{2^{n-4}} + \&c. = 0.$$

ou le nombre des coefficients B, C, D, &c. est = 2ⁿ - 1. Supposons maintenant les deux facteurs cherchés :

$$x^{2^{n-1}} - \mu x^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + \mu x^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

où le nombre des coefficients à déterminer $\mu, \alpha, \beta, \&c.$ est aussi = 2ⁿ - 1. Or la comparaison du produit de ces deux facteurs avec la proposée fournit autant d'égalités, de sorte que toutes les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ se pourront déterminer par les connus B, C, D, &c. & μ réellement sans extraction de racines ; or enfin pour déterminer l'inconnue μ , on parviendra à une équation, qui aura pour exposant de son degré,

$$\frac{2^n (2^n - 1) (2^n - 2) (2^n - 3) (2^n - 4) \dots (2^{n-1} + 1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5 \quad \dots \quad 2^{n-1}}$$

comme



comme on fait par les regles de combinaison. Soit N cet exposant du degré de l'équation pour u , & en renversant l'ordre des facteurs du denominateur, on aura :

$$N = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^2 - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \frac{2^n - 2}{2^{n-1} - 2} \cdot \frac{2^n - 3}{2^{n-1} - 3} \cdot \frac{2^n - 4}{2^{n-1} - 4} \dots \frac{2^{n-1} + 1}{1}.$$

& abaissant chaque fraction aux plus petits termes :

$$N = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2} - 1} \cdot \frac{2^n - 3}{2^{n-1} - 3} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2} - 1} \dots \frac{2^{n-1} + 1}{1}.$$

Or il est seur que ce nombre N est entier, & puisque tant le produit des numerateurs que des denominateurs est impair, ce nombre sera impairement pair, ou sa moitié un nombre impair : il sera donc en commençant par la dernière fraction :

$$\frac{1}{2} N = \frac{2^{n-1} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-1} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-1} + 3}{3} \cdot \frac{2^{n-3} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-1} + 5}{5} \dots \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}.$$

Mais puisque le second terme de l'équation proposée manque, si p est une racine u , il en sera $-p$ aussi une racine, & partant $uu - pp$ un facteur double, & le nombre de tous les facteurs de cette forme sera $= \frac{1}{2} N$ c. à. d. un nombre impair. Par conséquent le dernier terme de l'équation pour u sera un quarré negatif, ce qui est une marque que cette équation renferme au moins deux valeurs réelles, l'une pour u & l'autre pour $-u$; d'où l'on formera deux facteurs réels du degré 2^{n-1} de l'équation proposée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 46. Toute équation donc du 32^{me} degré est résoluble en deux facteurs réels du 16^{me} degré, & partant par le theoreme précédent aussi résoluble en 16 facteurs réels du second degré. Ce qui doit s'entendre aussi de toutes les équations au dessous du 32^{me} degré, qu'on pourra par ce moyen décomposer en facteurs réels ou simples ou doubles.



COROLL. II.

§. 47. Puisque ensuite toute équation du 64^{me} degré est résoluble en deux facteurs réels du 32^{me} degré, toutes les équations, qui n'excedent pas le 64^{me} ou 65^{me} degré, seront aussi résolubles en facteurs réels tous, ou simples, ou doubles.

COROLL. III.

§. 48. De la même manière on étendra cette résolubilité en facteurs réels, ou simples, ou doubles, successivement aux équations du 128^{me}, 256^{me}, 512^{me} &c. degré; de sorte qu'il est à présent certain, que toute équation de quelque haut degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples, ou du second degré.

SCHOLIE.

§. 49. Voilà donc une démonstration complète de la proposition, qu'on suppose communément dans l'analyse & principalement dans le calcul integral; par laquelle on prétend, que toute fonction rationnelle d'une variable x comme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \&c.$ se peut toujours résoudre en facteurs réels ou simples de la forme $x+p$ ou doubles de la forme $xx + px + q$. C'est de la possibilité de cette résolution, qu'on a tiré cette belle & importante conséquence, que l'intégrale d'une telle formule différentielle $\frac{P dx}{Q}$, où P & Q marquent des fonctions rationnelles quelconques de x , se peut toujours exprimer, ou algébriquement, ou par des logarithmes, ou par des arcs de cercle. Or pour ce qui regarde la solidité de la démonstration, que je viens de donner de cette belle propriété des équations, je crois qu'on n'y trouvera rien à redire, après qu'on aura bien pesé les remarques, que j'y ai ajoutées; cependant en cas qu'on voulut faire des difficultés de reconnoître la bonté de ces démonstrations, je m'en vai ajouter quelques propositions relatives à ce sujet, qui ne sont pas dépendantes des précédentes, & dont la vérité servira à lever tous les doutes qu'on pourroit encore avoir.

Theo-



Theoreme VIII.

§. 50. *Toute équation du 6^me degré a au moins un facteur réel du second degré, indépendamment des démonstrations précédentes.*

DEMONSTRATION.

Soit l'équation proposée du 6^me degré

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

dont un facteur double quelconque soit $xx - ux + v$; l'autre facteur sera donc du quatrième degré comme;

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

& on comprend, que si l'un est réel, l'autre le doit être aussi. Le produit de ces deux facteurs devant être égal à la proposée, on parviendra à 6 égalités, d'ou il faut déterminer les coefficients supposés $u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, & cette détermination se pourra faire, comme j'ai déjà remarqué par des expressions rationnelles, jusques à la dernière, qui soit du coefficient u , dont il faudra tirer la valeur d'une équation d'un certain nombre de degrés; de sorte que si l'on pourra trouver une valeur réelle de u , celles des autres coefficients α, β, γ , &c. deviendront aussi réelles, & partant aussi les facteurs supposés mêmes. Il s'agit donc de considérer l'équation, qui déterminera u , pour voir si elle contient des valeurs réelles. Or il est clair, qu'en général u est la somme de deux racines quelconques de l'équation proposée; & partant elle sera susceptible d'autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités dans cette formule $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Donc il faut absolument que l'équation pour déterminer u contienne 15 valeurs différentes, ni plus ni moins; & ainsi cette équation sera du 15^me degré, c.à.d. d'un degré impair. Elle aura donc seulement une racine réelle, qui étant posée pour u nous fournira un facteur réel du second degré $xx - ux + v$ de l'équation proposée du 6^me degré.
C. Q. F. D.



COROLLAIRE.

§. 61. Toute équation donc du sixième degré peut toujours se résoudre en deux facteurs réels, dont l'un est du second & l'autre du quatrième degré: & puisque celui-cy est résoluble en deux facteurs réels du second degré, on aura trois facteurs réels doubles, dont l'équation du 6^me degré est composée.

SCHOLIE.

§. 52. Je suppose ici la possibilité de résoudre une équation du 4^me degré en deux facteurs réels doubles, quoique mon dessein soit de rendre cette proposition & quelques suivantes indépendantes des démonstrations précédentes. Car quand même on douteroit de leur solidité, ce doute ne sauroit rouler, que sur les équations du 8^me, 16^me &c. degré; puisque la démonstration pour les équations du 4^me degré est tout à fait accomplie, ayant même déduit l'équation, d'où il faut déterminer l'inconnue x , par les opérations algébriques, ce qui ne pouvoit pas s'exécuter dans les équations d'un plus haut degré, où il falloit avoir recours à quelques principes particuliers. Il est donc remarquable, que la résolution d'une équation du 6^me degré est prouvée ici par celle du 4^me degré, au lieu que suivant les théorèmes précédens, il n'a pas été permis de reconnoître la possibilité de cette résolution, qu'après avoir démontré celle des équations du 8^me degré. Maintenant donc nous sommes convaincus, que toute équation du sixième degré est résoluble en trois facteurs doubles réels, quand même il seroit impossible de résoudre pareillement les équations du 8^me degré. Or la méthode dont je me suis servi ici pour prouver la résolution des équations du 6^me degré, s'étend également à toutes les équations d'un degré, dont l'exposant est un nombre impairement pair, ou dont la moitié est un nombre impair; comme je ferai voir dans le théorème suivant. Au reste il est ici encore à remarquer, qu'en vertu de ce théorème aussi toute équation du 7^me degré est résoluble en un facteur simple & trois doubles, tous réels.

Theo.



Theoreme IX.

§. 53. Toute équation d'un degré, dont l'exposant est un nombre de cette forme $4n+2$, a toujours au moins un facteur réel du second degré, & cela indépendamment des démonstrations superieures.

DEMONSTRATION.

L'équation proposée étant de cette forme :

$$x^{4n+2} + Ax^{4n+1} + Bx^{4n} + Cx^{4n-1} + \&c. \dots = 0$$

soit un de ses facteurs doubles quelconque $xx - ux + v$, & il est certain que u fera la somme de deux racines quelconques de l'équation proposée. Or le nombre de toutes les racines étant $= 4n+2$, si l'on en combine deux, le nombre de toutes les combinaisons possibles

$$\text{fera} = \frac{(4n+2)(4n+1)}{2} = (2n+1)(4n+1); \text{ \& la lettre } u \text{ fera}$$

susceptible d'autant de valeurs; ou bien u se déterminera par une équation d'un degré dont l'exposant $= (2n+1)(4n+1)$, qui étant impair cette équation aura nécessairement une racine réelle, qui étant mise pour u donnera le facteur dou' le $xx - ux + v$ réel. D'où il s'ensuit que toute équation d'un degré $4n+2$ a toujours au moins un facteur réel du second degré. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 54. Donc si une équation du huitième degré est résoluble en 4 facteurs doubles réels, toute équation du 10^me degré pourra être résolue en 5 facteurs doubles réels, & pour prouver cela on n'a pas besoin de recourir aux équations du 16^me degré, comme auparavant.

COROLL. II.

§. 55. Et si toute équation du degré 2^m est résoluble en 2^{m-1} facteurs doubles réels, ce theoreme prouve la résolubilité en facteurs doubles réels des équations du degré $2^m + 2$. Et de plus les équations des degrés $2^m + 1$ & $2^m + 3$ permettront aussi la résolution en



facteurs réels, ou simples, ou doubles, puisqu'étant d'un degré impair elles ont au moins un facteur simple réel.

Theoreme X.

§. 56. Toute équation d'un degré, dont l'exposant est un nombre de la forme $8n + 4$, a au moins un facteur réel du quatrième degré; & cela indépendamment des démonstrations supérieures.

DEMONSTRATION.

Si l'on pose un facteur quelconque du 4^{me} degré

$$x^4 - ux^3 + ax^2 + \xi x + \gamma$$

le coefficient u sera la somme de 4 racines quelconques de l'équation proposée. Or cette équation ayant $8n + 4$ racines, le nombre de toutes les valeurs possibles, dont la quantité u est

$$\text{susceptible, est} = \frac{(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}$$

$$= \frac{(2n+1)(8n+3)(4n+1)(8n+1)}{3}, \text{ \& partant la quantité } u$$

sera déterminée par une équation du même degré: & il est clair que l'exposant de ce degré étant un nombre entier sera impair. Donc cette équation aura au moins une racine réelle, qui étant mise pour u les autres coefficients a, ξ, γ , en seront aussi déterminés réellement, & on obtiendra un facteur réel du quatrième degré. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 57. Donc puisqu'un facteur réel du 4^{me} degré est incontestablement résoluble en deux facteurs réels du second degré, toute équation d'un degré $8n + 4$ aura certainement deux facteurs doubles réels, au moins, & les équations du $8n + 5$ ^{me} degré auront outre cela un facteur simple réel de plus.

COROLL. II.

§. 58. Les équations du 12^{me} degré étant de ce nombre, auront donc deux facteurs doubles réels, & le troisième facteur sera du 8^{me} degré.



degré. Donc si celui-ci est résoluble en 4 facteurs doubles réels, on aura en tout 6 facteurs doubles réels, sans qu'on ait besoin de monter aux équations du 16^{me} degré pour prouver cela.

SCHOLIE.

§. 59. On prouvera par un semblable raisonnement, que toute équation d'un degré $16n + 8$ a un facteur réel du 8^{me} degré au moins, & on passera de même aux équations de $32n + 16$, $64n + 32$, $128n + 64$ &c. dimensions pour prouver qu'elles ont au moins un facteur réel du 16^{me}, ou du 32^{me}, ou du 64^{me} degré, &c. De là on tirera cette conséquence, que toutes les équations depuis le 8^{me} degré jusqu'au 16^{me} se peuvent résoudre en facteurs réels, ou simples, ou doubles, en ne supposant que la résolution des équations du 4^{me} & 8^{me} degré, & en general la résolution de toute équation se pourra faire, sans qu'on ait besoin de la réduire à un degré plus haut, comme nous avons été obligé de faire, en n'employant que la résolution des équations, dont l'exposant du degré est une puissance du binaire. Combinant donc ces deux manieres de démontrer ensemble, on ne balancera plus d'accorder ce Theoreme général, que toute équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples, ou doubles. Cependant il faut avouer, qu'il est pour la plupart impossible d'exécuter cette résolution, ou d'assigner actuellement ces facteurs réels; puisque dès qu'une équation passe le quatrième degré, les regles de l'algèbre ne sont plus suffisantes à nous découvrir les racines. Mais pour le but, qu'on a en vuë en établissant ce Theoreme général, il suffit qu'on soit assuré, qu'une telle résolution est toujours possible, quoiqu'on ne la puisse jamais exécuter.

Theoreme XI.

§. 60. *Si une équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, a des racines imaginaires, chacune sera comprise dans cette formule générale $M + NV - 1$, les lettres M & N marquant des quantités réelles.*

DEMON-



DEMONSTRATION.

Soit l'équation proposée quelconque du degré n :

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

de sorte que le nombre de toutes ses racines soit $= n$. Qu'on décompose cette équation dans tous ses facteurs réels, qui seront ou simples de la forme $x - p = 0$, ou du second degré de la forme $xx - 2px + q = 0$; & toutes les racines se trouveront par la résolution des égalités, que ces facteurs, étant posés $= 0$, fournissent. Or chaque facteur simple ou l'équation $x - p = 0$ donne une racine réelle $x = p$; & chaque facteur double ou l'équation $xx - 2px + q = 0$ renferme deux racines

$$x = p + \sqrt{pp - q} \quad \& \quad x = p - \sqrt{pp - q}$$

qui seront aussi réelles si $pp > q$. Mais si $pp < q$, soit $q = pp + rr$, & il sera $\sqrt{pp - q} = \sqrt{-rr} = r\sqrt{-1}$; donc ces deux racines seront imaginaires, savoir :

$$x = p + r\sqrt{-1} \quad \& \quad x = p - r\sqrt{-1}$$

Ayant donc démontré, qu'il est toujours possible de résoudre toute équation en facteurs, ou simples, ou doubles réels, toutes les racines seront aussi, ou réelles, ou imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, où M & N sont des quantités réelles, de sorte que l'imaginaire, qui y entre, n'est contenu que dans la forme $\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 61. Si donc parmi les racines imaginaires d'une équation quelconque, se trouve une $x = p + r\sqrt{-1}$, il s'y trouvera aussi certainement celle-cy $x = p - r\sqrt{-1}$; ce qui est évident tant de la démonstration de ce theoreme, que de la nature du signe radical $\sqrt{-1}$, qui renferme essentiellement aussi bien le signe $+$ que le signe $-$: de sorte que connoissant une racine imaginaire d'une équation quelconque, l'autre se découvre d'elle-meme.

COROL-



COROLL. II.

§. 62. Ayant déjà fait voir que le nombre de toutes les racines imaginaires, qu'une équation quelconque contient, est pair, chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ aura parmi les autres son compagnon $x = p - r\sqrt{-1}$, qui lui appartient plus que toutes les autres; vu que tant la somme de ces deux racines $2p$, que leur produit $pp + rr$, sont des quantités réelles.

COROLL. III.

§. 63. De là il est aussi clair que si $x = p - r\sqrt{-1}$ est un facteur imaginaire d'une équation quelconque, la formule $x = p + r\sqrt{-1}$ en sera aussi un facteur. Et ces deux facteurs joints ensemble donneront un facteur double réel de la même équation, lequel sera $xx - 2px + pp + rr$.

SCHOLIE.

§. 64. On comprend de là réciproquement, que si l'on pouvoit démontrer, que toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque eussent nécessairement la forme $M + N\sqrt{-1}$, il seroit aisé d'en démontrer, que toute équation fut aussi résoluble en facteurs réels, ou simples, ou du second degré. Car les racines réelles fourniroient toujours autant de facteurs simples réels, & chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ étant jointe avec sa compagne $x = p - r\sqrt{-1}$ produiroit un facteur double réel $xx - 2px + pp + rr$; de sorte que si une équation du degré $n = \alpha + 2\beta$, avoit α racines réelles, & 2β racines imaginaires, dont chacune fut de la forme $M + N\sqrt{-1}$, il seroit démontré, que cette équation eut α facteurs simples réels, & β facteurs doubles réels. Or il paroît très vraisemblable que toute racine imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & Mr. d'Alembert a prouvé cela dans son excellente pièce sur le Calcul intégral, qui se trouve dans le II. Volume de nos Mémoires, d'une telle manière qu'il n'y reste plus le moindre doute. Cependant comme il a employé dans sa démonstration des quantités infiniment petites, quoique cette considération n'en puisse



pas diminuer la force, je tacherai de tirer aussi de cette source une démonstration rigoureuse du theoreme général, auquel cette piece est destinée, sans avoir recours à des quantités infiniment petites. Or pour cet effet j'aurai besoin de quelques Theoremes préliminaires.

Theoreme XII.

§. 65. *Toute fonction, qui est formée, ou par addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou par division d'autant de formules imaginaires de cette forme $M + N\sqrt{-1}$ que ce soit, sera toujours comprise dans la même forme $M + N\sqrt{-1}$, les lettres M & N marquant des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Qu'on s'imagine plusieurs formules imaginaires de la forme indiquée, lesquelles soient :

$$a + \beta\sqrt{-1}; \gamma + \delta\sqrt{-1}; \epsilon + \zeta\sqrt{-1}; \eta + \theta\sqrt{-1}; \&c.$$

& est il d'abord clair, qu'en ajoutant ces formules ensemble, ou en retranchant quelques unes, l'expression qui en résulte sera toujours comprise dans cette forme $M + N\sqrt{-1}$. Il est aussi clair que si l'on multiplie deux ou plusieurs de ces formules ensemble, le produit sera toujours contenu dans la formule $M + N\sqrt{-1}$: car le produit de deux $a + \beta\sqrt{-1}$ & $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ étant $a\gamma - \beta\delta + (a\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}$, a la forme $M + N\sqrt{-1}$, laquelle étant outre cela multipliée par $\epsilon + \zeta\sqrt{-1}$ donnera encore cette forme, & ainsi de suite. Il ne s'agit donc plus que de la division : or il est clair que ce cas se réduit toujours

à une telle fraction $\frac{A + B\sqrt{-1}}{C + D\sqrt{-1}}$, où tant le numerateur que le deno-

minateur est déjà composé par les trois premières opérations, l'addition, la soustraction & la multiplication, d'autant de formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. Or cette fraction se réduira à une autre, dont le denominateur sera réel, en multipliant

en

en haut & en bas par $C - D \sqrt{-1}$; car alors on aura $\frac{AC + BD + (BC - AD) \sqrt{-1}}{CC + DD}$, de sorte que posant M pour

$\frac{AC + BD}{CC + DD}$ & N pour $\frac{BC - AD}{CC + DD}$, on aura cette forme $M + N \sqrt{-1}$.

Par conséquent cette forme demeure inaltérée, par quelques opérations qu'on joigne ensemble autant de formules imaginaires de la forme $M + N \sqrt{-1}$ qu'on voudra. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 66. De là il est aussi évident que toutes les puissances, dont l'exposant est un nombre entier positif, d'une formule imaginaire $A + B \sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M + N \sqrt{-1}$; puisque ces puissances se forment par la multiplication.

COROLL. II.

§. 67. Ensuite, puisque la puissance $(A + B \sqrt{-1})^n$ est contenue dans la forme $M + N \sqrt{-1}$, si n est un nombre entier positif, la même forme aura lieu si n est un nombre entier négatif. Car ayant

$$(A + B \sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(A + B \sqrt{-1})^n} = \frac{1}{M + N \sqrt{-1}}$$

cette forme se réduit à $\frac{M - N \sqrt{-1}}{MM + NN}$.

COROLL. III.

§. 68. La forme générale $M + N \sqrt{-1}$ comprend aussi toutes les quantités réelles, lorsqu'on pose $N = 0$. Donc joignant ensemble par les quatre opérations mentionnées, non seulement des formules imaginaires de la forme $M + N \sqrt{-1}$, mais aussi des réelles, le produit sera toujours compris dans la forme $M + N \sqrt{-1}$.

COROLL. IV. *

§. 69. Il peut aussi arriver que ce produit, quoiqu'il soit formé des formules imaginaires, devient réel, les imaginaires se détruisant



mutuellement, ou rendant $N = 0$. Ainsi le produit de $a + \beta \sqrt{-1}$ par $a - \beta \sqrt{-1}$ est réel ; & on fait que $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$.

Theoreme XIII.

§. 70. De quelque puissance qu'on extraye la racine, ou d'une quantité réelle, ou d'une imaginaire de la forme $M + N \sqrt{-1}$, les racines seront toujours, ou réelles, ou imaginaires de la même forme $M + N \sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION.

Soit n l'exposant de la puissance dont il faut extraire la racine, de sorte qu'on ait à considérer les valeurs, ou de $\sqrt[n]{a}$, ou de $\sqrt[n]{(a + b \sqrt{-1})}$. Or puisque celle-cy se change en celle-là, si $b = 0$, il suffit de prouver que $\sqrt[n]{(a + b \sqrt{-1})}$ ou $(a + b \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ est contenu dans la forme $M + N \sqrt{-1}$, quelque grand que soit le nombre n . Pour prouver cela, qu'on cherche un angle Φ tel que sa tangente soit $= \frac{b}{a}$, ou posant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, qu'on prenne l'angle Φ tel, que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & le cosinus $= \frac{a}{c}$: on aura donc $a + b \sqrt{-1} = c (\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)$, puisque $\cos \Phi = \frac{a}{c}$ & $\sin \Phi = \frac{b}{c}$. Or il est démontré qu'une puissance quelconque d'une telle forme, comme $(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^m$ est $= \cos m \Phi + \sqrt{-1} \sin m \Phi$, quelque nombre qu'on signifie par la lettre m , soit qu'il soit affirmatif, ou négatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationnel. Cela posé on aura $(a + b \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a + b \sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{n}} (\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^{\frac{1}{n}} = \left(\cos \frac{1}{n} \Phi + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} \Phi \right)^{\frac{1}{n}} c$. Donc puisque $c = \sqrt{(aa + bb)}$ est une quantité réelle & positive, & l'angle Φ & partant aussi sa partie



tie $\frac{1}{n} \Phi$ avec son sinus & cosinus aussi des quantités réelles : il est evi-

dent que $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$ ou $\left(\cos \frac{1}{n} \Phi + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} \Phi\right) \sqrt[n]{c}$ appartient à la forme $M + N\sqrt{-1}$. Donc toutes les racines d'une quantité réelle ou imaginaire de cette forme $M + N\sqrt{-1}$, sont toujours comprises dans la formule générale $M + N\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 71. Comme on fait que toute quantité a deux racines quarrées, trois racines cubiques, quatre racines quarré-quarrées & ainsi de suite, on trouve par cette methode toutes les racines, dont le nombre est $= n$, puisque $\frac{1}{n} \Phi$ a autant de valeurs différentes.

COROLL. II.

§. 72. Car puisque Φ est l'angle donc le sinus est $= \frac{b}{c}$ & le cosinus $= \frac{a}{c}$; au lieu de Φ on peut aussi prendre les angles $4\rho + \Phi$; $8\rho + \Phi$; $12\rho + \Phi$ &c. ρ marquant l'angle droit, puisque tous ces angles ont le même sinus & cosinus. Mettant donc dans la racine trouvée $\left(\cos \frac{1}{n} \Phi + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} \Phi\right) \sqrt[n]{c}$ pour Φ ces angles Φ ; $4\rho + \Phi$; $8\rho + \Phi$; $12\rho + \Phi$ &c. on trouvera autant d'expressions différentes, qu'il y a d'unités dans l'exposant n .

COROLL. III.

§. 73. Puisque n peut marker un nombre quelconque, il s'ensuit de notre démonstration, que non seulement $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$ ou n est un nombre entier positif, mais en général que cette expression $(a + b\sqrt{-1})^m$, quelque nombre qui soit marqué par m ou positif, ou



negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationnel, est toujours comprise dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 74. Par conséquent non seulement les quatre opérations de l'arithmétique, mais aussi l'extraction des racines, de quelque degré qu'elles soient, ne changent point la forme $M + N\sqrt{-1}$ des quantités imaginaires, auxquelles on les applique d'une manière quelconque.

SCHOLIE

§. 75. Si la quantité, dont on cherche toutes les racines, d'un certain degré, est réelle ou $b = 0$, il fera $c = \sqrt[n]{aa}$, d'où l'on aura pour c un valeur positive, quand même a auroit une negative; & l'angle Φ fera ou $= 0$, ou $= 180^\circ$, selon que le cosinus $\frac{a}{c}$ fera ou $= +1$ ou $= -1$. Donc le premier cas ou a est positif & $c = a$: les valeurs de Φ seront donc $0, 4\varrho, 8\varrho, 12\varrho$ &c. & les racines du degré n du nombre a feront, posant ϱ pour la marque d'un angle droit:

$$\sqrt[n]{a}; \left(\cos \frac{4\varrho}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{4\varrho}{n} \right) \sqrt[n]{a}; \left(\cos \frac{8\varrho}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{8\varrho}{n} \right) \sqrt[n]{a} \text{ \&c.}$$

Or si a est un nombre negatif, on aura les expressions suivantes, ou bien les valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ feront:

$$\left(\cos \frac{2\varrho}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\varrho}{n} \right) \sqrt[n]{a}; \left(\cos \frac{6\varrho}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{6\varrho}{n} \right) \sqrt[n]{a}; \text{ \&c.}$$

mettant pour Φ successivement $2\varrho, 6\varrho, 10\varrho, 14\varrho$ &c. Mais cette matiere étant déjà suffisamment développée, je me borne ici à cette unique conséquence, que l'extraction des racines, tant des quantités réelles qu'imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ produit toujours ou des quantités réelles, ou des imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$.

Theore-



Theoreme. XIV.

§. 76. De quelque degré que soit une équation algébrique, toutes les racines imaginaires qu'elle peut avoir, sont toujours comprises dans cette forme générale $M + N\sqrt{-1}$; de sorte que M & N sont des quantités réelles.

DEMONSTRATION.

Soit en general l'équation proposée:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

& quoique nous ne soyons pas en état d'assigner la formule générale, qui en contient les racines, comme nous le sommes pour les équations du second, troisième & quatrième degré, il est pourtant certain, que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux, dont les quantités connues $A, B, C, D, E, \&c.$ seront compliquées. On peut aussi remarquer que cette expression analytique d'une racine quelconque renfermera plusieurs membres, dont chacun sera la racine d'un certain degré d'une quantité, qui renferme encore des signes radicaux, & que ceux-cy auront après eux encore d'autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne en chaque membre au dernier signe radical, qui n'affecte plus que des quantités réelles. Remontons de ces derniers signes successivement, & il est évident que la quantité marquée par le dernier signe sera, ou réelle, ou imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$. Ensuite devant cette quantité, jointe avec quelque valeur, ou réelle, ou imaginaire aussi de la forme $M + N\sqrt{-1}$, se trouvera un nouveau signe radical, qui se réduira donc à $\sqrt[n]{M + N\sqrt{-1}}$, dont la valeur est encore de la forme $M + N\sqrt{-1}$; & si nous remontons de cette manière jusqu'aux premiers signes radicaux, qui distinguent les membres, nous verrons, qu'aucune opération ne nous sauroit écarter de cette forme, & que par conséquent chaque membre aura enfin la même forme, quelque grand que soit le nombre des signes radicaux, qui y sont enveloppés. D'où il s'ensuit que l'expression générale, qui renferme



ferme toutes les racines de l'équation proposée, se réduira nécessairement à la forme $M + N\sqrt{-1}$, de sorte que toutes les racines imaginaires ne sauroient avoir d'autre forme que celle-cy. C. Q. F. D.

SCHOLIE I.

§. 77. Voilà donc une nouvelle démonstration du Theoreme général, que je me suis proposé de prouver ici, & contre laquelle on ne sauroit rien objecter, si ce n'est, que nous ne savons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4^{me} sont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force, pourvu qu'on m'accorde, que les expressions pour les racines ne contiennent point d'autres opérations, que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires: & l'on ne sauroit soutenir que des opérations transcendentes s'y mêlassent. Mais si la conjecture, que j'ai autrefois avancée sur la forme des racines des équations d'un ordre quelconque, est fondée, la démonstration que je viens de donner ici, aura toute la force, qu'on peut souhaiter. Car ayant une équation quelconque du degré n , je dis qu'il y aura toujours une équation du degré $n-1$, dont les racines étant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. au nombre de $n-1$, une racine quelconque de l'autre équation du degré n sera $= a + \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \&c.$ où n est une quantité réelle. Donc si les racines de l'équation du degré $n-1$ sont, ou réelles, ou de la forme $M + N\sqrt{-1}$, les racines de l'équation du degré n auront aussi cette forme. Par conséquent puisque les racines des équations du second degré sont, ou réelles, ou de la forme $M + N\sqrt{-1}$, les racines des équations du troisième degré se réduiront aussi à la même forme, & partant aussi les racines des équations du 4^{me}, 5^{me}, 6^{me} &c. à l'infini.

SCHOLIE II.

§. 78. De là on tirera encore cette importante conséquence, que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à cette formule $M + N\sqrt{-1}$; de sorte que toute quantité imaginaire est toujours composée de deux membres, dont l'un est



est une quantité réelle indiquée par M , et l'autre est le produit d'une quantité aussi réelle comme N , multipliée par $\sqrt{-1}$; de manière que $\sqrt{-1}$ est la seule source de toutes les expressions imaginaires. Car si nous regardons l'origine des quantités imaginaires, qui est l'extraction des racines ou la résolution des équations, il est démontré, que toutes les quantités imaginaires qui en découlent, sont toujours comprises dans cette forme $M + N\sqrt{-1}$, & de plus j'ai fait voir, que de quelque manière qu'on traite une ou plusieurs quantités imaginaires de cette forme par les opérations de l'analyse, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division & l'extraction des racines, toutes les expressions qui en résultent, se réduisent toujours à la même forme $M + N\sqrt{-1}$. On sera donc obligé d'accorder cette vérité, entant que ce ne sont que les opérations algébriques, par lesquelles les formules imaginaires sont compliquées; mais on doutera peut-être, si les quantités imaginaires, qui dérivent des opérations transcendentes, comme sont celles qui impliquent la nature des logarithmes ou des angles, sont encore réducibles à la même forme. Or pour lever ce doute je ferai voir, que toutes les opérations transcendentes, qui sont connues, n'écartent point les quantités imaginaires qu'elles produisent, de la forme marquée, & quoiqu'il soit impossible d'appliquer le même raisonnement à toutes les opérations transcendentes, les propositions suivantes ôteront tout sujet de douter davantage de la vérité de cette propriété générale de toutes les quantités imaginaires, de quelque source qu'elles puissent tirer leur origine.

Probleme I.

§. 79. *Une quantité imaginaire étant élevée à une puissance, dont l'exposant est une quantité réelle quelconque, déterminer la forme imaginaire qui en résulte.*

SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, & m l'exposant réel de la puissance, de sorte qu'il s'agit de déterminer M & N , pour qu'il soit

$$(a + b\sqrt{-1})^m = M + N\sqrt{-1}.$$



Posons $\sqrt{aa+bb} = c$, & c sera toujours une quantité réelle & positive, car nous ne regardons pas ici l'ambiguïté du signe $\sqrt{}$. Ensuite cherchons l'angle Φ tel que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & le cosinus $= \frac{a}{c}$, ayant ici égard à la nature des quantités a & b , si elles sont affirmatives ou negatives; & il est certain, qu'on pourra toujours assigner cet angle Φ , quelles que soient les quantités a, b ; pourvu qu'elles soient réelles, comme nous le supposons. Or ayant trouvé cet angle Φ , qui sera toujours réel, on aura en même tems tous les autres angles, dont le sinus $\frac{b}{c}$ & le cosinus $\frac{a}{c}$ sont les mêmes: car posant π pour l'angle de 180° , tous ces angles seront, $\Phi, 2\pi + \Phi, 4\pi + \Phi, 6\pi + \Phi, 8\pi + \Phi$, &c. auxquels on peut ajouter ceux-cy: $-2\pi + \Phi, -4\pi + \Phi, -6\pi + \Phi, -8\pi + \Phi$, &c. Cela posé il sera $a + b\sqrt{-1} = c(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)$, & la puissance proposée $(a + b\sqrt{-1})^m = c^m (\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^m$, où c^m aura toujours une valeur réelle positive, qu'il faut lui donner préférentiellement à toutes les autres valeurs, qu'il pourroit avoir. Ensuite il est démontré que $(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^m = \cos m \Phi + \sqrt{-1} \sin m \Phi$; où il faut remarquer, que puisque m est une quantité réelle, l'angle $m \Phi$ sera aussi réel, & partant aussi son sinus & son cosinus. Donc nous aurons:

$$(a + b\sqrt{-1})^m = c^m (\cos m \Phi + \sqrt{-1} \sin m \Phi)$$

ou bien la puissance $(a + b\sqrt{-1})^m$ est contenue dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, en prenant $M = c^m \cos m \Phi$ & $N = c^m \sin m \Phi$ où il y a $c = \sqrt{aa+bb}$ & $\cos \Phi = \frac{a}{c}$ & $\sin \Phi = \frac{b}{c}$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 80. De même maniere qu'il est $(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^m = \cos m \Phi + \sqrt{-1} \sin m \Phi$, il sera aussi $(\cos \Phi - \sqrt{-1} \sin \Phi)^m =$
cos



$\cos m \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi$, & partant on aura $(a - b \sqrt{-1})^m = c^m (\cos m \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi)$, où φ marque le même angle que dans le cas précédent.

COROLL. II.

§. 81. Si l'exposant m est négatif, puisque $\sin -m \varphi = -\sin m \varphi$ & $\cos -m \varphi = \cos m \varphi$, il sera donc :

$$\begin{aligned} (\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)^{-m} &= \cos m \varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi && \& \\ (a \pm b \sqrt{-1})^{-m} &= c^{-m} (\cos m \varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi). \end{aligned}$$

COROLL. III.

§. 82. Si m est un nombre entier, soit affirmatif, soit négatif, la formule $(a + b \sqrt{-1})^m$ n'aura qu'une seule valeur : car quoiqu'on substitue pour φ tous les angles φ ; $\pm 2\pi + \varphi$; $\pm 4\pi + \varphi$; $\pm 6\pi + \varphi$; &c. on trouvera toujours pour $\sin m \varphi$ & $\cos m \varphi$ les mêmes valeurs.

COROLL. IV.

§. 83. Mais si l'exposant m est un nombre rompu $\frac{\mu}{\nu}$, l'expres-

sion $(a + b \sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}}$ aura autant de valeurs différentes, qu'il y a d'unités en ν ; car en substituant pour φ les angles marqués, on obtiendra autant de valeurs différentes pour $\sin m \varphi$ & $\cos m \varphi$, que le nombre ν contient d'unités.

COROLL. V.

§. 84. D'où il est clair, que si m est un nombre irrationnel ou incommensurable à l'unité, l'expression $(a + b \sqrt{-1})^m$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, car tous les angles φ , $\pm 2\pi + \varphi$; $\pm 4\pi + \varphi$; $\pm 6\pi + \varphi$; &c. fourniront de diverses valeurs pour $\sin m \varphi$ & $\cos m \varphi$.

SCHOLIE I.

§. 85. Le fondement de la solution de ce problème est, que $(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)^m = \cos m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi$, dont la ve-



rité se prouve par les theoremes connus sur la multiplication des angles. Car ayant deux angles quelconques φ & θ , il sera $(\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi) (\text{cof } \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta) = \text{cof}(\varphi + \theta) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\varphi + \theta)$, ce qui est clair par la multiplication actuelle, qui donne $\text{cof } \varphi \text{ cof } \theta - \sin \varphi \cdot \sin \theta + (\text{cof } \varphi \cdot \sin \theta + \sin \varphi \text{ cof } \theta) \sqrt{-1}$. Or on fait qu'il y a $\text{cof } \varphi \cdot \text{cof } \theta - \sin \varphi \cdot \sin \theta = \text{cof}(\varphi + \theta)$ & $\text{cof } \varphi \cdot \sin \theta + \sin \varphi \cdot \text{cof } \theta = \sin(\varphi + \theta)$. D'où l'on tire aisément la conséquence, qu'il est:

$$\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)^m = \text{cof } m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi.$$

lorsque l'exposant m est un nombre entier. Mais que la même formule a lieu aussi, quand m est un nombre quelconque, la différentiation après avoir pris les logarithmes le mettra hors de doute. Car prenant les logarithmes on aura :

$$m l (\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi) = l (\text{cof } m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi).$$

Maintenant traitant l'angle φ comme une quantité variable on aura :

$$\frac{-m d\varphi \sin \varphi + m d\varphi \sqrt{-1} \cdot \text{cof } \varphi}{\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi} = \frac{-m d\varphi \sin m \varphi + m d\varphi \sqrt{-1} \cdot \text{cof } m \varphi}{\text{cof } m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi}$$

& multipliant les numerateurs par $-\sqrt{-1}$, on obtiendra :

$$\frac{m d\varphi (\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} - \sin \varphi)}{\text{cof } \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi} = \frac{m d\varphi (\text{cof } m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi)}{\text{cof } m \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin m \varphi} = m d\varphi$$

ce qui est une équation identique.

SCHOLIE II.

§. 86. Mais on demandera, comment on auroit pu parvenir à la transformation de la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ à la forme $M + N\sqrt{-1}$, si l'on n'avoit pas sçu la propriété mentionnée des angles multiples, qui paroît d'abord tout à fait étrangère à ce dessein. Pour cet effet je joindrai ici une autre solution du probleme, sans employer cette propriété; & la methode dont je me servirai, conduira aussi à la solution
des



des problemes suivans. Comme il s'agit donc de convertir la forme $(a + b\sqrt{-1})^m$ en celle-cy $x + y\sqrt{-1}$, je pose

$$(a + b\sqrt{-1})^m = x + y\sqrt{-1}.$$

& prenant les logarithmes on aura :

$$m l(a + b\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1})$$

maintenant regardant a, b, x, y , comme variables, je prend les differentiels :

$$\frac{m da + m db\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}}$$

qui se réduisent à cette équation :

$$\frac{m a d a + m b d b\sqrt{-1} + m a d b\sqrt{-1} + m b d b}{a a + b b} = \frac{x d x + x d y\sqrt{-1} - y d x\sqrt{-1} + y d y}{x x + y y}$$

où il faut que les membres réels & imaginaires soient séparément égaux entr'eux, puisqu'il est impossible d'égaliser une quantité réelle à une imaginaire. De là nous tirerons deux équations :

$$\frac{m a d a + m b d b}{a a + b b} = \frac{x d x + y d y}{x x + y y}$$

$$\& \frac{m (a d b - b d a)}{a a + b b} = \frac{x d y - y d x}{x x + y y}$$

L'integrale de la première est $m l\sqrt{aa+bb} = l\sqrt{xx+yy} + lC$. Soit donc $\sqrt{aa+bb} = c$, & il fera $c^m = C\sqrt{xx+yy}$. Pour déterminer cette constante C, on n'a qu'à remarquer, que si $b = 0$ & $a = 1$, il faut qu'il y ait $y = 0$ & $x = 1$, d'où nous voyons, qu'il doit être $C = 1$. Donc posant $\sqrt{aa+bb} = c$, nous aurons $\sqrt{xx+yy} = c^m$. Ensuite l'intégrale de l'autre équation est

$m A \operatorname{tang} \frac{b}{a} = A \operatorname{tang} \frac{y}{x} + C$; où l'on voit que la constante C doit être $= 0$, puisque si $b = 0$, il faut qu'il soit aussi $y = 0$. Par consé-



quent nous aurons : $m A \operatorname{tang} \frac{b}{a} = A \operatorname{tang} \frac{y}{x}$. Soit Φ l'angle dont la tangente $= \frac{b}{a}$, ou bien soit $\sin \Phi = \frac{b}{c}$ & $\operatorname{cof} \Phi = \frac{a}{c}$, & ayant $m \Phi = A \operatorname{tang} \frac{y}{x}$, il sera $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} m \Phi$, ou $\frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} = \sin m \Phi$ & $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = \operatorname{cof} m \Phi$. Donc puisque $\sqrt{(xx+yy)} = c^m$, nous aurons pour la solution du probleme :

$$x = c^m \operatorname{cof} m \Phi \quad \& \quad y = c^m \sin m \Phi$$

prenant $c = \sqrt{(aa+bb)}$, & l'angle Φ étant tel, qu'il soit $\sin \Phi = \frac{b}{c}$ & $\operatorname{cof} \Phi = \frac{a}{c}$: d'où l'on voit que l'angle Φ a une infinité de valeurs, comme j'ai déjà remarqué, qui sont Φ ; $\pm 2\pi + \Phi$; $\pm 4\pi + \Phi$; $\pm 6\pi + \Phi$; &c.

Probleme II.

§. 87. Une quantité réelle positive étant élevée à une puissance dont l'exposant est une quantité imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.

SOLUTION.

Soit a la quantité réelle positive, & $m+n\sqrt{-1}$ l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faut chercher la valeur imaginaire de $a^{m+n\sqrt{-1}}$. Soit donc

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

& il sera $(m+n\sqrt{-1}) \log a = \log(x+y\sqrt{-1})$, dont prenant les différentiels en posant a , x , & y variables, nous aurons

$$\frac{m da}{a} + \frac{nda\sqrt{-1}}{a} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}} = \frac{x dx + y dy}{xx+yy} + \frac{x dy - y dx}{xx+yy} \sqrt{-1}.$$

Egalant

Egalant donc séparément ensemble les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux équations :

$$\frac{m da}{a} = \frac{x dx + y dy}{x x + y y} \quad \& \quad \frac{n da}{a} = \frac{x dy - y dx}{x x + y y}$$

dont les integrales prises, comme il faut, feront :

$$\sqrt{x x + y y} = a^m \quad \& \quad A \operatorname{tang} \frac{y}{x} = n l a, \text{ ou } \frac{y}{x} = \operatorname{tang.} n l a$$

où $l a$ marque le logarithme hyperbolique de la quantité réelle positive a , lequel aura par conséquent aussi une valeur réelle. Prenant donc dans un cercle, dont le rayon = 1, un arc = $n l a$, à cause de $\sqrt{x x + y y} = a^m$, nous obtiendrons :

$$x = a^m \operatorname{cof} n l a \quad \& \quad y = a^m \operatorname{fin} n l a$$

& ces valeurs étant posées pour x & y , on aura :

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y \sqrt{-1}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLL. 1.

§. 88. La quantité imaginaire $a^{m+n\sqrt{-1}}$ sera donc aussi comprise dans la forme générale $M + N \sqrt{-1}$, puisque nous venons de trouver :

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m \operatorname{cof} n l a + a^m \sqrt{-1} \operatorname{fin} n l a$$

lorsque a est une quantité réelle positive ; car si a étoit une quantité négative quoique réelle, son logarithme seroit imaginaire, & partant aussi $\operatorname{cof} n l a$ & $\operatorname{fin} n l a$ imaginaires.

COROLL. 2.

§. 89. Puisque $a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m \cdot a^{n\sqrt{-1}}$, il sera :

$$a^{n\sqrt{-1}} = \operatorname{cof} n l a + \sqrt{-1} \operatorname{fin} n l a.$$

& prenant n négatif, il sera aussi

$$a^{-n\sqrt{-1}} = \operatorname{cof} n l a - \sqrt{-1} \operatorname{fin} n l a$$

COROLL.



COROLL. 3.

§. 90. De là il s'enfuit, que les formules suivantes sont réelles

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} + a^{-n\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof. } n/a \text{ \&}$$

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} - a^{-n\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{sin. } n/a$$

Or si $a = 1$, il sera tant $1^{n\sqrt{-1}} = 1$, que $1^{-n\sqrt{-1}} = 1$, à cause de $l 1 = 0$.

COROLL. 4.

§. 91. Donc si l'on met $n = 1$ & $a = 2$, il fera:

$$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof } l 2 \text{ \& } \frac{2^{\sqrt{-1}} - 2^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{sin } l 2. \text{ Or}$$

puisque'il y a $l 2 = 0,6931471805599$, on en tirera $\text{cof. } l 2 = 0,$

$$7692389013540 = \frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}. \text{ Mais l'arc même dont le}$$

cosinus $= l 2$ se trouve $39^\circ, 42^I, 51^{II}, 52^{III}, 9^{IV}$.

SCHOLIE.

§. 92. Le cas, où a est un nombre négatif, qui n'est pas compris dans cette solution, quoique a soit une quantité réelle, se résoudra par le problème suivant, où je prendrai pour la quantité, qui doit être élevée à un exposant imaginaire, une quantité imaginaire quelconque de la forme $a + b\sqrt{-1}$, qui comprend sous elle, en posant $b = 0$, toutes les quantités réelles tant négatives que positives.

Problème III.

§. 93. Une quantité imaginaire étant élevée à une puissance dont l'exposant est aussi imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.

SOLU.

SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, & $m + n\sqrt{-1}$ l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faille trouver la valeur de cette formule $(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}}$. Posons donc pour cet effet :

$$(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

& prenant les logarithmes on aura :

$$(m + n\sqrt{-1}) l(a + b\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1})$$

Passons aux différentiels, & puisque, comme nous avons déjà vu,

$$d.l(x + y\sqrt{-1}) = \frac{x dx + y dy}{xx + yy} + \frac{(x dy - y dx)}{xx + yy} \sqrt{-1}$$

nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{m(ada + bdb)}{aa + bb} + \frac{n(ada + bdb)\sqrt{-1}}{aa + bb} \\ + \frac{m(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} - \frac{n(adb - bda)}{aa + bb} \end{aligned} \right\} = \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{(xdy - ydx)\sqrt{-1}}{xx + yy}$$

Egalant maintenant séparément les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux égalités :

$$\frac{m(ada + bdb)}{aa + bb} - \frac{n(adb - bda)}{aa + bb} = \frac{xdx + ydy}{xx + yy}$$

$$\frac{m(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} + \frac{n(ada + bdb)\sqrt{-1}}{aa + bb} = \frac{(xdy - ydx)\sqrt{-1}}{xx + yy}$$

Pour en prendre les intégrales soit :

$$\sqrt{aa + bb} = c \quad \& \quad A \operatorname{tang} \frac{b}{a} = \phi;$$

ou bien $\sin \phi = \frac{b}{c}$ & $\cos \phi = \frac{a}{c}$, d'où l'on peut toujours trouver l'angle ϕ ; or je suppose ici, que c est une quantité positive $= \sqrt{aa + bb}$. Cela remarqué, nos intégrales seront :

$$m \log c - n \phi = \log V(x^2 + y^2)$$

$$m \phi + n \log c = A \operatorname{tang.} \frac{y}{x}.$$

De là il s'ensuit, qu'il sera $V(x^2 + y^2) = c^m e^{-n\phi}$ mettant e pour le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Ainsi pour trouver les valeurs de x & y , de cette équation :

$$(a + b \sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y \sqrt{-1}$$

ayant posé $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, & pris l'angle ϕ tel, qu'il soit $\cos \phi = \frac{a}{c}$ & $\sin \phi = \frac{b}{c}$, on aura :

$$x = c^m e^{-n\phi} \cos(m\phi + n \log c)$$

$$y = c^m e^{-n\phi} \sin(m\phi + n \log c)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 94. Si $b = 0$ & a une quantité positive, on aura $c = a$, & l'angle $\phi = 0$, ou $\pm 2\pi$, ou $\pm 4\pi$, ou en général $\phi = 2\lambda\pi$, prenant λ pour un nombre entier quelconque; donc il sera :

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m e^{-2\lambda n\pi} \left(\cos(2\lambda m\pi + n \log a) + \sqrt{-1} \sin(2\lambda m\pi + n \log a) \right)$$

qui convient avec la forme précédente, si $\lambda = 0$; de sorte que cette transformation est plus générale.

COROLL. II.

§. 95. Si $b = 0$, & a une quantité négative $-a$, il sera encore $c = +a$, & à cause de $\cos \phi = \frac{-a}{c} = -1$, l'angle ϕ sera $\pm \pi$

ou $\pm 3\pi$ ou $\pm 5\pi$ &c. ou en général $\phi = (2\lambda - 1)\pi$, prenant

pour



pour λ un nombre quelconque entier, ou positif, ou négatif. Il sera donc

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}} = a^m e^{-(2\lambda-1)n\pi} \left(\cos((2\lambda-1)m\pi + nla) + \sqrt{-1} \sin((2\lambda-1)m\pi + nla) \right)$$

COROLL. III.

§. 96. En général donc, quelques quantités que soient a & b , donnant à c la valeur positive de $\sqrt{aa + bb}$, & prenant pour Φ un tel angle que $\sin \Phi = \frac{b}{c}$ & $\cos \Phi = \frac{a}{c}$, puisque pour Φ on peut également prendre en général l'angle $2\lambda\pi + \Phi$, où λ marque un nombre entier quelconque affirmatif ou négatif, on aura

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = e^{m\sqrt{-1} - 2\lambda n\pi - n\Phi} \left(\begin{array}{l} + \cos(2\lambda m\pi + m\Phi + nlc) \\ + \sqrt{-1} \sin(2\lambda m\pi + m\Phi + nlc) \end{array} \right)$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs possibles, que cette formule $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ renferme, en donnant à λ successivement toutes les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ &c. où il suffit de prendre pour c^m la seule valeur réelle & positive, qui y est renfermée.

COROLL. IV.

§. 97. Si $a = 0$; $m = 0$, & $b = 1$, il sera $c = 1$ & $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, d'où l'on tirera cette transformation :

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - \frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi - \frac{1}{2}\pi}$, qui est d'autant plus remarquable, qu'elle est réelle, & qu'elle renferme même une infinité de valeurs réelles différentes. Car posant $\lambda = 0$, on aura en nombres

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0, 2078795763507.$$

COROLL. V.

§. 98. Si l'on pose $a = \cos \Phi$ & $b = \sin \Phi$, prenant $c = 1$, de sorte que $bc = 0$; & on aura cette transformation remarquable:

$$(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^{m+n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - n\Phi} (\cos m(2\lambda\pi + \Phi) + \sqrt{-1} \sin m(2\lambda\pi + \Phi))$$

& si $m = 0$, cette formule sera réelle

$$(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - n\Phi}.$$

SCHOLIE.

§. 99. Nous voyons donc par là, que toutes les quantités imaginaires, qui tirent leur origine non seulement des opérations algébriques, mais aussi celles qui naissent de l'élevation à des exposans quelconques, & même imaginaires, sont toujours réducibles à la forme générale $M + N\sqrt{-1}$. Et on comprend de là aussi, que si les exposans étoient eux-mêmes de telles puissances à exposans imaginaires, la valeur de toute la formule seroit néanmoins comprise dans la forme $M + N\sqrt{-1}$. Car il est clair, si α, ξ, γ , marquent des quantités ima-

ginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, la quantité dérivée $\alpha^{\xi\gamma}$ y seroit aussi toujours comprise, puisque l'exposant $\xi\gamma$ est réductible à cette forme.

Probleme IV.

§. 100. *Un nombre imaginaire quelconque étant proposé, trouver son logarithme hyperbolique.*

SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, dont il faut chercher le logarithme, qui soit $= x + y\sqrt{-1}$; de sorte qu'il y ait:

$$1(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

Prenant

Prenant les différentiels on aura :

$$\frac{ada + bdb}{aa + bb} + \frac{(adb - bda)V - 1}{aa + bb} = dx + dyV - 1$$

Soit encore $V(aa + bb) = c$, & l'angle Φ tel, qu'il soit $\cos \Phi = \frac{a}{c}$ & $\sin \Phi = \frac{b}{c}$; & par l'intégration on trouvera: $x = lV(aa + bb) = lc$ & $y = A \operatorname{tang} \frac{b}{a} = \Phi$. Donc nous aurons :

$$l(a + bV - 1) = lV(aa + bb) + V - 1. A \cos \frac{a}{V(aa + bb)}$$

$$\text{ou } l(a + bV - 1) = lV(aa + bb) + V - 1. A \sin \frac{b}{V(aa + bb)}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 101. Puisqu'il y a une infinité d'angles, auxquels répond le même sinus $\frac{b}{V(aa + bb)}$ & cosinus $\frac{a}{V(aa + bb)}$, chaque nombre tant réel qu'imaginaire a une infinité de logarithmes, dont tous sont imaginaires à l'exception d'un seul lorsque $b = 0$, & a un nombre positif.

COROLL. II.

§. 102. Si nous posons $V(aa + bb) = c$, & l'angle trouvé $= \Phi$, à cause de $a = c \cos \Phi$ & $b = c \sin \Phi$, il sera $lc(\cos \Phi + V - 1. \sin \Phi) = lc + \Phi V - 1$; où au lieu de Φ il est permis de mettre $\pm 2\pi + \Phi$; $\pm 4\pi + \Phi$; $\pm 6\pi + \Phi$ &c. le caractère π marquant la somme de deux angles droits. On aura donc $l(\cos \Phi + V - 1. \sin \Phi) = \Phi V - 1$.

Probleme. V.

§. 103. Un logarithme imaginaire étant donné, trouver le nombre qui lui conviendra.



SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ le logarithme imaginaire proposé, & $x + y\sqrt{-1}$ le nombre qui lui convient, de sorte que

$$l(x + y\sqrt{-1}) = a + b\sqrt{-1}$$

Comparant cette équation avec celle, que nous venons de déduire dans l'article précédent:

$$lc(\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi) = lc + \phi\sqrt{-1}$$

nous aurons $\phi = b$, & $lc = a$, donc $c = e^a$, supposant $le = 1$. D'où nous tirerons $x = e^a \cos b$ & $y = e^a \sin b$. Par conséquent le nombre, qui répond au logarithme $a + b\sqrt{-1}$, sera $= e^a (\cos b + \sqrt{-1} \sin b)$.
C. Q. F. Tr.

COROLL. I.

§. 104. Toutes les fois donc que b est ou zero, ou égale à $+\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, &c. ou bien en général $b = \pm \lambda\pi$, le nombre qui répond au logarithme $a + b\sqrt{-1}$ sera réel & $= \pm e^a$. Il sera positif, si λ est un nombre pair, & négatif, si λ est impair.

COROLL. II.

§. 105. On voit aussi, qu'il n'y a qu'un seul nombre, qui convient à un logarithme proposé; & que toutes les fois que le logarithme est réel, le nombre sera aussi réel. Mais qu'il y a aussi des cas, où quoique le logarithme soit imaginaire, le nombre est pourtant réel. Mais ayant déjà suffisamment exposé cette matière ailleurs, je passe aux quantités imaginaires, qui renferment des angles, ou leurs sinus, cosinus, & tangentes.

Probleme. VI.

§. 106. Un angle, ou arc de cercle imaginaire quelconque, étant proposé, trouver son sinus & cosinus, & tangente.

SOLU-



- SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ l'angle proposé, qui étant composé de deux parties, l'une réelle a , & l'autre imaginaire $b\sqrt{-1}$, nous n'avons qu'à chercher le sinus & le cosinus de cet arc imaginaire. Or les séries connues nous donnent :

$$\text{cof. } b\sqrt{-1} = 1 + \frac{bb}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \&c. = \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

$$\text{sin. } b\sqrt{-1} = b\sqrt{-1} + \frac{b^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{b^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} + \&c. = \frac{e^b - e^{-b}}{2} \sqrt{-1}$$

& de là nous tirerons :

$$\text{sin } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) \text{sin } a + \frac{\sqrt{-1}}{2} (e^b - e^{-b}) \text{cof } a$$

$$\text{cof } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) \text{cof } a - \frac{\sqrt{-1}}{2} (e^b - e^{-b}) \text{sin } a :$$

donc la tangente sera :

$$\text{tang } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{(e^b + e^{-b}) \text{tang } a + (e^b - e^{-b}) \sqrt{-1}}{(e^b + e^{-b}) - (e^b - e^{-b}) \text{tang } a \cdot \sqrt{-1}} \text{ ou bien}$$

$$\text{tang } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{(e^{2b} + 1) \text{tang } a + (e^{2b} - 1) \sqrt{-1}}{e^{2b} + 1 - (e^{2b} - 1) \text{tang } a \cdot \sqrt{-1}}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 107. Puisque dans l'expression de la tangente, tant le numérateur que le dénominateur sont imaginaires, si l'on en délivre le dénominateur, on aura :

$$\text{tang } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b} \text{sin } 2a + (e^{4b} - 1) \sqrt{-1}}{e^{4b} + 2e^{2b} \text{cof } 2a + 1}$$

COROLL.



COROLL. II.

§. 108. Le sinus de l'angle $a + b\sqrt{-1}$ devient réel non seulement dans le cas $b = 0$, où l'angle même est réel, mais aussi dans les cas, où $\cos a = 0$, ce qui arrive, lorsque posant ρ pour la marque d'un angle droit, il est $a = (2\lambda - 1)\rho$, où λ signifie un nombre entier ou négatif. Car alors il sera :

$$\sin((2\lambda - 1)\rho + b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$$

où le signe $+$ a lieu, si λ est un nombre impair, & le signe $-$, si λ est un nombre pair.

COROLL. III.

§. 109. De même le cosinus de l'angle $a + b\sqrt{-1}$ sera réel non seulement lorsque $b = 0$, mais aussi lorsque $\sin a = 0$, ce qui arrive si $a = 2\lambda\rho$, & alors on aura $\cos(2\lambda\rho + b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$, où le signe supérieur $+$ a lieu, si λ est un nombre pair, & l'inférieur $-$, si λ est un nombre impair.

COROLL. IV.

§. 110. Pour la tangente de l'angle $a + b\sqrt{-1}$, elle ne sauroit jamais devenir réelle, à moins qu'il ne fût $b = 0$, ou l'angle même réel.

COROLL. V.

§. 111. Les formules trouvées fournissent encore, en donnant à $\sqrt{-1}$ ses deux signes $+$ & $-$, qui lui conviennent également, les formules suivantes, qu'il sera à propos de remarquer :

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) + \sin(a - b\sqrt{-1}) = (e^b + e^{-b}) \sin a$$

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) - \sin(a - b\sqrt{-1}) = (e^b - e^{-b}) \sqrt{-1} \cos a$$

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) + \cos(a - b\sqrt{-1}) = (e^b + e^{-b}) \cos a$$

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) - \cos(a - b\sqrt{-1}) = (e^b - e^{-b}) \sqrt{-1} \sin a.$$

Proble-



Probleme VII.

§. 112. *Le sinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le sinus total, de sorte que l'angle soit imaginaire, trouver la valeur de cet angle.*

SOLUTION.

Il y a ici deux cas, selon que ce sinus donné est positif ou négatif :

I. Soit donc premierement le sinus positif $= p$ & $p > 1$ prenant toujours l'unité pour le sinus total, & soit l'angle imaginaire qui répond à ce sinus $= a + b \sqrt{-1}$, & pour que le sinus soit réel, il faut qu'il soit $a = (2\lambda - 1)\varrho$, prenant ϱ pour la marque d'un angle droit, & puisque selon le §. 108.

$$\sin((2\lambda - 1)\varrho + b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) = p$$

il faut qu'il soit λ un nombre impair. Soit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & nous aurons :

$$\sin((4\mu + 1)\varrho + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) = p$$

cette équation étant toujours possible, on en tirera

$$e^b = p \pm \sqrt{pp - 1} \quad \& \quad b = 1(p \pm \sqrt{pp - 1})$$

donc l'angle cherché qui répond au sinus p fera

$$(4\mu + 1)\varrho + \sqrt{-1} \cdot 1(p \pm \sqrt{pp - 1})$$

II. Soit le sinus proposé négatif $= -p$ & $p > 1$, & il faut que λ soit un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$, & il sera :

$$\sin((4\mu - 1)\varrho + b\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) = -p$$

D'où l'on tire comme dans le cas précédent

$$e^b = p \pm \sqrt{pp - 1} \quad \& \quad b = 1(p + \sqrt{pp - 1})$$



Donc l'angle qui répond au sinus négatif $-p$ sera :

$$(4\mu - 1)\varrho \pm \sqrt{-1}. \quad l(p \pm \sqrt{pp - 1}). \quad \text{C. Q. F. T.}$$

Probleme VIII.

§. 113. *Le cosinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le sinus total = 1, trouver l'angle imaginaire qui répond à ce cosinus.*

SOLUTION.

Soit $p > 1$, & que le cosinus proposé soit $= +p$. L'angle répondant soit $= a + b\sqrt{-1}$ & par §. 109 il est clair qu'il doit être $a = 2\lambda\varrho$, pour qu'il soit

$$\text{cof}(2\lambda\varrho + b\sqrt{-1}) = \pm \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p$$

donc il faut qu'il soit λ un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$ & nous aurons :

$$\text{cof}(4\mu\varrho + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) = p:$$

d'où l'on tire $e^b = p + \sqrt{pp - 1}$ & $b = l(p \pm \sqrt{pp - 1})$ & partant au cosinus positif p répond l'angle

$$4\mu\varrho \pm \sqrt{-1}. \quad l(p \pm \sqrt{pp - 1}).$$

Si le cosinus donné est négatif $= -p$, de sorte que $p > 1$, il faut prendre pour λ un nombre impair, soit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & l'angle ou l'arc, qui répond au cosinus négatif $-p$, sera

$$(4\mu + 2)\varrho \pm \sqrt{-1}. \quad l(p \pm \sqrt{pp - 1}). \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

§. 114. Il est indifférent de prendre $p + \sqrt{pp - 1}$ ou $p - \sqrt{pp - 1}$, l'un & l'autre étant une quantité positive. On n'a qu'à remarquer que $l(p + \sqrt{pp - 1}) = -l(p - \sqrt{pp - 1})$, de sorte que cette ambiguïté réjaillit sur celle, qui est essentielle à $\sqrt{-1}$.

Proble-



Probleme IX.

§. 114. *Le sinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur de l'angle ou l'arc imaginaire, qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ le sinus imaginaire proposé, & que l'angle cherché soit $= a + b\sqrt{-1}$, de sorte qu'il doit être

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Maintenant comparons cette forme $p + q\sqrt{-1}$ avec celle qui a été trouvée dans le probleme 6^{me}, & on aura

$$p = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) \sin a \quad \& \quad q = \frac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \cos a$$

& de là on tirera :

$$p \cos a + q \sin a = e^b \sin a \cos a \quad \text{ou bien}$$

$$e^b = \frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a} \quad \& \quad e^{-b} = \frac{p}{\sin a} - \frac{q}{\cos a}$$

Or puisque $e^b e^{-b} = 1$ nous obtiendrons :

$$pp \cos a^2 - qq \sin a^2 = \sin a^2 \cos a^2 \quad \text{ou bien}$$

$$pp - (pp + qq) \sin a^2 = \sin a^2 - \sin a^4, \text{ d'où nous tirons}$$

$$\sin a^2 = \frac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp} \quad \&$$

$$\sin a = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2p + pp + qq) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2p + pp + qq)}} \quad \&$$

$$\cos a^2 = \frac{1}{2}(1 - pp - qq) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp}.$$

Mais puisque $\cos 2a = 2 \cos a^2 - 1$, il fera

$$\cos 2a = -pp - qq + \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$$

cette expression étant toujours réelle & moindre que l'unité, l'angle $2a$

& partant aussi a fera réel, & on en trouvera $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$

& $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$. Or ces quantités étant trouvées avec



l'angle a , on aura $b = l \left(\frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a} \right)$, & l'angle qui répond au sinus $p + q \sqrt{-1}$ fera $a + b \sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

§. 115. Si le sinus proposé est simplement imaginaire ou $= q \sqrt{-1}$ de sorte que $p = 0$, & il est clair qu'il doit être $\sin a = 0$, & partant $a = 2\lambda \rho$; où ρ marque l'angle droit & λ un nombre entier quelconque: donc il sera $q = \pm \frac{1}{2} (e^b - e^{-b})$ selon que λ est un nombre pair ou impair. Il fera donc $e^b = \pm q \pm \sqrt{(qq + 1)}$, & partant on pourra toujours rendre cette quantité positive, d'où l'on aura

$b = l(\sqrt{(qq + 1)} \pm q)$, où le signe $+$ a lieu si λ est un nombre pair, & le $-$ si λ est impair. Ainsi l'arc qui répond au sinus $q \sqrt{-1}$ fera

$$\text{ou } 4\mu \rho + \sqrt{-1} \cdot l(\sqrt{(qq + 1)} + q)$$

$$\text{ou } (4\mu + 2) \rho + \sqrt{-1} \cdot l(\sqrt{(qq + 1)} - q).$$

Probleme X.

§. 116. *Le cosinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur imaginaire de l'arc ou l'angle qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q \sqrt{-1}$ le cosinus imaginaire proposé, & $a + b \sqrt{-1}$ l'arc cherché qui lui répond: de sorte que

$$\cos(a + b \sqrt{-1}) = p + q \sqrt{-1}.$$

Or si nous rapportons cette égalité avec l'article 106 nous aurons:

$$p = \frac{1}{2} (e^b + e^{-b}) \cos a \quad \& \quad q = -\frac{1}{2} (e^b - e^{-b}) \sin a$$

d'où nous obtiendrons:

$$e^b = \frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a} \quad \& \quad e^{-b} = \frac{p}{\cos a} + \frac{q}{\sin a}$$

&



& $\cos a^2 = \frac{1}{2} (1 + pp + qq) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (1 + pp + qq)^2 - pp}$
 donc $\cos 2a = pp + qq - \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$
 qui est aussi toujours réelle & moindre que le sinus total, de là on aura
 $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$ & $\cos b = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$, & ayant déterminé l'angle a même, à cause de $b = l \left(\frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a} \right)$, l'angle ou l'arc qui répond au cosinus imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ sera $= a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. Tr.

COROLLAIRE.

§. 117. Si $p = 0$, de sorte que le cosinus proposé est $= q\sqrt{-1}$, on aura $\cos a = 0$, & partant $a = (2\lambda - 1)\rho$, d'où l'on tire $q = -\frac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \pm 1$, où le signe supérieur vaut, si λ est un nombre impair, & l'inférieur si pair. On aura donc

$e^{2b} = \mp 2c^b q + 1$, & $e^b = \mp q + \sqrt{(qq + 1)}$, & $b = l(\sqrt{(qq + 1)} \mp q)$
 & l'arc qui répond au cosinus $q\sqrt{-1}$ fera

$$\text{ou } (4\mu + 1)\rho + \sqrt{-1}.l(\sqrt{(1 + qq)} - q)$$

$$\text{ou } (4\mu + 3)\rho + \sqrt{-1}.l(\sqrt{(1 + qq)} + q)$$

SCHOLIE.

§. 118. Ayant trouvé la valeur de $\cos 2a$, si l'on en cherche les valeurs $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$ & $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$, on les peut prendre, ou affirmatives, ou negatives. Pour faire le choix, il faut regarder aux quantités p & q , si elles sont positives ou negatives, & donner ensuite aux $\sin a$ & $\cos a$ les signes, qui rendent les valeurs de e^b & de e^{-b} positives, tant dans ce problème que dans le précédent; or dans chaque cas ce choix est aisé à faire, de sorte qu'on est toujours le maître de trouver des valeurs réelles pour les lettres a & b .



Probleme XI.

§. 119. Une tangente imaginaire étant donnée, trouver la valeur imaginaire de l'angle ou de l'arc, qui lui repond.

SOLUTION.

Soit $p + q \sqrt{-1}$ la tangente imaginaire donnée, & $a + b \sqrt{-1}$ l'arc, qui convient à cette tangente, de sorte que

$$\text{tang}(a + b \sqrt{-1}) = p + q \sqrt{-1}.$$

Or nous avons trouvé cy-dessus §. 107.

$$\text{tang}(a + b \sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b} \sin 2a + (e^{4b} - 1) \sqrt{-1}}{e^{4b} + 2e^{2b} \text{cof } 2a + 1}$$

donc il faut qu'il soit,

$$p = \frac{2e^{2b} \sin 2a}{e^{4b} + 2e^{2b} \text{cof } 2a + 1} \quad \& \quad q = \frac{e^{4b} - 1}{e^{4b} + 2e^{2b} \text{cof } 2a + 1}$$

de là nous tirons ces deux équations

$$e^{4b} p + 2e^{2b} (p \text{cof } 2a - \sin 2a) + p = 0$$

$$e^{4b} (q - 1) + 2e^{2b} q \text{cof } 2a + q + 1 = 0$$

& par élimination.

$$e^{2b} = \frac{-p}{p \text{cof } 2a + (q-1) \sin 2a} = \frac{-p \text{cof } 2a + (q+1) \sin 2a}{p}$$

Donc nous aurons:

$$0 = pp(1 - \text{cof } 2a^2) + 2p \sin 2a \text{cof } 2a + (qq - 1) \sin 2a^2 \text{ ou bien}$$

$$0 = pp \sin 2a + 2p \text{cof } 2a + (qq - 1) \sin 2a$$

Par conséquent on aura

$$\text{tang } 2a = \frac{2p}{1 - pp - qq} \quad \& \quad \text{partant}$$

$$\sin 2a = \frac{2p}{\sqrt{(4pp + (1 - pp - qq)^2)}} \quad \& \quad \text{cof } 2a = \frac{1 - pp - qq}{\sqrt{(4pp + (1 - pp - qq)^2)}}$$

donc



$$\text{donc } e^{2b} = \frac{pp + (1 + q)^2}{\sqrt{(4pp + (1 - pp - qq)^2)}}$$

$$\& b = \frac{1}{2} l(pp + (1 + q)^2) - \frac{1}{4} l(4pp + (1 - pp - qq)^2)$$

Ayant donc trouvé par ces formules tant la valeur de b , que celle de l'angle $2a$ ou a , l'angle ou l'arc, qui répond à la tangente imaginaire $p + q \sqrt{-1}$ fera $= a + b \sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 120. Puisque $4pp + (1 - pp - qq)^2 = (pp + (q + 1)^2)(pp + (q - 1)^2)$ il fera :

$$e^{4b} = \frac{pp + (q + 1)^2}{pp + (q - 1)^2} \quad \& \text{ partant } b = \frac{1}{4} l \frac{pp + (q + 1)^2}{pp + (q - 1)^2}$$

Or l'angle a se détermine le plus commodément de la formule de la tangente : $\text{tang } 2a = \frac{2p}{1 - pp - qq}$, d'où l'on voit, que les valeurs de a & b seront toujours réelles.

COROLL. II.

§. 121. Si $p = 0$, ou qu'on veuille chercher l'angle dont la tangente $= q \sqrt{-1}$, il fera $\text{tang } 2a = 0$, donc $2a = 2\lambda\rho$, & $a = \lambda\rho$,

& $b = \frac{1}{4} l \frac{(q + 1)^2}{(q - 1)^2}$. Par conséquent à la tangente $q \sqrt{-1}$ ré-

pondent les arcs $\lambda\rho + \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{(q + 1)^2}{(q - 1)^2}$ où $\lambda\rho$ marque un multiple quelconque de l'angle droit.

COROLL. III.

§. 122. Ici les cas où $q + 1 = 0$, ou $q - 1 = 0$, exigent une réduction particulière, qu'il faut faire, avant que de poser $p = 0$. Soit donc $qq - 1 = 0$, ou la tangente proposée $= p \pm \sqrt{-1}$, & on aura

tang



tang $2a = \frac{-2}{p}$, & $e^{4b} = \frac{pp + 2 \pm 2}{pp + 2 \mp 2}$; c'est à dire pour le

signe superieur $e^{4b} = \frac{pp + 4}{pp}$ & pour l'inferieur $e^{4b} = \frac{pp}{pp + 4}$.

Maintenant si $p = 0$, il sera $2a = (2\lambda + 1)\rho$ à cause de tang $2a = \infty$, & $b = \pm \infty$. Donc à la tangente $\pm \sqrt{-1}$ répond l'angle $= (\lambda + \frac{1}{2})\rho \pm \infty \sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 123. Lorsque $pp = 1 - qq$ ou $p = \sqrt{1 - qq}$, il sera tang $2a = \infty$ & $2a = (2\lambda + 1)\rho$: ou $a = (\lambda + \frac{1}{2})\rho$. Ensuite il sera $b = \frac{1}{4} \log \frac{1+q}{1-q}$. De sorte qu'à la tangente $\sqrt{1 - qq}$

$\pm q \sqrt{-1}$ repond l'arc $= (\lambda + \frac{1}{2})\rho \pm \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1+q}{1-q}$.

SCHOLIE.

§. 124, Puisque donc toutes ces quantités imaginaires, qui sont formées par des opérations transcendentes sont aussi comprises dans la forme générale $M + N \sqrt{-1}$, nous pourrons soutenir sans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puissent être, sont toujours réduçibles à la forme $M + N \sqrt{-1}$; ou qu'elles sont toujours composées de deux membres, donc l'un est réel, & l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.

