SUR LE FROTTEMENT
DES CORPS SOLIDES,
PAR M. EULER.

I.

ON a remarqué, que dans la pluſpart des machines le frottement eſt ſi conſiderable, qu'une bonne partie des forces, qui ſont requiſes pour mettre la machine en mouvement, n'eſt employée qu'à ſurmonter cette réſiſtance: de ſorte que s'il étoit poſſible de délivrer les machines du frottement, une beaucoup plus petite quantité de forces ſeroit ſuffiſante à produire le même effet. Tous les Mecaniciens conviennent auſſi, qu'un des principaux articles, deſquels dépend la derniere perfection des machines, conſiſte dans la diminution du frottement, & c'eſt dans cette vuë, qu'ils ont taché depuis longtems de rechercher la nature & la quantité du frottement, pour en découvrir les moyens de le diminuer, ou de le faire evanouïr tout à fait, s'il étoit poſſible.

II. Le frottement ſe manifeſte toutes les fois, qu'un corps doit gliſſer ſur la ſurface d'un autre corps; car quelque polies, que ſoient les ſurfaces des corps qui gliſſent les uns ſur les autres, le mouvement y rencontre toujours quelque réſiſtance, qui le détruit bientôt entierement, à moins qu'il ne ſoit renouvellé par l'action réiterée de nou-

velles

velles forces. Cependant il n'y a aucun doute, que le frottement ne devienne d'autant plus petit, plus les surfaces des corps, qui glissent les uns sur les autres, seront polies & unies, afin qu'il ne se trouve plus de petites inégalités, qui puissent arreter le mouvement. C'est par cette raison, que les traineaux glissent assez aisément sur la glace; & que dans les machines on éprouve une diminution considerable du frottement, en enduisant de la graisse les surfaces, qui se frottent mutuellement; puisque la graisse sert à rendre ces surfaces plus égales & plus unies.

III. Cependant les matieres, dont on se sert dans la construction des Machines, comme les bois, & les metaux, ne sont pas susceptibles d'un tel degré de polissure, que le frottement ne soit pas encore trés considerable: & l'experience a fait voir, que la résistance, dont toutes ces matieres s'opposent au mouvement, est presque la même, & égale à une partie fort considerable de leur poids entier. Mr. *Amontons* soutint, que le frottement étoit toujours égal au tiers du poids d'un corps, qui se mouvoit sur une surface horizontale, ou généralement au tiers de la force, dont le corps étoit pressé contre la surface, sur laquelle il glissoit. D'autres ont trouvé la quantité du frottement un peu differente, & Mr. *Bilfinger* ne donne au frottement que la quatriéme partie de la presion. Comme cela dépend du degré de polissure, qu'ont les surfaces des corps, il n'est pas surprenant, que les experiences ne donnent pas toujours la même quantité de frottement.

IV. Mais une circonstance bien remarquable, dont tous ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, sont d'accord; c'est que la quantité du frottement dépend uniquement du poids, ou de la force, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il est entrainé; & que ni la figure du corps, ni la grandeur de sa base, n'entrent en aucune maniere dans la détermination du frottement. Car si le frottement étoit causé par l'arrachement des petits filets, ou par l'enfoncement des petites prominences, qui se trouvent sur les surfaces, qui glissent l'une sur l'autre, on devroit penser, que plus les surfaces, qui se touchent seroient larges, le frottement en devroit devenir plus

 grand.

grand. Peut-être même, que cette circonſtance contribuë quelque choſe, en des matieres fileuſes, & d'autres d'une ſemblable nature; mais dans les bois & metaux, dont on a fait principalement les experiences, on doit convenir que la largeur de la baſe ne ſert, ni à augmenter, ni à diminuer le frottement.

Fig. 1. V. Donc ſi un corps ABCD eſt preſſé contre la ſurface MN par une force quelconque GP, qui ſoit $=$ P, ſoit que ce ſoit le poids du corps ABCD, ſi la ſurface MN eſt horizontale, ou qu'il y ait encore une autre force, dont le corps ſoit pouſſé à la ſurface; dans ce cas il faut une certaine force EF, avant qu'on ſoit en état de remuer ce corps, & de le tirer ſuivant la direction BN. On ſait, que s'il n'y avoit point de frottement, la moindre force EF ſeroit capable de mettre ce corps en mouvement. Mais ſi le frottement eſt égal à un tiers de la force P, ou que nous le poſions $= \frac{m}{n}$ P, pour ne nous pas borner à une hypotheſe, qui pourroit être trop particuliere; alors tant que la force EF ſera plus petite que $\frac{m}{n}$ P, le corps demeurera en repos, de même que s'il n'étoit ſollicité d'aucune force. Or dés qu'on employera une force EF plus grande que $\frac{m}{n}$ P, le corps ſera actuellement entrainé ſelon la direction BN; mais le mouvement ne ſera produit, que par l'excés de la force EF ſur le frottement $\frac{m}{n}$ P.

VI. Le frottement doit donc être regardé comme une force $= \frac{m}{n}$ P, dont le corps eſt tiré en arriére ſelon la direction AM, qui eſt toujours contraire à celle du mouvement du corps, & paſſe par l'attouchement AB. Or elle eſt bien differente des autres forces réelles, qui peuvent agir ſur le corps; car elle ne produit aucun effet, que lorsque le corps ſe trouve actuellement en mouvement, & ce n'eſt qu'alors, qu'elle fait le même effet, que ſi le corps ABCD étoit effe-

ctivement

ctivement sollicité en arriere selon la direction AM. Tant que le corps est en repos, & qu'il n'est tiré que par des forces moindres que le frottement, tout son effet ne consiste qu'en détruisant celui que ces forces devroient produire elles mêmes. Ainsi nommant la force $EF = F$, le corps n'en recevra aucun mouvement, à moins que F ne surpasse la valeur du frottement $\frac{m}{n} P$; mais dés que $F > \frac{m}{n} P$ le corps recevra une acceleration, qui convient à l'excés $F - \frac{m}{n} P$; & il ne s'ensuit pas, que si $F < \frac{m}{n} P$, l'acceleration devienne negative.

VII. Cela paroitra d'abord fort étrange, & contraire à la loi de continuité, de sorte que la nature semble faire ici un saut, ce qui n'arrive jamais dans l'action des autres forces. Cependant on peut se representer l'action du frottement, d'une maniere, qui levera tous les doutes, & qui sera conforme à l'action des autres forces: car je ferai voir, qu'on pourra produire par la seule action de la gravité un effet tout à fait semblable à celui du frottement, par lequel on pourroit même découvrir la nature du frottement, quand même elle ne seroit pas encore connuë par l'experience. Cette consideration servira aussi à faire voir, en quoi consiste la veritable cause du frottement, & d'où vient cette résistance, qu'il oppose au mouvement. Car quoique peut-être la veritable cause du frottement ne convienne pas precisement avec celle que je vai répresenter, la parfaite ressemblance qu'on y remarquera, ne laissera aucun doute sur la possibilité des effets, qui paroissent si étranges.

VIII. Sur la ligne horizontale MN soient *a*G, *b*G, deux plans également inclinés, qui forment en G l'angle *a*G*b*, dans lequel soit enfoncé le corps ABCD avec sa base pointuë AGB, dont l'angle AGB soit precisement égal à *a* G *b*. Dans cette situation le corps ABCD sera non seulement en équilibre, mais aussi une petite force EF, qui lui est appliquée horizontalement ne sera pas capable de le

 mettre

mettre en mouvement, quoique les faces, dont ce corps touche les plans inclinés soient parfaitement polies, & qu'aucun frottement n'y ait lieu. Car pour que la force QF puisse mouvoir le corps ABCD, il faut qu'elle le fasse monter sur le plan incliné Gb, & partant elle doit être plus grande que la partie du poids du corps, laquelle le sollicite dans la direction contraire GQ. Ainsi ce corps ABCD se trouve dans un état fort semblable à celui du frottement, puisque la force EF n'est pas capable de le mouvoir, tandis qu'elle est moindre que le degré requis pour vaincre la pente du plan incliné.

IX. La ressemblance paroitra encore davantage, si nous déterminons la quantité de la force EF, qui est requise pour mettre le corps en mouvement. Soit pour cet effet l'angle $MGa = NGb = \alpha$, le poids du corps $ABCD = P$, dont il est sollicité en bas selon la direction verticale GP; & la force $EF = F$, qui tire le corps suivant la direction horizontale EF. Puisque le corps ne peut être mis en mouvement, que selon la direction Gb, je décompose la force $EF = F$ suivant la direction EH parallele à Gb, & FH qui y est normale: l'angle FEH étant $= NGb = \alpha$, la force EH sera $= F \cos \alpha$, & ce n'est que celle-cy qui est employée à mettre le corps en mouvement. Or dés que le mouvement va commencer, le poids du corps, ou la force $GP = P$ s'y oppose par sa partie GQ, qui résulte de la résolution suivant les directions GQ & PQ, dont celle-cy est perpendiculaire à GQ. Donc l'angle GPQ étant $= \alpha$, la force GQ sera $= P \sin \alpha$: d'où l'on voit que le corps ne pourra être mis en mouvement, que la force $F \cos \alpha$ ne soit pas plus grande que $P \sin \alpha$.

X. Donc tant qu'il sera $F \cos \alpha < P \sin \alpha$, le corps ABCD restera en repos, & ne recevra aucun mouvement de l'action de la force $EF = F$. Or si $F \cos \alpha = P \sin \alpha$ ou $F = P \tang \alpha$, le corps sera, pour ainsi dire, en équilibre, ou tout prêt à se mouvoir, dés que la force F devient tant soit peu plus grande que $P \tang \alpha$: & quand cela arrive que $F > P \tang \alpha$, l'acceleration du corps suivant la direction Gb sera produite par l'excés de la force $EH = F \cos \alpha$ sur $P \sin \alpha$, c'est à dire par $F \cos \alpha - P \sin \alpha$. Par conséquent la résistan-

ce,

ce, qu'il faut vaincre dans ce cas, avant que le corps puiſſe être remué, ſera $= P \sin \alpha$, laquelle étant égale à une partie du poids du corps, & ne dépendant nullement de la largeur de la baſe A G B, dont ce corps touche la ſurface *a* G *b*, il en paroit une aſſez parfaite resſemblance entre ce cas, & celui du frottement; & pour rendre ces cas égaux, on n'a qu'à faire $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, dans l'hypotheſe d'*Amontons* ou les angles M G *a*, & N G *b* $= 19°, 29'$: or dans l'hypotheſe de Mr. *Bilfinger* ces angles ſeront $= 14°, 28'$, à cauſe de $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

XI. Il en ſera de même, ſi la baſe A B du corps A B C D eſt formée de pluſieurs angles obtus A *c d c d c d c* B, tous ſemblables à celui A G B, que nous venons de conſiderer, & que la ſurface M N ſoit taillée d'une maniere ſemblable, en ſorte que les inegalités de la baſe & de la ſurface ſoient parfaitement d'accord. Car dans ce cas, ſi chacun des angles, que conſtituënt les plans inclinés *c d* avec la ligne horizontale M N, eſt $= \alpha$, le corps A B C D, dont le poids eſt $= P$, ne ſera remué par la force horizontale E F $= F$, qu'il n'y ſoit $F \cos \alpha > P \sin \alpha$, ou $F > P \operatorname{tang} \alpha$: & tant que la force F ſera moindre que $P \operatorname{tang} \alpha$, le corps reſtera en repos. On voit bien, que la même choſe arrivera, quelque grand que ſoit le nombre des prominences *d*, *d*, &c. & il n'eſt pas même néceſſaire, que toutes les inclinaiſons ſoient égales entr'elles, pourvu qu'il ne s'y trouve de plus grandes que l'angle α; car quand même il y auroit quelques angles moindres, ceux-cy ne faciliteroient point le mouvement. Fig. 5.

XII. Si c'etoit le cas du frottement, comme il paroit fort probable, on comprendroit aiſément les phénomenes du frottement, que j'ai rapportés cy deſſus, & qui regardent la difficulté de mettre un corps en mouvement. Car cette difficulté ne conſiſteroit qu'en ce que, pour mouvoir le corps, il faudroit qu'il montât effectivement ſur un plan incliné. De là on voit que dés que le corps a commencé de ſe mouvoir, comme ces plans inclinés *d c*, *d c* &c. ſont extrémement petits, ce corps montera & deſcendra alternativement; & partant puiſque les descentes ſe ſont d'elles mêmes, pendant que le corps ſe meut, la difficulté du frottement ne ſe fait ſentir que par intervalles, c'eſt à dire, dans les momens où le corps eſt obligé de monter. D'où il

paroit

paroit, qu'on peut tirer cette conséquence; que pendant que le corps est actuellement en mouvement, l'effet du frottement ne sera que la moitié de celui qu'on éprouve, avant qu'on puisse mettre en mouvement le corps.

XIII. Donc afin que la force $EF = F$ puisse imprimer au corps ABCD un mouvement, elle doit être plus grande que P tang α, mais dés que le corps se meut, la résistance du frottement sera diminuée à demi. Par consequent pour calculer l'acceleration du corps, on ne doit diminuer la force sollicitante, que de $\frac{1}{2} P \sin \alpha$, de sorte que l'acceleration sera proportionelle à $F \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha$, ou peut-être à $F - \frac{1}{2} P$ tang α, puisque dans les descentes alternatives, l'acceleration est augmentée par la gravité. Ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, se sont bornés uniquement à en découvrir la quantité avant que les corps fussent mis en mouvement. Il seroit donc fort à souhaiter, qu'on fit aussi des experiences, d'où l'on puisse conclure la quantité du frottement pendant que les corps sont en mouvement: & je ne doute presque pas, qu'on ne la trouveroit considerablement moindre: puisqu'on sait, que pour mettre en mouvement une machine, il faut que les premiers efforts soient plus grands, que ceux qu'on empoye dans la suite pour continuer le mouvement.

Fig. 4. XIV. On se sert ordinairement du plan incliné pour connoitre la quantité du frottement. Ayant mis le corps P sur le plan AB, on éleve succesivement ce plan depuis sa situation horizontale AC, jusqu'à ce que le corps P vient sur le point de descendre: alors on mesure l'angle B de l'inclinaison du plan AB, ou les cotés du triangle rectangle ABC, d'où l'on tirera la valeur de la partie de la pesanteur qui agit selon la direction AB, qui sera $= P \sin B = \frac{AC}{AB} P$, & ce sera à cette force que le frottement du corps P sur le plan AB est égal. Or comme le frottement est proportionnel à la presion, dont le corps P est apprimé au plan, cette presion étant $= P \cos B = \frac{BC}{AC} P$: on apprendra par cette experience que le frottement est à la presion, comme sin

ſin B à coſ B, ou comme A C ò B C: cette raiſon du frottement à la preſsion ſera donc comme la tangente de l'angle B au ſinus total. Ce ſera donc la force du frottement, qu'on doit vaincre, avant que le corps P puiſſe être mis en mouvement.

XV. Mais pour connoitre ſi le frottement, que le corps éprouve pendant qu'il ſe meut actuellement, eſt le même ou non: on pourra determiner la quantité du frottement pour le cas du mouvement, par le moyen du même plan incliné. On n'aura qu'à élever le plan A B un peu plus que dans le cas precedent, afinque le corps gliſſe actuellement ſur ce plan en bas. Soit l'angle de l'inclinaiſon $B = \alpha$; & la preſsion du corps P ſur le plan ſera $= P \cos \alpha$, & la force dont il eſt ſollicité ſuivant la direction A B ſera $= P \sin \alpha$. Suppoſons que dans le mouvement le frottement ſoit à la preſsion comme μ à 1. & le frottement pour le cas que nous conſiderons ſera $= \mu P \cos \alpha$; qui étant retranché de la force acceleratrice $P \sin \alpha$, le corps ſera encore tiré ſelon la direction de ſon mouvement par la force $= P \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

XVI. Que le corps P ait commencé ſon mouvement depuis le repos en P, & qu'il ſoit parvenu aprés un tems $= t$ en M. Soit l'eſpace parcouru $AM = s$, & la viteſſe en M égale à celle, qu'un corps acquiert par la chûte de la hauteur $= v$, & les principes de Mecanique nous fourniſſent cette équation $P\,dv = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)\,ds$ ou en prenant l'integrale $v = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)s$, de là l'element du tems ſera $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)s}}$, dont l'integrale eſt $t = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$. Cette expreſsion, ſi l'on exprime l'eſpace parcouru s en milliemes parties du pieds de Rhin, donnera le tems t exprimé en minutes ſecondes, lorsqu'on diviſe cette expréſsion par 250; de ſorte que ſi le tems t eſt exprimé en ſecondes, & l'eſpace s en milliemes parties du pied de Rhin, on aura cette équation $t = \frac{\sqrt{s}}{125\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$.

XVII. Sup-

XVII. Suppoſons maintenant qu'on ait meſuré exactement le tems, que le corps P amis à deſcendre ſur le plan incliné AB, dont l'angle de l'elevation ſur l'horizon, ou l'angle B ſoit $= \alpha$. Soit la longueur du plan AB $= m$ parties milliemes du pied de Rhin: & le tems de la deſcente par ce plan $= n$ minutes ſécondes: & nous aurons cette équation:

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

ou $15625\,nn\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m$, d'où nous tirerons la valeur de la lettre μ:

$$\mu = \operatorname{tang}\alpha - \frac{m}{15625\,nn\cos\alpha}$$

Donc moyennant une ſeule experience on ſera en état de determiner la raiſon du frottement à la preſsion, qui a été ſuppoſée comme μ à 1 pour le cas du mouvement du corps P.

XVIII. De cette formule il eſt d'abord clair, que ſi l'angle α eſt égal à celui-cy, où le corps P demeure encore en repos, alors la valeur du frottement ſera préciſement la même, qu'on aura trouvée pour le repos. Car puiſque le corps dans ce cas ne reçoit aucun mouvement, il pourra être regardé, comme s'il faloit un tems infini, pour achever ſa deſcente. Dans ce cas donc le tems n deviendra infini, & la formule donnera $\mu = \operatorname{tang}\alpha$, ou bien le frottement ſera à la preſsion comme la tangente de l'angle B au ſinus total, tout comme nous avons trouvé. Mais dés qu'on elevera le plan BA un peu davantage, le corps deſcendra actuellement, & ſi l'on obſerve le tems, qu'il emploie pour parcourir l'eſpace AB, notre formule fera voir la valeur de μ, qui conviendra au mouvement, & qui ſera, à ce qu'il paroit vraiſemblable, plus petite que dans le cas précedent du repos. On s'aſſurera encore mieux ſur cette matiere, ſi on donne au plan AB ſucceſsivement pluſieurs diverſes inclinaiſons, pour voir ſi chacune donnera la même valeur pour μ: car en cas qu'on en obtiendroit des valeurs differentes, on en devroit conclure, que le frottement ne ſeroit

roit pas le même pour tous les degrés de viteſſe, ce qui ne paroit pas pourtant probable.

XIX. En cas que la force du frottement fut plus petite dans le mouvement, que dans le repos, il en réſulteroit un phenomene bien étrange, qui meriteroit toute l'attention poſsible. Pour l'expoſer diſtinctement, ſoit α l'angle B du plan incliné, où le poid P ſe ſoutient encore à peine en repos : deſorte que pour peu qu'on augmente cet angle, le poids deſcendroit actuellement ſur ce plan incliné. Donc pour l'etat du repos la valeur du frottement ſera $\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$: or ſuppoſant, que dés que le corps ſe meut actuellement, le frottement devint plus petit, ſoit pour l'etat du mouvement la valeur du frottement $\mu = \nu \sin\alpha : \cos\alpha$, où ν marque une fraction plus petite que l'unité. A preſent qu'on augmente l'angle B, afin que ce cas du mouvement ait lieu, & ſoit maintenant l'angle B $= \phi$: de ſorte qu'on n'a qu'à écrire dans la formule trouvée cy-deſſus ϕ pour α & $\frac{\nu\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pour μ, pour trouver le tems n'', dans lequel le corps P deſcendra par le plan incliné AB, dont la longeur eſt de m milliemes parties du pied de Rhin, le tems ſera donc: $n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\sin\phi - \nu\sin\alpha\cos\phi : \cos\alpha)}}$. Suppoſons à cette heure que l'angle B $= \phi$ ne ſurpaſſe qu' infiniment peu l'angle de repos α, & on devroit croire ſuivant la loi de continuité que le mouvement du corps ſeroit infiniment lent. Mais nous verrons avec ſurpriſe, que ce mouvement s'acheve ſubitement dans un tems fini, & même aſſez court. Car ſoit $\phi = \alpha + \omega$, où ω marque une quantité infiniment petite, & il ſera $\sin\phi = \sin\alpha + \omega\cos\alpha$, & $\cos\phi = \cos\alpha - \omega\sin\alpha$. Ces valeurs etant ſubſtituées, on aura

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\sin\alpha + \omega\cos\alpha - \nu\sin\alpha + \nu\omega\sin\alpha\tan\alpha)}} = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{m}{(1-\nu)\sin\alpha}}.$$

XX. Pour mieux faire ſentir le phenomene, que cette formule renferme, ſoit la longueur du plan incliné A·B exactement $= 15625$ milliemes parties du pied de Rhin, ou ſoit AB égale à la hauteur, par laquelle un corps tombe dans une féconde : & le tems de la defcente du corps P par ce plan incliné AB fera de $n = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu)} \cdot \sin \alpha}$ fecondes; foit deplus comme Mr. *Bilfinger* a trouvé par fes experiemes $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, & ce tems feroit $n = \frac{2}{\sqrt{(1-\nu)}}$: & fi le frottement devenoit dans le mouvement deux fois moindre, où qu'il fût $\nu = \frac{1}{2}$, ce tems feroit $n = 2\sqrt{2}$ ou presque de 3″. Il ne feroit pas donc posfible de donner à ce plan AB une telle inclinaifon, que le tems de la defcente furpafsât 3″. Car tandis que l'angle B eft $= \alpha$, ou moindre, le corps P ne defcend point du tout; & dés qu'on eleve tant foit peu le plan au delà, la defcente devient fubitement fi rapide que le corps n'emploiera qu'à peu prés 3 fecondes, à parcourir le plan incliné AB de plus de 15 pieds. Or il eft clair, fi l'on éleve le plan davantage, qué le tems de la defcente deviendra encore plus petit. L'experience femble plutot être favorable à ce paradoxe que contraire; car on remarquera aifément, qu'il n'eft pas pofsible de donner à un plan incliné une telle inclinaifon, que la defcente fe fit aufsi lentement, qu'on voudra : car, ou le corps ne defcendra point du tout, ou il defcendra affez vitement. Mais pour mieux rëusfir dans ces experiences, il faut bien prendre garde, que le plan dont on fe fert foit partout également poli, afin que le frottement foit partout le même, car il n'y a aucun doute, que fi le frottement étoit plus grand dans un endroit du plan, que dans un autre, on ne fauroit tirer de l'experien ce aucune conféquence bien affeurée.

SUR