



SUR LA VIBRATION

DES CORDES,

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.



I.

Uoique tout ce que Mrs. *Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à present au sujet du mouvement vibratoire des cordes, semble avoir épuisé la matiere, il y reste néanmoins une double limitation, qui la restreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puisse déterminer le véritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont supposé que les cordes tendues faisoient seulement des vibrations quasi infiniment petites, en sorte que dans ce mouvement, la corde, soit qu'elle ait une situation droite, ou courbe, peut pourtant être censée conserver toujours la même longueur. L'autre limitation consiste, en ce qu'ils ont supposé toutes les vibrations régulières, prétendant que dans chaque vibration la corde entière, & tout à la fois, s'étend directement, & cherchant hors de cette situation sa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A la vérité la première limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mécanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'égard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulières, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'écartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un très court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une manière suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette règle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi. On voit en même tems par là, comment l'état des vibrations suivantes dépend des précédentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'état des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont précédé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulières, il ne sera en aucune manière possible que les précédentes se soient écartées de la règle; d'où résulte aussi évidemment, que si la première vibration a été irrégulière, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tendue par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne diffère cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lâche tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M, d'Alembert s'est attaché le premier, avec un succès des plus heureux, à l'examen de ce Problème, si difficile tant dans la Mécanique que dans l'Analyse, & il en a communiqué à notre Académie une très belle solution. Mais, comme dans ces discussions sublimes on tire souvent un fruit fort considérable de la comparaison de plusieurs solutions différentes du même problème, je ne balance point à proposer celle que j'ai trouvée sur cette question. Quoiqu'elle ne diffère pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étendue de ce sujet fait que je me persuade d'avoir ajouté quelques observations assez intéressantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par proposer le Problème d'une façon bien nette, afin qu'il paroisse quels secours on a besoin de tirer, tant de l'Analyse que de la Mécanique, pour arriver à la solution. Soit donc la corde proposée AB , fixement attachée à ses extrémités A & B , & tendue suivant la direction AF par une force quelconque, comme cela se fait ordinairement dans les Instrumens de Musique. Que cette corde soit partout d'une égale épaisseur, & qu'on appelle

sa longueur $AB = a$

sa masse, ou son poids $= M$

& que la force tendante AF soit égale à un poids $= F$.

Qu'alors on fasse passer cette corde de son état naturel AB à un état de courbure quelconque AL/B , qui pourtant ne différera qu'infinitement peu de l'état naturel droit AB , de manière que la longueur AL/B ne surpasse pas sensiblement la longueur AB ; & que cette figure AL/B donnée d'abord à la corde, soit connue. On demande, en supposant que la corde soit lâchée subitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles seront les vibrations qu'elle fera?

VI. Aussi-tot donc que la corde sera lâchée de son état AL/B , la force tendante la pressera d'abord vers la situation naturelle AB , que tous ses points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conséquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ses points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la

résistan-

Fig. 1.

Fig. 1.

résistance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoître parfaitement en quoi consiste ce mouvement, il suffira d'avoir assigné pour chaque tems l'état de la corde, c'est à dire, sa figure. Car, tandis que d'un côté on définit le changement de figure par la succession instantanée, on détermine en même tems de l'autre la vitesse de chaque point de la corde, & ainsi on parvient à la connoissance de tout le mouvement. Il ne sera donc pas besoin dans cette recherche de faire attention aux vitesses de chacun des points de la corde; ce qui diminuë considérablement la difficulté de cette solution.

VII. Puisque nous avons supposé, que la longueur de la corde ne souffre aucun changement, tandis qu'elle revêt successivement toutes ces figures, en sorte que $AL/B = AB$, il en résulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl , normales à l'axe AB , les arcs AL, Al seront égaux aux abscisses AP, Ap ; & par conséquent les appliquées PL, pl , seront comme infiniment petites à l'égard des abscisses. Par conséquent, si l'on appelle l'abscisse $AP = x$, l'appliquée PL sera infiniment petite en comparaison de x , & l'arc même AL sera $= x$; d'où l'on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverses figures successives, chacun de ses points L se meut perpétuellement selon la direction de l'appliquée LP , en sorte que chaque appliquée LP représente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'état naturel AB : mais alors, à cause du mouvement reçu, suivant la même direction normale à AB , il tendra du côté opposé.

VIII. Après avoir fait ces remarques, posons qu'au bout du tems t la corde soit arrivée à la situation $AMmB$, ayant quitté sa situation primitive AL/B , de sorte que le point L soit parvenu en M . En supposant donc l'abscisse quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM , soit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y fera une fonction des deux variables x & t ; en sorte qu'en posant $t = 0$, la valeur de y fournisse l'appliquée de la courbe primitive ALB . Or il est clair que si l'on connoit la nature de cette fonction de x & t , qui exprime la quantité de l'appliquée y , on

y, on peut par son moyen assigner la figure même de la corde pour un tems quelconque *t*; & de plus on conclura aisément de la mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainsi *y* étant une fonction de *x* & *t*, son différentiel aura une forme telle, $dy = p dx + q dt$, laquelle formule comprend non seulement la variabilité de *y* par la courbe *A MB*, mais encore eu égard au tems qui s'écoule. En effet, si le tems *t* est établi constant, ou $dt = 0$, l'équation $dy = p dx$ exprimera la nature de la courbe *A MB*; mais si l'abscisse *x* est supposée constante, ou $dx = 0$, l'équation $dy = q dt$ définira le mouvement du point *L* pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut assigner pour un tems quelconque *t* écoulé depuis le commencement, le lieu *M*, auquel le point *L* sera parvenu. Or *p* & *q* seront de nouveau des fonctions de *x* & *t*, dont les différentiels, en posant *x* & *t* l'une & l'autre variable, soient,

$$dp = r dx + s dt \quad \& \quad dq = t dx + u dt.$$

Car il est constant par la nature des différentiels, que l'élément *dt* en *dp*, & l'élément *dx* en *dq*, doivent avoir un coefficient commun.

X. Comme il s'agit présentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces sollicitantes, soit la force accélératrice, par laquelle le point *M* de la corde est accéléré vers l'axe *AB = P*, & il est clair que toutes ces forces, par lesquelles chacun des élémens de la corde est pressé vers l'axe *AB*. prises ensemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde est actuellement tendue, & que nous avons posée $AF = F$; ou bien, si nous concevons des forces contraires & égales à *P*, appliquées suivant *ML* dans chacun des points *M* de la corde, alors elles devront se trouver en équilibre avec la force qui tend la corde $AF = F$, & par cette propriété on pourra déterminer la véritable force accélératrice *P*, par laquelle chaque élément *M* de la corde est actuellement sollicité.

XI. La masse, ou le poids de toute la corde étant $= M$, & se distribuant également par toute la longueur *AB*, le poids de la portion *AP*, ou *AM*, sera $= \frac{Mx}{a}$, & par conséquent le petit poids de

l'élément $Mm = dx$ sera $= \frac{M dx}{a}$; lequel étant sollicité suivant ML par la force accélératrice $= P$, la force motrice de cet élément sera $= \frac{M dx}{a} P$, & la somme de toutes les forces motrices par l'arc AM sera $= \frac{M}{a} \int P dx$. Mais parce que le point A est supposé fixe, il est permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui soit appliquée dans la direction AG normale à AB , & assez grande, pour que le point A soit conservé en repos. Ces choses étant posées, la théorie de l'équilibre des forces appliquées à un fil parfaitement flexible, fournira l'équation suivante:

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P dx = 0$$

ou Fy & Gx sont les momens des forces F & G à l'égard du point M , & $\frac{M}{a} \int dx \int P dx$ est la somme de tous les momens des forces élémentaires à l'égard du même point M .

XII. Que l'on considère à présent la courbe AMB , que la corde forme dans ce moment, dont la nature sera exprimée par les formules données ci-dessus, si le tems t est pris constant, ou $dt = 0$, & par conséquent on aura $dy = p dx$, & $dp = r dx$. Par là l'équation que l'état d'équilibre a fait trouver, étant différentiée, & en posant $p dx$, au lieu de dy , donnera divisée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P dx = 0.$$

Qu'on différentie de nouveau cette équation, en posant $r dx$ pour dp , & en divisant par dx , on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = 0$; d'où l'on tire la force accélératrice P du point M suivant la direction MP ,

MP, savoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'est pourquoi si la courbe AMB étoit connue, on pourroit déterminer par sa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Considérons à présent le mouvement du seul point M, par lequel il s'approche de P, étant sollicité par la force accélératrice P, & l'abscisse AP = x doit être censée invariable. Or comme à cause de $dx = 0$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = qdt$ & $dq = udt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit espace = $-qdt$, dont le différentiel en posant l'element du tems dt , constant, sera = $-dqdt = -udt^2 = -ddy$. Mais, de l'accélération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2ddy}{dr^2} = -2u$,

si l'on expose, comme c'est la coutume l'élément du tems dt par l'élément de l'espace appliqué à la vitesse, & que la vitesse elle même soit représentée par la racine quarrée de la hauteur due à cette vitesse.

Ainsi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ aussi bien que $P = -2u$, il en résultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappellées au calcul, renferment toute la Question proposée; & par conséquent, si un tems quelconque t étant écoulé, on pose pour un point quelconque M de la corde l'abscisse AP = x , & l'appliquée PM = y , celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t , telle qu'en posant $dy = pdx + qdt$, le caractère des fonctions p & q se tirera de ces formules

$$dp = rdx + sdt, \quad \& \quad dq = sdx + \frac{F_a}{2M} rdt.$$

La question mecanique proposée se réduit donc à ce problème analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t , telles que

ces formules différentielles $r dx + s dt$, & $s dx + \frac{2M}{Fa} r dt$, deviennent intégrables. Car de semblables fonctions étant trouvées pour r & s , on pourra assigner les valeurs $p = f(r dx + s dt)$ & $q = f(s dx + \frac{Fa}{2M} r dt)$, d'où l'on inférera ensuite la valeur de l'appliquée même $y = f(p dx + q dt)$.

XV. Ce Problème analytique considéré en soi est extrêmement indéterminé; ainsi, pour l'accommoder à quelque cas qui se présenteroit, il faut faire les remarques suivantes. Premièrement dans les intégrations, il faut régler les constantes de manière qu'en posant $x = 0$, quelle que soit la valeur qu'on attribue à t , on ait toujours $y = 0$. Ensuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troisièmement, ces précautions étant prises, d'entre les fonctions infinies r & s , qui satisfont aux conditions ci-dessus exprimées; on doit pour chaque cas proposé choisir celles, qui en posant $x = 0$, font que la valeur de l'appliquée y qui en résulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant exécuté, il ne restera plus dans la solution aucune constante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être représenté d'une manière absolue.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puisse être réglée arbitrairement, la solution doit avoir la plus grande étendue. C'est pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = r dx + s dt$, & $dq = s dx + \frac{Fa}{2M} r dt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs possibles pour r & s , qui rendent ces formules intégrables ensemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les constantes m & n , & ajoutons les produits, de manière que soit

$$m dp + n dq = dx (mr + ns) + dt (ms + \frac{Fa}{2M} nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que soient les valeurs constantes attribuées aux lettres m & n . Qu'on fasse donc $m:n$

$$= \frac{F a}{2 M} n:m, \text{ ou } mm = \frac{F a}{2 M} nn, \text{ d'où vient } m = 1 \text{ \& } n = \pm$$

$$\sqrt{\frac{2 M}{F a}}, \text{ \& l'on aura } dp \pm dq \sqrt{\frac{2 M}{F a}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{F a}{2 M}})$$

$$(r \pm s \sqrt{\frac{2 M}{F a}}).$$

XVII. Pour abréger, soit $\frac{F a}{2 M} = b$, & l'on aura

$$dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}}) \text{ ou}$$

$$dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r \sqrt{b} \pm s) \text{ ou aussi}$$

$$dq \pm dp \sqrt{b} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b}).$$

Comme donc cette formule $(dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b})$ doit être intégrable, il est nécessaire que $s \pm r \sqrt{b}$ soit une fonction de $x \pm t \sqrt{b}$. Posons, pour tenir compte de l'un & de l'autre signe

$$x + t \sqrt{b} = v \qquad x = \frac{v + u}{2}$$

\& il fera

$$x - t \sqrt{b} = u \qquad t \sqrt{b} = \frac{v - u}{2}$$

\& nous aurons ces équations :

$$dq + dp \sqrt{b} = dv (s + r \sqrt{b}) \text{ \& } dq - dp \sqrt{b} = du (s - r \sqrt{b})$$

où il faut que $s + r \sqrt{b}$ soit une fonction de v , & $s - r \sqrt{b}$ une fonction de u ; car autrement l'intégration ne réussiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p \sqrt{b}$ deviendra = à une fonction de v , & $q - p \sqrt{b}$ = à une fonction de u . Soit donc, pour donner une pleine étendue à la solution,

V fonction quelconque de $v = x + t \sqrt{b}$.

U fonction quelconque de $u = x - t \sqrt{b}$,

& l'on satisfera aux conditions rapportées, en posant

$$\begin{aligned} q + p \sqrt{b} &= V & q &= \frac{V + U}{2} \\ q - p \sqrt{b} &= U & p &= \frac{V - U}{2 \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

d'où se fait

Comme donc $dy = p dx + q dt$, on aura en substituant à p & q , de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4 \sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4 \sqrt{b}},$$

qui après l'évolution fournit

$$dy = \frac{V dv - U du}{2 \sqrt{b}} \quad \& \quad y = \frac{1}{2 \sqrt{b}} (\int V dv - \int U du).$$

XIX. Or $\int V dv$ sera fonction de $v = x + t \sqrt{b}$, & $\int U du$ fonction de $u = x - t \sqrt{b}$, b étant $= \frac{F a}{2 M}$; d'où, si l'on employe les caractères f & Φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant lesquelles on les met, nous aurons l'expression générale suivante pour l'appliquée y , qui représente la quantité pour un tems quelconque t , écoulé depuis le commencement, & pour une abscisse quelconque x

$$y = f: (x + t \sqrt{b}) + \Phi: (x - t \sqrt{b}).$$

Car pour retourner sur nos pas, & faire un essai sur la formule $dy = p dx + q dt$ on aura les valeurs suivantes p & q :

$$\begin{aligned} p &= f': (x + t \sqrt{b}) + \Phi': (x - t \sqrt{b}) \\ q &= \sqrt{b} (f': (x + t \sqrt{b}) - \Phi': (x - t \sqrt{b})) \end{aligned}$$

& au lieu des formules $dp = r dx + s dt$ & $dq = t dx + b r dt$, on aura, comme la nature de la chose le demande,

$$\begin{aligned} r &= f'': (x + t \sqrt{b}) + \Phi'': (x - t \sqrt{b}) \\ s &= \sqrt{b} (f'': (x + t \sqrt{b}) - \Phi'': (x - t \sqrt{b})) \end{aligned}$$

pourvu

pourvu que nous marquions le différentiel de la fonction $f: z$ par $dzf': z$, & le différentiel de la fonction $f': z$ par $dzf'': z$.

XX. Jusqu'à présent les caractères f & Φ , dans l'équation

$$y = f: (x + r\sqrt{b}) + \Phi: (x - r\sqrt{b})$$

signifient des fonctions quelconques, qui diffèrent en raison de la composition, & leur relation se détermine davantage par les autres conditions. Car comme en posant $x = 0$, on doit toujours avoir $y = 0$, il doit être $f: (+r\sqrt{b}) + \Phi: (-r\sqrt{b}) = 0$, & par conséquent $\Phi: (-r\sqrt{b}) = -f: (r\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en posant $x = a$, la valeur de y doit pareillement évanouir, on aura aussi $f: (a + r\sqrt{b}) + \Phi: (a - r\sqrt{b}) = 0$; & ainsi la nature des fonctions f & Φ doit être définie de manière qu'elle satisfasse à ces conditions.

$$\Phi: -r\sqrt{b} = -f: r\sqrt{b}$$

$$\Phi: (a - r\sqrt{b}) = -f: (a + r\sqrt{b})$$

XXI. Comme $f: z$ peut être représenté en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abscisse est z , soit AMB la courbe dont les appliquées PM fournissent les fonctions des abscisses AP qui sont désignées par le caractère f : en sorte que PM soit $= f: r\sqrt{b}$; auquel $\Phi: -r\sqrt{b}$ devant être négativement égal, qu'on prenne $Ap = AP$, de sorte que $Ap = r\sqrt{b}$; & en posant la courbe Amb au dessous de l'axe de la courbe semblable AMB , on aura $pm = -f: r\sqrt{b} = \Phi: -r\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb semblable à la courbe AMB exposera la nature de l'autre fonction Φ . Alors la courbe AMB existant d'une manière semblable au delà de B , soit $AB = a$ continué au dessous de l'axe, afin que la portion BNa soit semblable & égale à la courbe BnA , & en prenant $BQ = Bq$, on aura $AQ = a + r\sqrt{b}$, $QN = f: (a + r\sqrt{b})$, & pareillement à cause de $Aq = a - r\sqrt{b}$, il sera $qn = f: (a - r\sqrt{b})$ d'où il paroît qu'une courbe de cette forme AMB , qui est continuée de part & d'autre à l'infini par des parties semblables & égales à elle même $Am b$, BNa , & qui soient situées alternativement en haut & en bas, est propre à représenter la nature de l'une & l'autre fonction f & Φ .

Fig. 2.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une semblable courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière, ou mécanique, son appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons besoin pour la solution du Problème. En effet si l'on pose une abscisse quelconque $AP = z$, on aura l'appliquée $PM = f: z$. De là donc, en attribuant à l'abscisse z , les valeurs $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$; en conséquence de quoi on pourra assigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y , qui convient pour une abscisse quelconque. Or posons $t = 0$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura $AP = x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2 PM$; ou, parce qu'il est permis de prendre les moitiés des fonctions supérieures, en sorte que

$$y = \frac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \frac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

la courbe même AMB représentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçue au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au dessus de l'axe $AB = a$, qui soit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB , qu'on la repete de part & d'autre en situation inverse, en sorte que $Amb = AMB$ & $BNa = BnA$, & que l'on conçoive la répétition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini suivant la même loi. Alors, si cette courbe est employé pour exprimer les fonctions trouvées, après un tems écoulé $= t$ l'appliqué qui répondra à l'abscisse x , dans la corde en vibration fera :

$$y = \frac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \frac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aisément la construction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroisse pas renfermer des quantités hétérogènes, il faut remarquer que $t\sqrt{b}$ est représenté par une ligne droite, & est par conséquent homogène à x . Car, soit z la hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t , en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t , on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ fera $\frac{2\sqrt{bz}}{2\sqrt{bz}}$

$2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne

droite. Or posons, pour abrégér, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assignée pour un tems quelconque, & après le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \frac{1}{2}f:(x^2 + v) + \frac{1}{2}f:(x - v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde $AB = a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n'bAMBaN$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t , pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connue qu'on cherche

la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque

$AP = x$; on prenne de part & d'autre $PQ = Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn , on aura à cause de $QN = f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse $AP = x$ de la corde, $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on

prenne $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M , &

si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe AB , les points m donneront la figure présente de la corde AmB . De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, après qu'il sera écoulé un tems tel que v soit $= a$, ou $z = \frac{M a}{2 F}$, & cela donnera

$$y = \frac{1}{2} f: (x + a) + \frac{1}{2} f: (x - a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f: (x - a)$ sera $= -f: (a - x)$ & $f: (a + x) = -f: (a - x)$ d'où résultera

$$y = -f: (a - x)$$

ce qui fait voir que la corde sera pliée toute entière au dessous de l'axe, & prendra la figure $A M' B$ égale à la figure donnée $A M B$, mais posée en situation inverse; de sorte qu'en prenant l'abscisse $B P' = A P$, l'appliquée sera $P' M' = P M$. Et de là réciproquement, s'il s'écoule de nouveau un tems égal t , d'où résulte $v = a$, toute la corde retournera à la situation $A M B$, qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui se déduit aussi de ce que s'étant écoulé depuis le commencement un tems, d'où se fait $v = 2 a$, il en résulte,

$$y = \frac{1}{2} f: (x + 2 a) + \frac{1}{2} f: (x - 2 a)$$

Mais en prenant $P Q' = P q' = 2 a$, par la nature de la courbe $Q' N'$ sera $= P M = q' n'$, & par conséquent $y = P M$, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que soit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la résistance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-dessus, savoir que les vibrations de la corde, quelque irrégulières qu'elles aient été d'abord, rentrent aussi-tôt après dans l'uniformité, de manière que la figure dégénere en une trochöide prolongée. Cependant il n'est pas moins clair, que quelle que soit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laisseront pas d'être assez régulières; car comme, en posant $v = 2 a$, la corde retourne à son premier état, elle doit être censée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conséquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui sera égal au tems pendant lequel un corps pesant tombe par

la hauteur $\frac{M a}{2 F}$; ou, si l'on exprime la longueur de la corde $AB = a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en secondes sera $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{M a}{2 F}}$, où la corde fera autant de vibrations

à chaque seconde, que cette expression $125 \sqrt{\frac{2 F}{M a}}$ contiendra d'unités, tout comme si la corde achevoit ses vibrations suivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit sa premiere & plus grande excursion, de même une vibration étant achevée, la corde se trouvera dans l'autre excursion la plus grande $AM'B$, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverfée. Voyons donc à present, si dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde se tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la situation naturelle, ou non? Puisque du tems d'une vibration naît $v = a$, posons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2} a$, & l'on aura de la formule générale

$$y = \frac{1}{2} f: (x + \frac{1}{2} a) + \frac{1}{2} f: (x - \frac{1}{2} a)$$

dont la valeur evanouira, si $f: (\frac{1}{2} a - x)$ est $= f: (\frac{1}{2} a + x)$ c'est à dire, si la figure ADB donnée au commencement à la corde est telle qu'aux absciffes $\frac{1}{2} a + x$ & $\frac{1}{2} a - x$ répondent des appliquées égales; ce qui arrive si l'appliquée CD dressée au point du milieu C de la longueur AB est un diametre de la courbe ADB , & que la partie DB soit semblable & égale à la partie DA . Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette propriété, tout autant de fois la corde s'étend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il est manifeste que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ses vibrations la figure d'une trochoïde prolongée.

Fig. 1.

XXIX. Or, bien qu'à considerer la chose en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

Fig. 3. mais qu'ils se déterminent par les seules quantités a , M & F , dont la première a dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend; cependant il y a des cas singuliers, dans lesquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, si toute la longueur de la corde étoit $Aa = a$, & qu'elle se courbât au commencement, de manière qu'elle fit deux parties AMB & Ba , qui fussent parfaitement semblables & égales entr'elles, elle fera alors ses vibrations, comme si elle n'avoit que la demie longueur AB , & par conséquent ces vibrations feront deux fois plus rapides. De même, si la figure initiale de la corde avoit trois parties semblables & égales $bABa$, comme elles sont représentées dans la figure, la corde alors fera ses vibrations, comme si sa longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte; par où l'on comprend assez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainsi donné la solution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. est une courbe continuë, dont les parties soient liées en vertu de la loi de continuité, de manière que sa nature puisse être comprise par une équation. Et d'abord il est constant, que ces courbes, puisqu'elles sont coupées par l'axe en une infinité de points, seront transcendentes. En posant la longueur de la corde $AB = a$, & une abscisse quelconque $AB = u$, soit $1 : \pi$, comme le diamètre du cercle à la circonférence, & il est manifeste que l'équation suivante, exprimée par les sinus, fournit une courbe requise;

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car si, au lieu de u , on pose ou a , ou $2a$, ou $3a$, ou $4a$ &c. l'appliquée PM evanouit, & en posant u négatif, l'appliquée elle même se change en son négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems t , pendant lequel le corps pe-
fant

fait descend par la hauteur $= z$, en posant $v = \sqrt{\frac{2 F a z}{M}}$, à l'abscisse x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y , de sorte qu'on aura :

$$y = +\frac{1}{2} a \sin \frac{\pi}{a} (x + v) + \frac{1}{2} b \sin \frac{2\pi}{a} (x + v) + \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{3\pi}{a} (x + v) \&c.$$

$$+ \frac{1}{2} a \sin \frac{\pi}{a} (x - v) + \frac{1}{2} \delta \sin \frac{2\pi}{a} (x - v) + \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{3\pi}{a} (x - v) \&c.$$

XXXI. Or comme $\sin (a + b) + \sin (a - b)$ est $= 2 \sin a \cos b$, cette équation se transformera en cette forme :

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + \delta \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} \&c.$$

& la figure primitive de la corde sera exprimée par cette équation,

$$y = a \sin \frac{\pi x}{a} + \delta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$, ou $6a$ &c. Mais si v est ou a , ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la corde sera

$$y = - a \sin \frac{\pi x}{a} + \delta \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

où il faut remarquer que si β est $= 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. il en résulte le cas qu'on croit communément être le seul qui ait lieu dans la

vibration des cordes, savoir $y = a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, dans lequel la

courbure de la corde est perpétuellement la ligne des sinus, ou une trochoïde prolongée à l'infini. Mais si le seul terme β , ou γ , ou δ , &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration est moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.

