DE SVPERFICIE
CONORVM SCALENORVM,
ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam natura conorum a longo iam tempore ita est inuestigata, vt nihil praetermissum videatur, in quo laboraremus; tamen in dimetiendis conorum superficiebus vltra conos rectos, quorum axes ad bases sunt normales, non processerunt veteres. Celeb. Varignonius in Miscell. Societatis Regiae Berolinensis Continuatione II. argumentum hoc prorsus nouum primus tractauit, atque lineam curuam, cuius constructio a quadratura circuli pendet, inuenit per cuius rectificationem area cuiusque coni scaleni assignari queat. Subiuncta autem huic dissertationi ibidem reperitur additio Magni Leibnizii, in qua idem negotium per rectificationem curuae algebraicae expeditur. Constructio huius curuae eximium exemplum profundissimi Auctoris ingenii exhibet; verum inaduertentia Viri alias sagacissimi in hanc solutionem sphalma quodpiam irrepsit, quod vti facile emendari potest, ita quoque praestantiae solutionis parum detrahit. Exprimit enim superficiem coni scaleni rectangulo ex linea recta magnitudine data Tab. I.

in

in arcum lineae curuae, cuius constructionem exposuerat, cum iste arcus antea quantitate quapiam algebraica minui debuisset. Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocasse videor, si primo superficiem coni scaleni ope rectificationis lineae algebraicae ordinis sexti exhibuero, tum vero explanationem superficiei conoidalis cuiuscunque per lineam curuam algebraicam absoluero, simulque lapsum summi Leibnizii emendauero.

Fig. 1. §. 2. Sit circulus AMB basis coni scaleni, cuius vertex in sublimi positus sit V. vnde ad planum basis demittatur perpendiculum VD; et ex puncto D per centrum basis C agatur recta DACB. Superficies igitur haec conica generatur, dum linea recta perpetuo per punctum V transiens circa peripheriam circuli AMB circumducitur, huiusque superficiei portio arcui AM respondens includetur arcu AM et binis rectis ex punctis A et M ad verticem V ductis. Huiusmodi portioni gibbae figuram planam aequalem inueniri oportet. Ponatur radius basis $AC = BC = a$. longitudo axis $VC = f$ perpendiculum $VD = b$, et interuallum $CD = c$, ita vt sit $ff = bb + cc$. Hinc erit latus coni minimum $VA = \sqrt{(bb + cc - 2ac + aa)}$ et latus maximum $VB = \sqrt{(bb + cc + 2ac + aa)}$. Sumto nunc arcu quocunque AM, ponatur angulus $ACM = u$, erit arcus $AM = au$; eiusque elementum $Mm = adu$. Ducatur in puncto M tangens MQ, et ex D in eam ducatur perpendicularis DQ, erit recta VQ normalis in tangentem MQ. Quare si ductae concipiantur rectae VM et Vm, erit area trianguli $MVm = \frac{1}{2} Mm \cdot VQ$; quae areola erit differentiale portionis superficiei conicae AVM, quam quaerimus.

§. 3

§. 3. Vt igitur longitudinem perpendicularis VQ inuestigemus, in radium CM, si opus est, productum ex D ducamus normalem DN, quae parallela erit et aequalis tangenti MQ, et propterea $DQ = MN$. Cum ergo in triangulo rectangulo DCN sit hypotenusa $CD = c$ et angulus $DCN = u$, erit $CN = c \cos u$, hincque $MN = DQ = c \cos u - a$. Iam quia triangulum VDQ ad D est rectangulum, erit $VQ = \sqrt{(bb + cc \cos. u^2 - 2ac \cos. u + aa)}$; ex quo area trianguli elementaris MVm erit $= \frac{1}{2} Mm . VQ = \frac{1}{2} a du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Quamobrem superficies conica AVM erit $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Vnde perspicitur, si conus esset rectus, quo casu interuallum $CD = c$ euanesceret, superficiem coni recti arcui AM respondentis fore $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(aa + bb)} = \frac{1}{2} a u \sqrt{(aa + bb)}$. Aequaretur ergo areae trianguli, cuius basis $= au =$ arcui AM et cuius altitudo sit $= \sqrt{(aa + bb)} = VA$: vti ex elementis constat.

§. 4. Ex aequatione $AVM = \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$ statim fluit constructio curuae Varignonianae, per cuius rectificationem superficies conica exhiberi potest. Formetur enim inter coordinatas orthogonales p et q eiusmodi curua vt sit $dp = b du$ et $dq = du (c \cos u - a)$, erit elementum huius curuae $= du \sqrt{(bb + (c \cos u - a)^2)}$. Hinc arcus istius curuae per $\frac{1}{2} a$ multiplicatus praebebit rectangulum, cuius area aequalis erit superficiei conicae AVM. Erit ergo huius curuae abscissa $p = bu = \frac{VD.AM}{AC}$; et applicata $q = c \int du \cos u - au = c \sin u - au$ vnde abscissae $p = \frac{b}{a} . AM$ respondebit applicata $q = QM - AM$ quae pro-

propterea curua ope rectificationis circuli facile construitur. Attendenti autem statim patebit hanc curuam eandem esse, quam Varignonius tradidit.

§. 5. Si hanc superficiem conicam per quadraturas curuarum exprimere velimus, id quidem infinitis modis tam per curuas algebraicas quam transcendentes sine vllo negotio fieri posset. Verum iam pridem summi Geometrae constructiones problematum transcendentium quae fiant per rectificationes curuarum praecipue algebraicarum, illis quae per quadraturas efficiuntur, longe antetulerunt: cum facilius sit longitudinem cuiusque lineae curuae saltem proxime practice assignare, quam eius aream. Hancobcausam eo tempore, quo ista quaestio in Miscellaneis Soc. Regiae est agitata Celeb. Varignonius non parum praestitisse merito est visus, quod explanationem superficiei conicae scalenae ad rectificationem lineae curvae reduxerit, cuius constructio ope rectificationis circuli tam facile expediri possit. Maximi autem sine dubio esset aestimanda solutio Leibnizii, qua idem, quod Varignonius, per curuam algebraicam idque pro omnibus omnino superficiebus conicis praestitit, nisi ob errorem ante memoratum vsu careret. Nunc autem, postquam a Hermanno methodus latissime patens est inuenta quadraturas omnium curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reuocandi, fere sine vllo negotio scopus, quem Varignonius et Leibnitius sibi proposuerant, obtineri poterit.

§. 6. In hunc finem eliminemus ex formula inuenta $\frac{1}{2}a \int du \sqrt{(bb+(c\cos u-a)^2)}$ quantitatem transcendentem u, ponendo cosinum anguli $u=z$, ita vt, ducto ex M ad diame-

diametrum perpendiculo MP ſit $CP = dz$, et $MP = a\sqrt{(1-zz)}$, erit $du = \frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, et ſuperficies conica quaeſita $AVM = -\frac{1}{2}a\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$. Sit iam curuae algebraicae, ope cuius rectificationis haec ſuperficies menſurari queat, abſciſſa $= x$ et applicata $= y$, ponaturque $dy = p\,dx$, vt ſit eius elementum $= dx\sqrt{(1+pp)}$. Efficiendum ergo eſt vt integratio $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ ab integratione formulae $\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ pendeat. Primo autem requiritur, vt $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica; alioquin enim curua non foret algebraica. Cum igitur ſit $\int p\,dx = px - \int x\,dp$, ponatur $\int x\,dp = q$, fietque $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \int p\,dx = \frac{p\,dq}{dp} - q$. Vocetur arcus iſtius curuae $= s$, et cum ſit $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$ fiet $s = x\sqrt{(1+pp)} - \int\frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ſicque rectificatio curuae ab integratione formulae $\int\frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ pendebit, quae formula ob $x\,dp = dq$ abit in hanc $\int\frac{p\,dq}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae vlterius reducitur ad $\frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} - \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$: ita vt futurus ſit arcus curuae $s = \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} + \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$. Statuatur nunc $\int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}} = \int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, fietque $q = \frac{dz(1+pp)^{3:2}\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{dp\sqrt{(1-zz)}}$ vbi pro p functionem quamcunque algebraicam ipſius z aſſumere licet. Quo facto erit q functio algebraica ipſius z cognita, ex eaque porro ipſae coordinatae curuae quaeſitae x et y definientur.

§. 7. Deſcripta ergo hac curua ope coordinatarum $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \frac{p\,dq}{dp} - q$, ſi eius arcus vocetur $= s$ ob $s = \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} + \int\frac{q\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$, fiet formula noſtra, ex qua

ſuperficiei

superficiei conicae portio AVM determinatur $\int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ $= s - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Const. Quae constans si ita determinetur, vt posito $z=0$, ipsa formula euanescat, tum rectangulum $\frac{1}{2}a(\int - \frac{dq\sqrt{(1+pp)}}{dp} + \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} +$ Cōst.) aequabitur portioni superficiei conicae EVM, posito scilicet angulo ACE recto.

§. 8. Ponamus, vt rem exemplo illustremus $p = \frac{z}{\sqrt{(1-zz)}}$, vt sit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $dp = \frac{dz}{(1-zz)^{3:2}}$; erit $q = \frac{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$ et $\frac{dq}{dp} = \frac{bbz+(c-az)(cz-a)}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$ $= x$ et $y = \frac{(a(cz-a)-bb)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}$: Hinc prodibit portio superficiei conicae EVM $= \frac{1}{2}a(s - \frac{c(cz-a)\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}} +$ Const.), si quidem haec constans ita accipiatur, vt ista formula euanescat posito $z=0$. Simili autem modo aliis quibuscunque valoribus pro p accipiendis innumerabiles aliae curuae algebraicae obtinebuntur, quarum rectificatione portio superficiei conicae quaecunque in plano exhiberi poterit.

§. 9. In huiusmodi autem lineis curuis non ipse arcus superficiei conicae est proportionalis, sed eum perpetuo quapiam quantitate algebraica vel augeri vel diminui oportet, vt prodeat expressio superficiem conicam absolute mensurans. Qua circumstantia etsi praxis non impeditur, tamen eiusmodi lineae curuae, quarum longitudo statim ipsa sine adiuncta alia quantitate quaesitum praebet, illis non immerito anteferri solent. Hancobrem non abs re erit eiusmodi curuam algebraicam assignare, quae ipsa, vti curua illa Varignonii transcendens, sine assumta alia quantitate

titate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur. Cum igitur portio EVM exprimatur hac formula $\frac{1}{2}a \int \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, curua algebraica inueſtigari debebit cuius elementum ſit $= \frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$. Huius enim curvae ſi arcus quantitati z reſpondens ponatur $= s$, erit ſuperficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}abs$.

§. 10. Sint coordinatae huius curuae quaeſitae x et y, quae cum per functiones algebraicas ipſius z exprimi debeant, ſtatuatur $dx = \frac{dz(m+kz)}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{dz(n+kz)}{\sqrt{(+z)}}$ ſic enim ſumtis integralibus fiet

$$x = 2m + \tfrac{4}{3}k - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1-z)}$$
$$y = -2n + \tfrac{4}{3}k + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1+z)}$$

Eiusmodi conſtantibus adiectis, vt poſito $z = 0$, quod euenit in puncto E, ambae coordinatae x et y euaneſcant. Hinc elicietur iſta aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} +xx - 4mx - \frac{8}{3}kx \\ +yy + 4ny - \frac{8}{3}ky \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 4(n-m)(n+m)z + \frac{8}{3}(n-m)kzz \\ -\frac{8}{3}(n+m)kz \quad - \frac{8}{3}kkzz \end{array}\right)$$

Vnde valor ipſius z per x et y facile definitur, qui in altera aequatione ſubſtitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y, qua natura curuae quaeſitae continebitur.

§. 11. Cum iam ſit $dx = \frac{(m+kz)dz}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy = \frac{(n+kz)dz}{\sqrt{(1+z)}}$. fiet huius curuae elementum:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz\sqrt{\left(\frac{m^2 + 2mkz + k^2zz}{1-z} + \frac{n^2 + 2nkz + k^2zz}{1+z}\right)}$$

$$\text{ſeu } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz\sqrt{\left(\begin{array}{l} +nn - nnz + 2nkz - 2nkzz \\ +mm + mmz + 2mkz + 2mkzz \end{array} + 2k^2z^2\right)}}{\sqrt{(1-zz)}}$$

Quod aequale ponatur formae $\frac{dz\sqrt{(aa+bb-2acz+cczz)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$ prodibuntque ex comparatione terminorum homogeneorum hae aequationes.

$$aa+bb=(nn+mm)bb$$
$$2ac=(n-m)(n+m)bb-2(n+m)kbb$$
$$cc=2k^2b^2-2(n-m)kbb$$

Ex harum vltima fit $n-m=k-\frac{cc}{2kbb}=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$ qui valor in fecunda fubftitutus dat:

$$2ac=-\frac{(n+m)(2kkbb+cc)}{2k}$$

ergo erit $n+m=\frac{-4ack}{2kkbb+cc}$. Cum ergo fit:

$$n-m=\frac{2kkbb-cc}{2kbb}$$

ex his aequationibus ambae litterae m et n definiuntur.

§. 12. Supereft ergo vt tertia incognita k per primam aequationem definiatur. Cum autem quarta incognita b maneat indeterminata, ei pro lubitu valor affignari poterit, ftatuamus ergo $bb=\frac{cc}{2kk}$, vt euadat $n-m=0$: eritque $n+m=-\frac{2ak}{c}$, ac propterea $m=n=-\frac{ak}{c}$, vnde facta in prima aequatione fubftitutione etiam incognita k ex calculo egreditur. Fieri ergo nequit $m=n$. Quocirca ftatuamus $2kkbb=gcc$ feu $bb=\frac{gcc}{2kk}$ eritque $n-m=\frac{(g-1)k}{g}$ et $n+m=\frac{-4ak}{(g+1)c}$. Vnde fit $n=\frac{(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}=\frac{(gg-1)ck-4agk}{2g(g+1)c}$ et $m=\frac{-2ak}{(g+1)c}-\frac{(g-1)k}{2g}=\frac{-4agk-(gg-1)ck}{2g(g+1)c}$.

§. 13. Ex his valoribus nunc obtinebitur:

$$mm+nn=\frac{16aaggkk+(gg-1)^2cckk}{2gg(g+1)^2cc}$$

Hinc ex prima aequatione $aa+bb=(nn+mm)bb$ fiet $aa+bb=\frac{16aagg+(gg-1)^2cc}{4g(g+1)^2}$

fit

sit $aa+bb=ee$, haecque aequatio euoluta dabit:

$$\begin{aligned} ccg^4-4eeg^3\ &-2ccgg-4eeg+cc=0\\ &+16aagg\\ &-8eegg \end{aligned}$$

ex qua valorem ipsius g quaeri oportet.

§. 14. Quanquam haec aequatio est quarti ordinis, tamen quia non mutatur, si loco g ponatur $\frac{1}{g}$, ea ad resolutionem aequationis quadratae reuocari potest. Fingantur eius factores $cgg-2pg+c=0$ et $cgg-2qg+c=0$ et productum illi aequationi aequale efficiatur. Erit autem hoc productum:

$$\begin{aligned} ccg^4-2cpg^3&+2ccgg-2cpg+cc=0\\ -2cqg^3&+4pqgg-2cqg \end{aligned}$$

Quae forma cum aequatione inuenta comparata dabit:

$$p+q=\frac{2ee}{c} \text{ et } pq=4aa-2ee-cc$$

unde fit: $(p-q)^2=\frac{4e^4}{cc}-16aa+4ee+4cc$ et $p-q=\frac{2}{c}\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}$. Consequenter

$$p=\frac{ee+\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c} \text{ et}$$

$$q=\frac{ee-\sqrt{(e^4-4aacc+2ccee+c^4)}}{c}.$$

§. 15. Inuentis nunc p et q ex aequationibus superioribus valores ipsius g ita definientur vt sit $g=\frac{p\pm\sqrt{(pp-cc)}}{c}$ et $g=\frac{q\pm\sqrt{(qq-cc)}}{c}$. Cum igitur nunc quatuor valores pro quantitate g inuenerimus, habebimus primo $bb=\frac{gcc}{gkk}$ seu sumta quantitate b pro arbitrio erit $k=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1}{g}}g$; vnde porro inueniuntur.

$$m=\frac{-(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

$$n=\frac{+(g-1)k}{2g}-\frac{2ak}{(g+1)c}$$

Ex cognitis denique valoribus litterarum m, n, et k curua quaesita per coordinatus x et y supra exhibitas algebraice describetur, quo facto si eius arcus quantitati z respondens dicatur $= s$, erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}abs$.

§. 16. Vt exemplum praebeamus, faciat axis coni VC cum basi angulum $60°$, incidatque perpendiculum VD in peripheriam, basis erit $CD = CA$ et propterea $c = a$; porro erit $CV = f = 2a$ et $bb = 3aa$ vnde fit $ee = 4aa$ atque $p = a(4 + \sqrt{21})$ et $q = a(4 - \sqrt{21})$. Hinc fit $g = 4 + \sqrt{21} + 2\sqrt{(9 + 2\sqrt{21})}$, quia duo reliqui valores fiunt imaginarii. Erit ergo

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + \sqrt{21})}$$

sit $b = 1$ erit $k = \frac{a}{4}(\sqrt{14} + \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})})$. Hinc porro irrationalibus debite reductis inuenitur

$$m = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}) \text{ et}$$
$$n = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}).$$

quibus valoribus inuentis describatur curua inter coordinatas x et y ita, vt sit

$$x = \tfrac{4}{3}k + 2m - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 - z)}$$
$$y = \tfrac{4}{3}k - 2n + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 + z)}.$$

Cuius curuae si arcus sinui anguli ECM, qui est $= z$ respondens ponatur $= s$ erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}as$.

§. 17. Expeditis conis scalenis, qui cum bases habeant circulares, perpendiculum ex vertice in planum basis demissum extra eius centrum cadit, nunc conos quoscunque considerabo, qui formantur, dum linea recta per verticem perpetuo transiens circa lineam quamcunque circumducitur. Sit igitur

igitur figura quaecunque AM basis huiusmodi coni, et punctum V in sublimi positum eius vertex, vnde in basin demittatur perpendiculum VD. Ex D ad punctum curuae AM quodcunque M ducatur recta DM, et in M ducatur recta tangens curuam MQ, in quam D perpendiculum demittatur DQ: et cum basis cognita ponatur, relatio assignari poterit inter DM et DQ. Sit igitur $DM = x$, $DQ = y$, atque habebitur aequatio inter x et y. Ponatur praeterea huius coni altitudo $VD = b$, sumto autem huius curuae elemento Mm, si ducatur Dm et ex M in Dm perpendiculum demittatur Mn, erit $mn = dx$, et ob $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$ similitudo triangulorum DMQ, Mmn dabit $Mn = \frac{y\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$ et $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Fig. 2.

§. 18. His praemissis si in peripheria basis punctum fixum A tanquam principium assumatur. Superficiei conicae portio AVM erit integrale trianguli elementaris MVm. Ad areolam ergo huius trianguli exprimendam, iungatur recta VQ, quae in tangentem MQ erit normalis, ac propterea area trianguli MVm fiet $= \frac{1}{2} Mm.VQ$. Est vero ob triangulum VDQ ad D rectangulum, $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ vnde cum sit $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, habebitur area trianguli elementaris $MVm = \frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{2\sqrt{(xx-yy)}}$. Atque hinc erit superficiei conicae portio quaesita $AVM = \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$.

§. 19. Maxime naturalis via hanc superficiem exprimendi est, vt ea in planum explicetur. Concipiatur igitur conus charta superductus, quae secundum rectas AV et MV et basin AM excissa in planum explicetur Fig. 3.

VAM; haecque figura mixtilinea VAM aequalis erit portioni ſuperficiei conicae $AVM = \frac{1}{2}\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Huius figurae explicatae ducatur in M tangens MQ, et in eam ex V demittatur perpendiculum VQ. Cum igitur hoc triangulum VMQ ſimile et aequale ſit triangulo VMQ in fig. 2. erit $VM = \sqrt{(bb+xx)}$ $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$. Conſtituto autem triangulo elementari MVm, ductaque Mr ad Vm perpendiculari, erit vt ante $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, at $mr = \frac{xdx}{\sqrt{(ob+xx)}}$, et $Mr = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(oo+xx)(xx-yy)}}$.

§. 20. Inquiramus nunc in conſtructionem huius curvae ex data baſi coni in fig. 2. Ponamus in hunc finem angulum $AVM = v$ et diſtantiam $VM = z$, erit ſtatim $z = \sqrt{(bb+xx)}$. Tum vero erit $dv = \frac{Mr}{VM} = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{(bb+xx)\sqrt{(xx-yy)}}$. Vocemus ſimili modo in fig. 2. angulum $ADM = u$ erit $du = \frac{Mn}{DM} = \frac{ydx}{x\sqrt{(xx-yy)}}$; Hinc fit $x^4du^2 - xxyydu^2 = y^2dx^2$ et $y^2 = \frac{x^4du^2}{dx^2+x^2du^2}$ ideoque erit $\sqrt{(bb+yy)} = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)x^2du^2)}}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$ et $\sqrt{(xx-yy)} = \frac{xdx}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$: vnde oritur $dv = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)xxdu^2)}}{bo+xx}$. Quia igitur vel u vel y per x datur, inueniri poterit angulus v, quo cognito curua AM circa V in plano deſcribetur, cuius area AVM aequalis erit ſuperficiei conicae quaeſitae.

§. 21. Quoniam aſſignatio ſuperficiei conicae pendet ab integratione formulae $\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, hoc negotium tam per quadraturas quam rectificationes curuarum algebraicarum innumerabilibus modis facile expediri poteſt.

Vt

Vt autem conſtructionem Leibnizianam, quae eſt elegantiſſima, emendemus, peculiari modo nobis erit procecedendum. Perſpicuum autem eſt Virum ſummum ſuam conſtructionem ex conſideratione rectarum ad datam curvam ſub angulis quibuscunque ductarum deduxiſſe; hae enim rectae ſuis concurſibus formant nouam curuam, cuius rectificatio tam ſimpliciter exprimitur, vt quaeuis quadratura eo facile reducatur. Atque ex hoc ipſo fonte Celeb. Hermannus methodum ſuam ingenioſiſſimam quadraturas curuarum quascunque ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi hauſit, quam methodum poſtea Celeb. Ioh. Bernoulli ex geometria in analyſin puram translatam dilucide propoſuit.

§. 22. Sumamus pro curua data AM illam ipſam figuram, quae ante baſin coni conſtituerat, atque in eius ſingulis punctis M m in datis cum hac curua angulis ductae concipiantur rectae MS, ms quae ſuis contactibus forment nouam curuam FSs; per cuius rectificationem ſuperficiem conicam exprimi oporteat. Ponatur arcus curuae cognitae $AM = s$. ſitque angulus $SMm = v$, quem recta SM cum curua AM in puncto M conſtituit, et ſumto elemento $Mm = ds$, erit angulus $smN = v + dv$. Quo hinc concurſus rectarum MS et ms ſeu punctum S determinetur, conſideretur centrum circuli oſculatoris in Mm, quod ſit in R, et vocetur radius oſculi $MR = mR = r$, erit angulus $MRm = \frac{ds}{r}$: atque ob rectas RM, Rm ad curuam AM normales, erit angulus $RMS = 90° - v$ et angulus $RMS = 90° - v - dv$. Vnde cum ſit $RoS = MRm + RMS = MSm + Rms$, fiet ang. $MSm = MR$ Fig. 4.

$m +$

$m + RMS - Rms = \frac{ds}{r} + dv$. Nunc in triangulo MS m ob datos angulos et latusculum $Mm = ds$, fiet $\frac{ds}{r} + dv : ds = \text{fin.}\, v : mS$ vel MS, eritque igitur $MS = \frac{r\,ds\,\text{fin.}\,v}{ds + r\,dv}$; ex qua formula constructio curuae FS consequitur.

§. 23. Ponatur haec recta $MS = z$, vt sit $z = \frac{r\,ds\,\text{fin.}\,v}{ds + r\,dv}$; eritque $ms = z + dz$. Ex m in MS ducatur normalis mk, ob angulum $mMk = v$, erit $mk = ds$ fin. v et $Mk = ds$ cof. v. Cum igitur fit $Ss = ms - kS = ms - MS + Mk$, fiet $Ss = ds$ cof. $v + dz$. At est Ss elementum curuae FS, ex quo erit longitudo huius curvae $FS = \int ds$ cof. $v + z +$ Const. Ad hanc constantem definiendam respondeat curuae FS, punctum F curuae datae AM puncto A, ita vt recta AF sit tangens curuae quaesitae FS in puncto F. Hinc cum sit $MS = z$, prodibit $FS = \int ds$ cof. $v + MS - AF$, si quidem integrale $\int ds$ cof. v ita capiatur, vt euanescat posito $s = 0$. Quo facto vicissim integrale formulae $\int ds$ cof. v per rectificationem curvae FS exhiberi poterit, erit scilicet $\int ds$ cof. $v = FS + AF - MS$.

§. 24. His praemissis sit D vestigium verticis coni in plano basis, seu punctum, in quod perpendiculum ex vertice coni in planum basis demissum incidit, cuius perpendiculi altitudo VD supra posita est $= b$. Ducta porro ad M tangente MQ, in eamque ex D demisso perpendiculo DQ, vocauimus $DM = x$ et $DQ = y$, eratque elementum $Mm = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx - yy)}}$, quod nunc appellamus $= ds$. Quare cum inuenerimus superficiem conicam arcui basis AM respondentem $= \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx\,\sqrt{(bb + yy)}}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit ista super-

superficies $= \frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)}$. Quo igitur haec superficies per rectificationem curuae FS exprimatur, angulus v vbique ita constitui debet, vt formulae $\int ds \cos. v$ integratio ad integrationem formulae $\int ds\sqrt{(bb+yy)}$ perducatur.

§. 25. Ponamus in hunc finem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$: et cum cosinus ipsius v vltra radii magnitudinem, quam vnitate metimur nunquam excrescere possit, quantitas k tanta assumi debet, vt $\sqrt{(bb+yy)}$ eam nunquam superare queat. Quare notetur maximus valor, quem formula $\sqrt{(bb+yy)}$ vsquam in cono induere potest, eique k vel aequalis vel etiam maior assumatur. Hoc igitur modo si angulus v fuerit definitus, obtinebitur superficies conica arcui basis AM insistens $\frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)} = \frac{1}{2}k\int ds \cos. v$; ideoque exprimetur rectangulo $\frac{1}{2}k(FS + AF - MS)$ si scilicet rectae MS vbique ita constituantur, vt sit $\cos. SMm = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ seu $\sin. RMS = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ hincque construatur curua FS, rectanguli $\frac{1}{2}k(AF + FS - MS)$ area aequabitur superficiei conicae quaesitae, quae igitur per rectificationem curuae algebraicae FS exhibebitur. Cum enim vbique tam angulus RMS quam longitudo MS algebraice assignari queant, ipsa curua FS erit algebraica.

§. 26. Sumto autem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ erit $\sin. v = \frac{\sqrt{(kk-bb-yy)}}{k}$ et differentiando $dv \cos. v = \frac{-yky}{k\sqrt{(kk-bb-yy)}} = \frac{-ydy}{kk \sin. v}$. vnde fit $dv = \frac{-ydy}{kk \sin. v \cos. v}$. Cum autem natura curuae AM aequatione inter variabiles $DM = x$ et $DQ = y$ exprimatur, erit radius osculi $MR = r = \frac{xdx}{dy} =$

$\frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{dy}$, vnde fit $dy = \frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{r}$ ideoque $dv = \frac{-y\,ds\sqrt{(xx-yy)}}{kkr\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v}$. Quia ergo fupra inuenimus $MS = z = \frac{r\,ds\,\text{fin.}\,v}{ds + r\,dv}$, nunc habebimus $MS = z = \frac{kkr\,\text{fin.}\,v^2\,\text{cof.}\,v}{kk\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v - y\sqrt{(xx-yy)}}$ Quam expreffionem fequenti modo geometrice conftruere conabimur.

Fig. 4. et 5. §. 27. Sit iterum curua AM bafis coni, D veftigium verticis, et M punctum huius curuae quodcunque in quo ducatur tangens MQ et normalis MK. Ductaque recta DM ex D in tangentem demittatur perpendiculum DQ, fimulque tangenti agatur recta indefinita DC, in qua capiatur DC = altitudini coni $= b$, ductaque CQ erit $CQ = \sqrt{(bb+yy)}$. Tum in normali ad curuam capiatur $MK = k$, fuper qua tanquam diametro defcripto femicirculo KPM applicetur chorda KP = CQ, fi ducatur MP, erit finus anguli $KMP = \frac{KP}{k} = \text{cof.}\,v$, vnde recta MP erit pofitio rectae MS, fumatur in normali ad curuam $MR = r$, et cum fit $DQ = y$, et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$, fiet $MS = \frac{MK \cdot MR\,\text{fin.}\,v}{MK - DQ \cdot MQ : MK\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,v}$ feu $MS = \frac{MK\,\text{cof.}\,v \cdot MR\,\text{fin.}\,v}{MK\,\text{cof.}\,v - DQ \cdot MQ : MK\,\text{fin.}\,v}$. Cum vero fit $MK\,\text{cof.}\,v = KP$ et $MK\,\text{fin.}\,v = MP$, ex R in MP demittatur perpendiculum RT, et erit $MR\,\text{fin.}\,v = MT$ fietque $MS = \frac{KP \cdot MT}{KP - DQ \cdot MQ : MP}$. Capiatur $PX = \frac{DQ \cdot MQ}{MP}$, erit $MS = \frac{KP \cdot MT}{KX}$, vnde longitudo rectae MS facile definitur. Quae operatio fi in fingulis punctis M inftituatur, fingula puncta S determinabunt curuam quaefitam FS; qua inuenta erit portio fuperficiei conicae arcui AM infiftentis aequalis areae parallelogrammi rectanguli $\frac{1}{2}MK(AF+FS-MS)$.

§. 28.

§. 28. Si curua AM ſtatuatur circulus, extra cuius centrum cadat punctum D, vt conus abeat in conum ſcalenum ordinarium qualem primo ſumus contemplati, atque curua FS ſecundum praecepta hic data conſtruatur, tum eadem prodibit curua, quam Illuſtr. Leibnizius loco ſupra allegato inuenire docuit. Ex quo manifeſtum eſt non ipſam hanc curuam FS in rectam elongatam, ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem conicam quaeſitam, ſed arcum illum FS recta AF auctum longitudine rectae MS minui debere. Hoc ergo modo non ſolum conſtructionem Leibnizianam, quae tantum ad conos ſcalenos erat accommodata, emendauimus, ſed etiam ad conos, quorum baſes ſint figurae quaecunque extendimus.

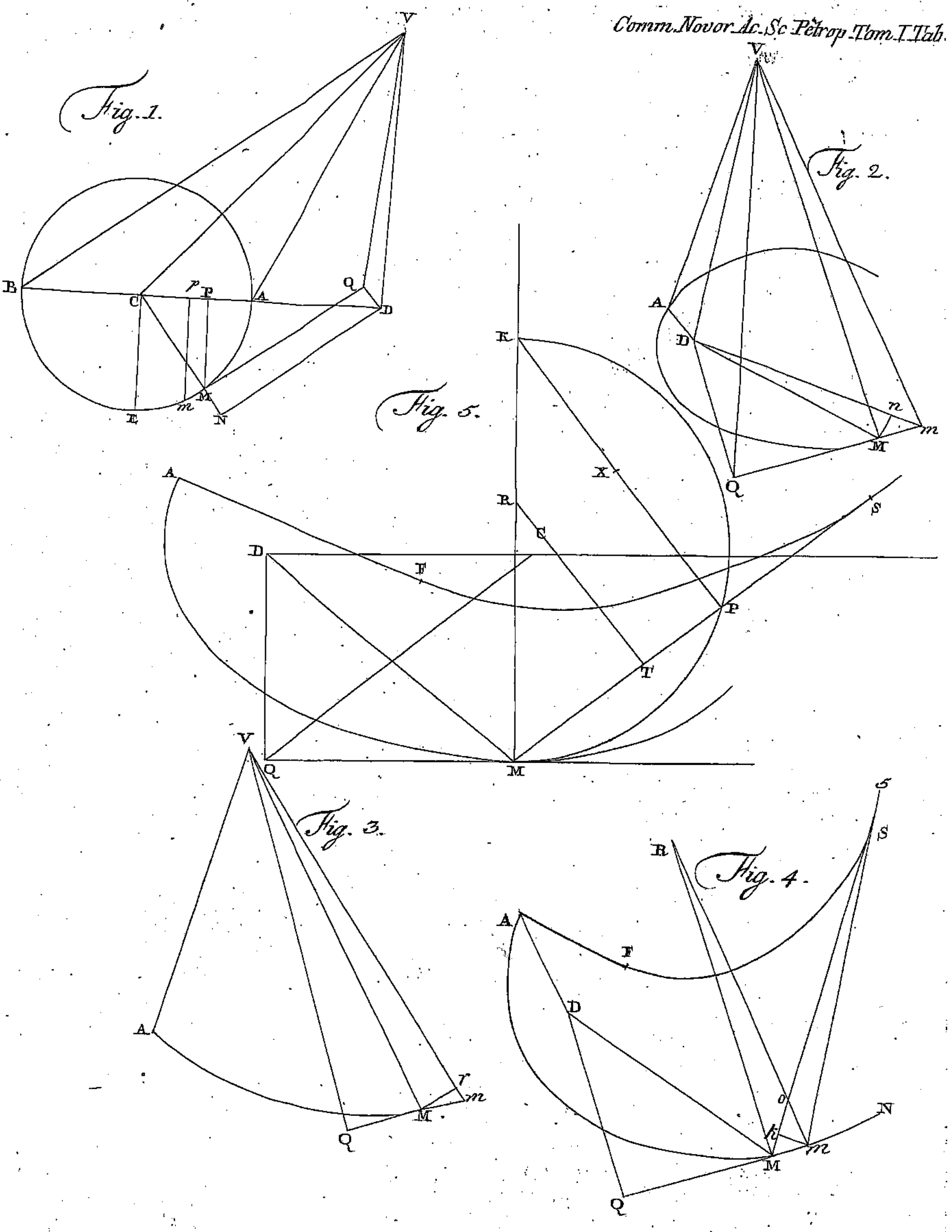
Fig. 1.
V
B
C
p P
A
Q
D
E
m
M
N
Fig. 2.
V
A
D
n
m
M
Q
Fig. 5.
K
X
R
C
A
D
F
S
P
T
V
Q
M
Fig. 3.
V
A
r
m
M
Q
Fig. 4.
5
S
R
A
F
D
o
k
N
m
M
Q