



M E M O I E E
SUR LA FORCE DES RAMES

P A R M R. E U L E R.



I.

orsqu'on considère l'action des rames, on est d'abord porté à croire qu'elle doit suivre les loix du levier: & c'est de ce principe qu'Aristote a déjà voulu déterminer la force des rames, dont les vaisseaux sont mis en mouvement. Or l'expérience a bientôt fait connoître, que ce Philosophe s'est trompé dans cette recherche, & Mr. Bouguer dans son excellent Traité sur le Navire, qu'il vient de publier, n'est pas peu surpris, que depuis le tems d'Aristote personne ne se soit appliqué avec plus de succès à développer cette question; quoi que la Mécanique paroisse portée à présent à un si haut degré de perfection, qu'il semble qu'on ne dût plus être embarrassé sur de pareilles questions. Mr. Bouguer tâche donc de suppléer à ce défaut, en traitant cette matière sur la force des Rames avec beaucoup de soin; mais quoiqu'il ait évité heureusement les fautes d'Aristote, & de ceux qui l'ont suivi, il s'en faut beaucoup, qu'il ait réussi tout à fait: il y a quelques petites circonstances auxquelles ce grand Geometre ne paroît pas avoir assez réfléchi, & par lesquelles l'action des Rames se trouve altérée fort considérablement. Mr. Bouguer trouve par sa Théorie que, pour que les Rames produisent le plus grand

grand effet; la partie de chaque rame qui est dans le vaisseau, doit être plus longue que celle qui est dehors: cependant on fait, que dans la pratique on observe une règle tout à fait opposée, & il n'y a aucun doute, que l'expérience cultivée depuis si longtems n'ait donné à connoître à peu près la plus avantageuse proportion, qu'il faut mettre entre les parties des rames. Cette seule circonstance est suffisante à mon avis pour nous convaincre que la Théorie de Mr. Bouguer sur les rames n'est pas encore achevée, & j'espère de mettre cette matière tellement dans tout son jour, qu'il ne restera plus aucun doute, ni sur la vérité de la Théorie même, ni sur son accord avec l'expérience.

II. Il est vrai qu'il y a un grand rapport entre le levier & la rame: dans le levier il y a trois points à remarquer; le point d'appuy, celui où l'on applique la force, & celui auquel est attaché le fardeau, qui doit être mis en mouvement. Or la rame nous présente pareillement trois points à considérer: le premier, où le rameur applique sa force: le second est le point, où l'on appuie la rame sur le bord du vaisseau, & le troisième se trouve dans la pale, qui frappe l'eau. Mais on remarquera aussi d'abord une grande différence, & on ne saura déterminer, lequel de ces trois points dans la rame est celui d'appuy, ou de l'attache du fardeau. D'un côté, le point où la rame est appuyée sur le bord du vaisseau, paroît répondre au point d'appuy du levier, mais alors ce seroit l'eau poussée par la pale, qui tiendroit lieu du fardeau, & non pas le vaisseau même: d'un autre côté, si l'on regarde la pale comme le point d'appuy, en quel cas la rame deviendroit un levier homodrome, on rencontrera d'autres difficultés, qui détruisent la ressemblance du levier. Car dans ce cas le point d'appuy ne sera point fixe, & comme la force du rameur agit dans le vaisseau même, qui doit être mis en mouvement, il en naît une circonstance singulière, qui ne se rencontre pas dans les leviers ordinaires. Ces considérations nous laissent en doute sur la force, par laquelle le vaisseau est immédiatement poussé; si c'est la force, que le rameur emploie sur la rame, ou celle dont le bord du vaisseau est poussé, ou enfin celle que la pale exerce sur l'eau. Dans cette incertitude on

doit tout à fait abandonner la considération du levier, & se tenir uniquement aux premières loix de la Mécanique, pour en déterminer immédiatement le mouvement du vaisseau causé par l'action des rames.

III. Dans cette recherche il y a quantité de choses, auxquelles il faut avoir égard, si l'on veut déterminer le mouvement du vaisseau, qui est causé par l'action des rames. Premièrement, on doit considérer la masse du vaisseau, la vitesse qu'il a actuellement, & la résistance qu'il rencontre en sillant par l'eau avec cette vitesse. En second lieu, on doit regarder le poids & la figure de chaque rame, la quantité de la partie qui est dans le vaisseau, & de l'autre qui se trouve dehors, avec la surface de la pale dont l'eau est frappée. En troisième lieu, il faut introduire dans le calcul la force que les rameurs appliquent aux rames, pour en déterminer la vitesse avec laquelle les pales fendent l'eau, & la résistance qu'elles y rencontrent: & comme dans chaque palade il n'y a qu'environ le tiers du tems, que la rame agit sur l'eau, le reste du tems étant employé à lever la rame & à la retirer, il est à remarquer que ce n'est que la force, que le rameur exerce, pendant que la pale est sous l'eau, qui est employée à pousser le vaisseau. Le nombre de ces considérations, dont dépend cette recherche, étant si grand, & celles qui sont connues étant mêlées avec les inconnues, on ne sera plus surpris pourquoi cette matière a été si négligée jusqu'ici, & combien il est difficile de n'y tomber point dans l'erreur.

IV. De tous ces différens sujets, qu'il faut soigneusement distinguer les uns des autres, je commencerai par le vaisseau même; dont voici les dénominations:

1. Soit la masse du Vaisseau, ou son Poids = M , qui étant égal au poids d'une masse d'eau, dont le volume est égal à la partie submergée du vaisseau, soit cette partie ou le volume d'eau égal en pesanteur au poids du vaisseau tout entier = g^3 de sorte qu'on puisse se servir, ou de la lettre M , ou de l'expression g^3 pour marquer la masse du vaisseau.

2. Pour

2. Pour déterminer la résistance du vaisseau, qu'il effuye en fendant l'eau directement, ou suivant la direction de sa quille, on pourra concevoir une surface plane, qui en passant par l'eau directement, avec une egale vitesse, souffre une résistance egale: soit donc l'aire de cette surface $\text{---} \text{---} \text{---} = ff$, dont la détermination depend de la figure du vaisseau, qui sera d'autant plus petite, plus le vaisseau; aura de façon, ou qu'il sera allongé vers la proue. Pour chaque vaisseau, je suppose que ces quantités g^3 & ff soyent deja connues par l'experience.
3. Pour désigner la vitesse du vaisseau je me servirai de la hauteur, dont un corps tombant acquiert la même vitesse. On fait que cette hauteur est proportionnelle au quarré de la vitesse; & connoissant cette hauteur on est en etat de déterminer la vitesse même ou l'espace, que le vaisseau doit parcourir avec cette vitesse dans un tems donné, par exemple, dans une seconde. Soit cette hauteur generatrice de la vitesse du vaisseau $\text{---} = v$: & il est reconnu, que si l'on exprime cette hauteur en milliemes parties du pied du Rhin, le vaisseau parcourra dans une seconde un chemin de $\frac{1}{4} \sqrt{v}$ pieds du Rhin: de sorte que sachant la hauteur v , on ne manquera pas de connoitre la vitesse absoluë.
4. La force, dont le vaisseau est poussé en avant selon la direction de sa quille, soit égale au poids $\text{---} = P$; & je me servirai de cette idée générale, jusqu'à ce que je serai en etat de tirer sa valeur de l'action des rames, car avant que d'entreprendre cette recherche principale, je me vois obligé de déterminer en general le mouvement, qu'une force quelconque doit imprimer au vaisseau.

V. Ces dénominations avancées, il est clair que, si le vaisseau ne rencontroit aucune résistance, son acceleration, pendant qu'il parcourt l'element d'espace $\text{---} = ds$, seroit exprimée par cette formule $M dv = P ds$. Mais à cause de la résistance il faut retrancher de la force poussante P la force qui résulte de la résistance. Or la résistance du vaisseau etant égale à celle qu'une surface plane $\text{---} = ff$ souffriroit, si elle étoit muë directement avec une vitesse egale par l'eau. Cette vitesse étant supposée due à la hauteur v , on fait de la

Theorie

Theorie Hydrodynamique, que cette force en question est egale au poids d'une colonne d'eau, dont la base est egale à la surface $= ff$ & la hauteur $= v$. c. à d. au poids d'un volume d'eau $= ff v$. Mais le poids d'un volume d'eau $= g^3$ étant $= M$, on aura la resistance, egale à un poids $= \frac{ff v}{g^3} M$; qui étant retranché de la force pous-
fante $= P$, le vaisseau sera poussé en avant avec la force $P - \frac{ff v}{g^3} M$, & l'acceleration du vaisseau, pendant qu'il parcourt l'ele-
ment de l'espace $= ds$, sera renfermée dans cette formule

$$M dv = P ds - \frac{ff v}{g^3} M ds.$$

VI. Pour rendre cette formule plus commode, on pourra ré-
duire le volume d'eau g^3 , egal en pesanteur au poids du vaisseau, à
une colonne d'eau, dont la base $= ff$ & la hauteur $= b$; de sorte
que ffb exprime le volume de la partie submergée du vaisseau: ou on
n'aura qu'à changer la partie submergée dans la forme d'un prisme,
dont la base soit la surface ff , qui sert de mesure de la resistance, &
la longueur sera la valeur de la lettre b . Ayant donc $g^3 = ff b$, l'e-
quation trouvée se changera en cette forme.

$$M h dv = P h ds - M v ds$$

d'où l'on tire: $ds = \frac{M h dv}{P h - M v}$

& prenant l'integrale: $s = h l \frac{P h}{P h - M v}$

Où s sera l'espace, que le vaisseau aura parcouru, depuis le commen-
cement de son mouvement jusqu'à ce qu'il aura atteint la vitesse qui
repond à la hauteur v , étant constamment poussé par la force $= P$.

VII. Si nous passons aux nombres, nous déterminerons pour
chaque point du chemin, que le vaisseau parcourt, sa vitesse veritable
Car soit e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; ou
soit $e = 2, 718281828459$

& on aura cette équation :

$$e^{s:b} = \frac{P h}{P h - M v}$$

de laquelle on tire la valeur de v ;

$$v = \frac{P h}{M} \left(1 - e^{-s:h} \right)$$

Comme la valeur de b devient d'abord fort petite par rapport au chemin s , que le vaisseau parcourt, le terme $e^{-s:h}$ évanouira bientôt depuis le commencement; de sorte qu'on ne se trompe pas, si l'on suppose

$$v = \frac{P h}{M}$$

En effet on fait par expérience, que quelle que soit la force, dont le vaisseau est poussé, il en acquiert dans peu de tems un degré de vitesse, dont il paroît depuis continuer son mouvement sans aucune accélération. Il suffit donc pour mon dessein de connoître cette vitesse, & il importe fort peu, par quels degrés le mouvement est accéléré dans les premiers instans.

VIII. Il sera donc fort aisé de déterminer cette vitesse, qu'un vaisseau poussé par une force quelconque doit acquérir. Car ayant posé le poids du vaisseau = M , & la force dont il est poussé = P , on n'a qu'à considérer la partie submergée du vaisseau, & la changer dans une colonne cylindrique égale en volume, qui étant muë avec la même vitesse que le vaisseau selon sa longueur, en frappant l'eau d'une de ses bases perpendiculairement, souffre la même vitesse que le vaisseau. Cette réduction faite, que b marque la longueur de cette colonne, & la formule $\frac{P}{M} \cdot b$ donnera la hauteur v , de laquelle un

corps tombant acquiert la vitesse cherchée du vaisseau. Puisque $h = \frac{g^3}{ff}$, on aura $v = \frac{P}{M} \cdot \frac{g^3}{ff}$, & parce que M à g^3 a un rapport constant, la hauteur v ou le quarré de la vitesse du vaisseau sera comme $\frac{P}{ff}$. Or ff marque la résistance absolue, ou celle que le vaisseau sent étant porté d'un degré donné de vitesse; & partant on aura cette regle: Que le quarré de la vitesse est proportionnel à la force, dont le vaisseau est poussé, divisée par la résistance absolue.

IX. Réciproquement, si la vitesse du vaisseau est connue, ou la hauteur v , on en connoitra la force, dont le vaisseau est poussé: car posant cette force = P , on aura $P = \frac{M v}{h}$. On reconnoitra aisé-

ment, que cette même force sera requise pour arreter le vaisseau dans une riviere, qui se meut avec la même vitesse due à la hauteur v : & par cette considération, quelle que soit la vitesse du vaisseau sur la mer, nous pourrons regarder le vaisseau, comme s'il étoit en repos, pourvuque nous transportions son mouvement dans l'eau selon une direction contraire, & alors la force requise pour arreter

le vaisseau dans cet état de repos, sera = $\frac{M v}{h}$; pourvu que le mou-

vement soit uniforme. Mais si le mouvement du vaisseau est accéléré, desorte que la hauteur v acquiere un accroissement = $d v$, pendant qu'il parcourt l'element d'espace $d s$; on pourra de meme, tant le mouvement du vaisseau que son acceleration, transporter dans l'eau; or alors la force requise pour arreter le vaisseau dans

cet état de repos sera $P = \frac{M v}{h} + \frac{M d v}{d s}$.

Fig. I.

X. Que AB represente donc la quille du vaisseau, A sa proue & B la poupe: & son mouvement, qui soit selon la direction $A \alpha$ avec une vitesse due à la hauteur = v , soit transporté dans l'eau, qui se meuve avec la meme vitesse dans la direction $b q s$; de sorte que le
vaisseau

vaisseau puisse être considéré comme arrêté en repos. Cela posé, je vais examiner l'effet d'une rame, pendant qu'elle est frappée dans l'eau, avec une force quelconque. Pour cet effet soit la rame représentée par la ligne *facbg*, dans laquelle il y a d'abord trois points à considérer.

1. Le point *a* auquel la force du rameur est appliquée ; ou s'il y a plusieurs rameurs, qui agissent sur divers points, le point *a* en sera le milieu ; de sorte que si l'on y conçoit appliquée une force égale à celles de tous les rameurs prises ensemble, elle produise le même effet.
2. Le point *b*, que je nommerai le centre de la pale ; car chaque point de la pale frappant l'eau, & en essuyant la force de la résistance, il y aura un point *b*, par lequel passe la moyenne direction de la résistance, & c'est ce que je nomme le centre de la pale, auquel sera rassemblée toute la force, que la pale soutient en frappant l'eau.
3. Le troisième point, auquel il faut avoir égard, c'est le point d'appuy *c* ; qui sera en repos de même que le vaisseau, pendant que la rame est poussée d'un mouvement angulaire autour de ce point *c*.

Ayant déterminé ces trois points principaux de la rame, nous y aurons deux parties à distinguer, celle qui est en deçà du point *c* dans le vaisseau, & celle qui est dehors ; je nommerai la longueur de chacune :

$$ac = a \quad \& \quad bc = b$$

& la surface de la pale = *cc*, qui essuye la résistance de l'eau, en la frappant.

XI. Pour la force, qui est employée à mouvoir la rame au point *a*, je la nommerai = *p*, dont la direction soit selon la quille du vaisseau, vers la proue A : c. à d. la rame sera poussée au point *a* par la force = *p* dans la direction *aA* parallèle à la quille. Or comme les rameurs se trouvent dans le vaisseau, ils ne sauroient exercer aucune force, sans qu'ils en s'appuyant exerçassent une force égale

le sur le vaisseau meme dans une direction contraire. Par conséquent le vaisseau par la force des rameurs sera immédiatement poussé en arriere dans la direction AB par une force $= p$. De plus, comme les rameurs ne peuvent agir, sans qu'ils mettent leurs propres corps en mouvement, & qu'ils en vainquent l'inertie, pour y avoir égard, soit l'inertie des rameurs $= q$, qui ne doit pas être estimée par la masse de leurs corps, puisqu'une bonne partie ne participe point du mouvement; on pourra prendre pour q la moitié ou une autre partie de leurs corps, qu'on jugera la plus conforme à l'expérience: car par rapport à leur force p , & leur inertie q , on se doit contenter de les connoître à peu près, à quoi quelques observations seront suffisantes. Outre cela comme la masse de la rame doit être mise en mouvement, soit son inertie ou son poids $= m$ & puisque ce mouvement est angulaire autour du point fixe c , il en faut regarder le *momentum* de l'inertie par rapport au point c , qu'on trouve en multipliant chaque particule de matiere de la rame par le quarré de sa distance au point c , & en rassemblant tous ces produits ensemble dans une somme. Soit donc ce moment d'inertie de chaque rame $= mkk$, puisqu'il sera le produit du poids par le quarré d'une ligne droite.

XII. La ligne $facbg$ représente ici la situation de la rame au premier moment, qu'elle est plongée dans l'eau; cette situation étant oblique à la quille AB , je tire à la quille la perpendiculaire ecb , & je nomme l'angle $fce = a$. Quelque tems après dans cette palade, la rame soit réduite dans la situation $epcqv$, où chacune des lettres e, p, c, q, v répond à chacune des lettres f, a, c, b, g dans la premiere situation: soit nommé l'angle $ect = \phi$, & la vitesse de la pale à son centre q soit due à la hauteur $= u$, dont la direction sera la droite qr perpendiculaire à la direction de la rame cq . Donc si l'eau étoit en repos, la pale frapperoit directement l'eau, & la force de l'eau sur la pale seroit égale au poids d'un cylindre d'eau, dont la base $= cc$, c à d . à la surface de la pale, & la hauteur $= u$: ou cette force seroit égale au poids d'un volume d'eau $= ccu$, ou absolument au poids

pois = $\frac{c \cdot \pi}{g^3} M$: & la direction de cette force seroit la droite qy perpendiculaire à la surface de la pale.

XIII. Mais l'eau ayant déjà un mouvement suivant la direction qs parallèle à la quille, avec une vitesse = v ; elle échappera en partie à l'action de la rame. Donc pour avoir la direction & la vitesse, dont la rame frappe actuellement l'eau, on n'aura qu'à prendre les lignes qs & qy égales ou proportionnelles aux vitesses v & v , & après en avoir formé le parallélogramme $sqyz$, y tirer la diagonale qz , qui représentera tout ensemble la direction & la vitesse, dont l'eau est frappée par la rame. C'est pourquoi la vitesse étant représentée par la diagonale yz , & l'obliquité par l'angle vqz , la force de l'eau sur la pale sera égale au poids d'un volume d'eau = $cc \cdot qz^2 \cdot \sin vqz^2$, ou à cause de $uz = qz \sin vqz$, à un volume d'eau = $cc \cdot uz^2$. Mais puisque $sz = qy = v$, $qs = v$, & l'angle $sqr = \phi$, nous aurons $su = v \cdot \cos \phi$, & partant $uz = v - \cos \phi \cdot v$. Donc la force d'eau sur la pale sera égale au poids d'une masse d'eau dont le volume = $cc (v - \cos \phi \cdot v)^2$. Par là il est clair, que la pale souffre la même résistance, que si sa vitesse v dans la direction qr étoit diminuée de la vitesse de l'eau v réduite à la même direction qr , qui sera = $\cos \phi \cdot v$: & on voit bien que pour que la rame produise quelque effet, la partie retranchée $\cos \phi \cdot v$ doit être moindre que v .

XIV. Maintenant ayant supposé la force = p , dont le rameur tire la rame au point p , soit la direction de cette force perpendiculaire à la direction de la rame selon $p\pi$, & la vitesse du point p suivant $p\pi$ sera = $\frac{a}{b} v$; & pendant que la rame avance de l'élément de l'angle $d\phi$ autour de c , le point q parcourra l'espace = $b d\phi$ & le point p l'espace $a d\phi$. Or l'inertie des rameurs q ayant la même vitesse, que le point p , qui est due à la hauteur $\frac{a a u}{b b}$, son accelera-

tion, pendant que l'angle ϕ croît de son element $d\phi$, sera $\frac{aa du}{bb}$; $ad\phi = \frac{adu}{bb d\phi}$; à la production de laquelle est requise une

force $\frac{aq du}{bb d\phi}$: Ce ne sera pas donc toute la force des rameurs p qui est employée à l'acceleration de la rame, mais il en faut retrancher la partie $\frac{aq du}{bb d\phi}$, qui est employée à l'acceleration des corps des rameurs ou de leur inertie. Et partant la force employée à l'acceleration de la rame est $p - \frac{aq du}{bb d\phi}$, dont le moment par rapport au point d'appuy c est $ap - \frac{aaq du}{bb d\phi}$.

XV. La force de la resistance de l'eau sur la pale etant trouvée égale à un volume d'eau $cc (vu - \cos \phi. vv)^2$, elle sera égale au poids $\frac{M}{g^3} cc (vu - \cos \phi. vv)^2$, dont le moment par rapport au point d'appuy c sera $\frac{Mbcc}{g^3} (vu - \cos \phi. vv)^2$, qu'il faut retrancher du moment de la force: de sorte que le mouvement angulaire de la rame sera acceléré par le moment $ap - \frac{aaq du}{bb d\phi}$

$-\frac{Mbcc}{g^3} (vu - \cos \phi. vv)^2$. Mais le moment d'inertie de la rame étant mkk , & sa vitesse angulaire $\frac{V u}{b}$, l'acceleration meme sera $\frac{mkk du}{bb d\phi}$, & partant nous aurons cette equation:

$$ap - \frac{aaq du}{bb d\phi} - \frac{Mbcc}{g^3} (vu - \cos \phi. vv)^2 = mkk \frac{du}{bb d\phi}$$

$$\frac{mkk da}{bb d\phi}$$



$$\frac{mkkdu}{bbd\Phi} = ap - \frac{aaqdu}{bbd\Phi} - \frac{Mbcc}{g^3} (Vu - \cos\Phi \cdot Vv)^2$$

de laquelle il faut déterminer la quantité u , pour connoître la force, que la rame sent en frappant l'eau. Alors la rame étant sollicitée

en p par la force $p\pi = p - \frac{aaqdu}{bbd\Phi}$, & en q par la force $q\gamma$

$$= \frac{Mcc}{g^3} (Vu - \cos\Phi \cdot Vv)^2 = \frac{ap}{b} - \frac{(aaq + mkk) du}{b^3 d\Phi}$$

le point d'appuy c soutiendra la somme de ces forces $= p +$

$$\frac{ap}{b} - \frac{(aaq + abq + mkk) du}{b^3 d\Phi}$$

, d'où résulte suivant la direction cd parallèle à la quille la force

$$cd = \frac{(a + b)}{b} p \cos\Phi - \frac{(a(a + b)q + mkk) du \cos\Phi}{b^3 d\Phi}$$

Cette force agissant immédiatement sur le vaisseau, il en faut retrancher la force, dont le rameur en s'appuyant repousse le vaisseau, & qui étant réduite à la direction du vaisseau est $= p \cos\Phi$: Par conséquent la force, qui résulte de l'action de la rame pour accélérer le

mouvement du vaisseau, sera $= \frac{ap}{b} \cos\Phi - \frac{(a(a + b)q + mkk) du \cos\Phi}{b^3 d\Phi}$.

XVI. De là il est d'abord évident, que dès que le mouvement de la rame devient uniforme, ce qui arrive quand $du = 0$, alors la force de la rame pour accélérer le vaisseau, sera la plus grande $=$

$\frac{ap}{b} \cos\Phi$; mais tandis que l'accélération de la rame dure, cette force

sera d'autant plus diminuée, plus la vitesse de la rame ira en augmentant. Il faut donc tâcher d'arranger la manœuvre des rames, en sorte que leur mouvement arrive au plutôt qu'il sera possible à un degré d'uniformité, ou que la plupart de son accélération, qui se fait dans l'eau, se fasse au plus vite. Pour cet effet on doit observer, que les rameurs, avant qu'ils plongent les rames dans l'eau, leur impriment déjà

déjà

déjà à peu près le même mouvement, dont ils sont capables de les tirer par l'eau ; & la force deviendroit même plus grande, si les rames venoient dès le premier instant frapper l'eau encore avec une plus grande vitesse ; ce qui s'exécutera aisément, pourvu que les rameurs commencent déjà, pendant que les rames sont encore levées dans l'air, à les tirer selon la même direction, qu'on leur donne dans l'eau. Car puisqu'on ne rencontre alors que la résistance de l'air, on imprimera aux rames presque dans un instant ce degré requis de vitesse, ou bien un plus grand. Cette règle est d'autant plus nécessaire à garder, lorsque le vaisseau va fort vite. Car alors si la première vitesse, avec laquelle la rame entre dans l'eau, savoir $v u$ étoit plus petite que la vitesse du vaisseau ; le mouvement du vaisseau seroit effectivement arrêté, puisque l'eau agiroit sur la pale suivant la direction γq , & non pas suivant $r q$, comme il a été supposé dans le calcul.

XVII. Si donc la rame étoit d'abord plongée dans l'eau avec le degré de vitesse $v u$, que la force des rameurs est capable de conserver dans l'eau, de sorte que la rame puisse être tirée par l'eau sans être accélérée : par ce que je viens de trouver, la force, dont le vaisseau sera accéléré, seroit $= \frac{a p}{b} \cos \varphi$; & de là on devroit conclure que

plus la raison $\frac{a}{b}$ seroit grande, c. à. d. plus la partie de la rame, qui est hors du vaisseau, seroit courte, plus aussi la force, qui agit sur le vaisseau, devroit être grande ; & c'est à quoi la théorie de Mr. Bouguer aboutit. Mais outre que nous voyons, qu'on est bien éloigné d'observer cette règle dans la pratique, il est aisé de se convaincre, qu'on ne gagneroit non seulement rien, mais qu'on perdrait très considérablement, si l'on faisoit la partie extérieure des rames beaucoup plus courte, que l'intérieure. Car alors la vitesse des bras des rameurs deviendroit beaucoup plus grande, que la vitesse avec laquelle les pales sont poussées par l'eau. Or cette vitesse doit être considérablement plus grande que la vitesse du vaisseau : d'où l'on voit, que pourvu que le mouvement du vaisseau fut médiocre, les rameurs seroient obligés

obligés de mouvoir leurs bras avec une si grande vitesse, qu'ils ne sauroient le soutenir. Cette circonstance étant tout à fait contraire à ce que le calcul vient d'avancer, il s'ensuit évidemment, qu'il y a quelques considérations essentielles omises dans le fondement du calcul, auxquelles on doit nécessairement avoir égard, si l'on veut déterminer l'action des rames conformément à l'expérience.

XVIII. Or je remarque d'abord qu'il y a une grande différence par rapport à la production du mouvement entre les masses, dont on considère l'inertie dans la Mécanique, & les corps humains: les premiers sont susceptibles, à moins qu'on fasse abstraction de la résistance, de tout degré de vitesse, pourvu que la force, dont ils sont sollicités, ait assez de tems d'y agir: & ce n'est que l'accélération du mouvement, qui requiert une dépense des forces. Mais il n'en est pas de même des corps humains; il faut non seulement de la force pour les mettre en mouvement, mais aussi pour les y conserver. On fait qu'un homme, quoiqu'il applique toutes ses forces à courir, n'est pas capable de surmonter un certain degré de vitesse; & alors il lui sera impossible de porter, ou de trainer après lui, le moindre fardeau. Il y a donc une grande différence entre la force, qu'un homme étant en repos peut exercer, & celle dont le même homme est capable, pendant qu'il court, ou qu'il est obligé d'entretenir ses membres dans le mouvement. Par là on conviendra aisément, qu'un rameur, quand il est obligé de tirer la rame fort vite, n'y puisse appliquer la même force, que s'il étoit encore en repos: & il y aura même un degré de vitesse, que le rameur étant obligé de suivre, n'est plus capable d'employer la moindre force. Donc si p marque la force, dont le rameur étant encore en repos tire la rame, on se tromperoit fort, si l'on estimoit de la même quantité la force, que le rameur, étant obligé de se mouvoir soi-même, peut employer à tirer la rame.

XIX. Pour corriger cette faute, qui a été commise dans la détermination précédente, il est nécessaire de savoir ce degré de vitesse, dont un homme est capable de mouvoir ses membres, quand il n'a rien du tout à tirer, qu'on pourra aisément estimer par quelques

observations. Soit θ la hauteur due à cette vitesse, & il est clair, que si la vitesse du point p de la rame, auquel est appliquée la force du rameur, étoit égale à $\sqrt{\theta}$, le rameur n'y pourroit plus exercer la moindre force. Donc, puisque la vitesse du point p est représentée par la hauteur $\frac{aau}{bb}$, s'il y avoit $\frac{aau}{bb} = \theta$, la force du rameur cesseroit entièrement; & elle deviendroit même négative si $\frac{aau}{bb} > \theta$, & dans ce cas le rameur arrêteroit le mouvement de la rame, quand même il n'y rencontreroit la moindre résistance. Or ayant posé $p =$ à la force, dont le rameur tire la rame étant encore en repos, il est évident qu'on doit diminuer cette force p d'autant plus, plus que le mouvement de la rame sera rapide, en sorte que s'il devient $\frac{aau}{bb} = \theta$, la force évanouisse entièrement. Quoiqu'il soit difficile, & peut-être impossible, de déterminer précisément cette diminution, puisque cela demanderoit une connoissance parfaite de la force & de l'action des muscles: il me semble que je ne m'écarterai sensiblement de la vérité, quand je suppose que la force des rameurs, lorsque le point p de la rame a déjà une vitesse due à la hauteur $\frac{aau}{bb}$, est $= p \left(1 - \frac{aau}{bb\theta}\right)$. Car cette expression nous marque la force $= p$, si la rame est encore en repos: & si le point p de la rame a déjà une vitesse $= \sqrt{\theta}$, ou si $\frac{aau}{bb} = \theta$, cette force évanouit.

XX. On m'objectera peut-être, que j'aurois pu former cette formule des vitesses \sqrt{u} & $\sqrt{\theta}$ mêmes, au lieu de leurs quarrés, & que peut-être cette formule $p \left(1 - \frac{a\sqrt{u}}{b\sqrt{\theta}}\right)$ seroit plus convenable, comme étant plus simple. Mais je réponds que si cette formule étoit vraie, il s'en suivroit, que si le mouvement se faisoit en sens contraire, auquel

auquel cas, au lieu de \sqrt{u} on devoit écrire $-\sqrt{u}$; la force agissante deviendroit plus grande, que si la vitesse \sqrt{u} étoit $= 0$, ce qui seroit absurde. Or ma formule $p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$ n'est pas sujette à cet in-

convenient, puisque la vitesse du rameur $\frac{a \sqrt{u}}{b}$, soit qu'elle soit affirmative ou negative diminue également la force principale p .

Ayant donc établi cette expression $p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$ pour marquer la force, que les rameurs exercent sur la rame, nous n'aurons pas besoin d'avoir égard à la diminution, qui est causée par l'accélération de la rame, puisqu'il est permis de supposer que le mouvement de la rame, pendant qu'elle fend l'eau, est uniforme, & qu'il ne s'y fait aucune accélération. Car comme c'est la manœuvre la plus avantageuse des rames, on doit apporter tout le soin, que les rameurs executent cette règle; & quand même la première vitesse, avec laquelle ils plongent les rames dans l'eau, seroit plus grande, la force, dont le vaisseau est poussé, deviendroit un peu plus grande: & le vaisseau marcheroit plus vite que le calcul marqueroit, ce qui seroit une faute à profit. Car comme il est impossible de déterminer exactement toutes les quantités, dont le mouvement du vaisseau dépend, il faut se contenter de le connoître à peu près, & il sera toujours plus à propos de se tromper en défaut qu'en excès: vû qu'il sera un avantage, lorsque le vaisseau marchera plus vite, qu'on n'auroit pensé.

XXI. Ayant donc trouvé, que la force dont la rame est poussée au point p selon la direction $p \pi$, est $= p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$, & la

force de l'eau sur la pale restant comme auparavant $= \frac{M c c}{g^3}$

$(\sqrt{u} - \cos \Phi. \sqrt{v})^2$; puisqu'il n'y a plus d'accélération, il faut que les moments de ces forces soyent égaux entr'eux: ce qui donne cette équation:

$$ap \left(1 - \frac{aa u}{bb \theta}\right) = \frac{M b c c}{g^3} (V u - \cos \Phi \cdot V v)^2$$

de laquelle il faut chercher la quantité u ; & alors la véritable force, avec laquelle l'eau est frappée par la rame suivant la direction $q y$ fera

$$\frac{M c c}{g^3} (V u - \cos \Phi \cdot V u)^2 = \frac{ap}{b} \left(1 - \frac{aa u}{bb \theta}\right)$$

Donc le point d'appuy c étant poussé par la somme de ces deux forces, il en résultera une force suivant la direction $c d$ parallèle à la quille, qui fera =

$$\frac{(a + b) p \cos \Phi}{b} \left(1 - \frac{aa u}{bb \theta}\right)$$

qui est employée à accélérer le mouvement du vaisseau. Mais d'un autre côté le vaisseau étant repoussé par toute la force que les rameurs employent, qui est $= p$, & dans une direction perpendiculaire à celle des rames, il en faut retrancher la force $p \cos \Phi$, pour avoir la véritable force, dont le vaisseau est poussé suivant la direction de son mouvement $A \alpha$: cette force fera donc:

$$\begin{aligned} & \frac{(a + b) p \cos \Phi}{b} \left(1 - \frac{aa u}{bb \theta}\right) - p \cos \Phi \text{ ou bien} \\ & = \frac{a}{b} p \cos \Phi - \frac{(a + b) a a u p \cos \Phi}{b^3 \theta} \end{aligned}$$

XXII. Cette force ne sera donc plus $= \frac{ap}{b} \cos \Phi$, comme nous avons trouvé dans la première recherche, mais elle doit être diminuée d'une quantité, qui est proportionnelle au carré de la vitesse de la pale; & de là il n'en suivra plus cet inconvénient, que le mouvement du vaisseau deviendrait plus vite, plus on raccourcirait la longueur extérieure de la rame $c b = b$. Pour profiter de la formule trouvée

$$\frac{ap}{b} \cos \Phi - \frac{(a + b) a a u p \cos \Phi}{b^3 \theta}$$

qui

qui marque la force dont le vaisseau est poussé dans la direction $A \alpha$; il faut premièrement remarquer, que l'angle φ ne devient jamais si grand, qu'on eut besoin de réfléchir à la diminution de cette force, qui est causée par le $\cos \varphi$; je rejetterai donc ce facteur $\cos \varphi$, comme si la direction du mouvement de la pale restoit toujours parallèle à la quille; ou afin qu'on n'estime cette force trop grande, on la pourra diminuer d'une partie convenable, ou de supposer la force entière des rameurs p un peu plus petite qu'elle n'est en effet: & ainsi cette force sera:

$$\frac{a p}{b} - \frac{(a + b) a a u p}{b^3 \theta}.$$

XXIII. Cette force doit être égale à la résistance, que le vaisseau trouve à fendre l'eau; si l'on veut, que le vaisseau soit déjà réduit à un mouvement uniforme. Or cette résistance a été trouvée là

haut $= \frac{M v}{h}$, où $h = \frac{g^3}{ff}$: d'où nous tirons cette égalité

$$\frac{M v}{h} = \frac{a p}{b} - \frac{(a + b) a a u p}{b^3 \theta}.$$

qui étant jointe à celle, que nous venons de trouver, qui est en supposant l'angle $\varphi = 0$ ou $\cos \varphi = 1$;

$$a p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right) = \frac{M b c c}{g^3} (V u - V v)^2$$

servira à déterminer tant la vitesse des pales $v u$ que celle du vaisseau $v v$. Or ici j'ai supposé, que la force des rames demeure constamment la même; mais puisque dans chaque palade il se passe à peu près deux tiers du tems, que la pale est frappée dans l'air, si nous concevons trois rames, dont l'une agisse après l'autre, il n'y aura toujours qu'une, dont l'action est employée à pousser le vaisseau: & partant ces trois rames ne produiront que l'effet, que je viens de déduire d'une seule.

XXIV. Ainsi quand il y aura sur le vaisseau n rameurs, ils produiront le même effet, que s'il n'y avoit que le tiers $\frac{1}{3} n$, & que

leur force fut sans interruption employée à pousser le vaisseau. Donc si nous posons la force, dont un rameur travaille = p , la force de tous les n rameurs, entant qu'elle s'applique au mouvement du vaisseau, ne sera que = $\frac{1}{3} n p$. Et partant mettant dans la première $\frac{1}{3} n p$ au lieu de p , on trouvera la vitesse du vaisseau, qui est mis en mouvement par n rameurs, en résolvant ces deux équations:

$$\frac{3 M v}{n h} = \frac{a p}{b} - \frac{(a + b) a a p u}{b^3 \theta}$$

$$\frac{M b c c}{g^3} (V u - V v)^2 = a p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$$

dont celle-cy donne d'abord:

$$V v = V u - V \frac{g^3 a p}{M b c c} \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$$

Mais la première donne:

$$V v = V \frac{n a h p}{3 M b} \left(1 - \frac{(a + b) a u}{b b \theta}\right)$$

supposé que chaque rame ne soit agitée que par un seul homme: car s'il y en a plusieurs, il faut partager la pale d'une rame en autant de parties, qu'il y a de rameurs, & alors une telle partie sera la valeur de $c c$.

XXV. Or il faut remarquer, que comme les rameurs par leur force, dont ils s'appuyent dans le vaisseau, en diminuent le mouvement, pendant qu'ils tirent la rame: ils avanceront au contraire le mouvement du vaisseau, pendant qu'ils retirent les rames dans l'air; à quoi nous n'avons pas fait réflexion. C'est pourquoi c'est trop si l'on retranche de la force des rames, la valeur $p \cos \phi$, ou p en sup-

posant $\cos \phi = 1$, & on n'en doit oter que la force $p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta}\right)$, qu'un rameur exerce actuellement sur la rame; puisque l'excès est redressé par le mouvement suivant du rameur. Cette considération nous fournira ces deux équations

$$\frac{3 M v}{n h}$$

$$\frac{3 M v}{n h} = \frac{a p}{b} \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta} \right) \&$$

$$\frac{M b c c}{g^3} (V u - V v)^2 = a p \left(1 - \frac{a a u}{b b \theta} \right)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{3 v}{n h} = \frac{c c}{g^3} (V u - V v)^2$$

ou $V u - V v = V \frac{3 g^3 v}{n c c h}$

& partant $V u = \left(1 + V \frac{3 g^3}{n n c c h} \right) V v$

On aura donc :

$$u = \left(1 + V \frac{3 g^3}{n n c c h} \right)^2 v$$

laquelle valeur étant substituée dans la première équation donnera

$$\frac{3 M v}{n h} = \frac{a p}{b} - \frac{a^3 p}{b^3 \theta} v \left(1 + V \frac{3 g^3}{n c c h} \right)^2$$

d'où nous tirerons enfin :

$$v = \frac{n a b b h \theta p}{3 M b^3 \theta + n a^3 h p \left(1 + V \frac{3 g^3}{n c c h} \right)^2}$$

$$\& u = \frac{n a b b h \theta p \left(1 + V \frac{3 g^3}{n c c h} \right)^2}{3 M b^3 \theta + n a^3 h p \left(1 + V \frac{3 g^3}{n c c h} \right)^2}$$

XXVI. Puisque $g^3 \simeq f f b$, les lettres g & b , s'en iront du calcul, au lieu desquelles il y entrera la quantité $f f$, qui marque une surface plane, qui souffre la même résistance, que le vaisseau propose. De là nous aurons les valeurs suivantes :

$$v =$$



$$v = \frac{n a b b h \theta p}{3 M b^3 \theta + n a^3 h p \left(1 + \frac{f}{c} \sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}$$

$$\& u = \frac{n a b b h \theta p \left(1 + \frac{f}{c} \sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}{3 M b^3 \theta + n a^3 h p \left(1 + \frac{f}{c} \sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2}$$

Pour abréger ces formules posons :

$$\left(1 + \frac{f}{c} \sqrt{\frac{3}{n}}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{nc}}\right)^2 = r; \& \frac{b}{a} = x,$$

& nous aurons :

$$v = \frac{n h \theta p x x}{3 M \theta x^3 + n h p r}$$

$$\& u = \frac{n h \theta p r x x}{3 M \theta x^3 + n h p r}$$

Ici il faut remarquer, que comme $n p$ marque la somme des forces de tous les rameurs prises ensemble ; ainsi $n c c$ marquera la somme des surfaces de toutes les pales prises ensemble.

XXVII. Exprimons les forces M & p par le poids des volumes d'eau, & comme $M = g^3 = ff b$, soit de même $p = \gamma^3$, ou la force d'un rameur soit égale au poids d'un cube d'eau, dont un coté = γ : & cela posé nos expressions seront :

$$v = \frac{n \theta \gamma^3 x x}{3 ff \theta x^3 + n \gamma^3 r} \&$$

$$u = \frac{n \theta \gamma^3 r x x}{3 ff \theta x^3 + n \gamma^3 r}$$

Posons outre cela $\frac{3 ff \theta}{n \gamma^3} = e$, pour avoir

$$v = \frac{\theta x x}{e x^3 + r} \& u = \frac{\theta r x x}{e x^3 + r}$$

d'où

d'où nous concluons, que puisque e , r & x sont des nombres absolus, si l'on exprime la hauteur \mathcal{G} en milliemes parties du pied de Rhin, le vaisseau acquerra une vitesse par laquelle il parcourra dans une seconde

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mathcal{G} x x}{e x^3 + r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

& puisque la vitesse des bras des rameurs est $= \frac{a}{b} \sqrt{u} = \frac{1}{x} \sqrt{u}$,

le point p des rames doit être tiré par les rameurs avec une vitesse, qui fait dans une seconde

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mathcal{G} r}{e x^3 - r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

Or la force requise pour maintenir le vaisseau dans son mouvement étant $= \frac{M v}{h} = \frac{g^3 v}{h} = ff v$, exprimée en volume d'eau, si

nous la divisons par $\frac{n}{3}$, nous trouverons la force qu'un rameur, pendant qu'il fend l'eau, apporte à pousser le vaisseau qui sera $= \frac{3 ff v}{n} = \frac{\gamma^3 e}{\mathcal{G}} v = \frac{p e}{\mathcal{G}} v$, puisque $p = \gamma^3$, & partant cette

force actuelle d'un rameur sera $= \frac{p e x x}{e x^3 + r}$.

XXVIII. Voyons présentement, par quelles operations on pourra commodément parvenir à la connoissance de la vitesse d'un vaisseau, qui est poussé par un nombre donné de rameurs. Pour cet effet je proposerai en abrégé les diverses choses desquelles cette recherche dépend, en omettant celles qui ne se trouvent plus dans les dernieres formules, quoique je fusse obligé d'y avoir égard au commencement du calcul. Premièrement donc, pour ce qui regarde les rameurs, il faut connoître

1. Leur nombre que je pose $= n$.

2. La force dont un rameur commence à tirer la rame, avant qu'elle soit déjà mise en mouvement: Cette force a été supposée \equiv au poids p , ou au poids d'un volume d'eau $\equiv \gamma^3$. Cette valeur dépend de l'application de chaque rameur, & est par conséquent fort variable. On la pourra estimer de 48 jusqu'à 60 livres: & comme un pied cubique d'eau pèse 72 livres, en exprimant γ en pieds, la valeur de γ^3 sera de $\frac{2}{3}$ jusqu'à $\frac{5}{6}$ pieds cubiques.
3. La plus grande vitesse dont un rameur est capable de tirer la rame, quand il n'a aucune résistance à vaincre que je suppose due à la hauteur $\equiv \mathcal{S}$. Cette hauteur \mathcal{S} sera à peu près égale à un pied, d'où résulte une vitesse, qui fait environ 8 pieds dans une seconde.

Ensuite pour la rame nous avons à considérer:

4. La raison qu'il y a entre la partie de la rame qui sort hors du vaisseau, & l'autre qui se trouve dans le vaisseau, ces deux parties étant séparées par le point d'appuy c . La longueur de la partie extérieure se conte du point c jusqu'au centre de la pale b , & j'ai nommé $c b \equiv b$. La longueur de la partie intérieure doit être prise depuis le point d'appuy c jusqu'au point a , où l'on conçoit appliquée la force moyenne de plusieurs rameurs, qui travaillent à la même rame: j'ai nommé cette longueur $c a \equiv a$. Or il n'y entre dans le calcul que le rapport entre ces deux parties, que j'ai posé $\frac{b}{a} \equiv \frac{c b}{c a} \equiv x$.

La surface de chaque pale, que je pose $\equiv c c$, s'il n'y a qu'un rameur, qui la tire: ou s'il y a plusieurs, il faut diviser la surface de la pale par le nombre des rameurs qui s'appliquent à une rame, & la partie résultante sera la valeur de $c c$. Ou on ajoutera les surfaces de toutes les pales dans une somme, qui étant divisée par le nombre de tous les rameurs donnera la valeur de $c c$. Mr. Chazelles donne une description d'une Galere, dans les Mémoires de l'Acad. Royale de Paris pour l'an. 1702. où le nombre des rameurs étoit 260, & toutes les pales rassemblées dans une

somme

somme faisoient 130 pieds quarrés; dans ce cas donc la valeur de c étoit $\frac{1}{4}$ pied quarré.

Du vaisseau même on n'a qu' à considerer:

6. Sa resistance, que je mesure par une surface plane $= ff$, laquelle frappant l'eau directement avec la vitesse du vaisseau, essaye la meme resistance. Si le vaisseau avoit une figure prismatique, la section de la partie submergée, faite perpendiculairement à la quille, donneroit la valeur de ff . Mais les façons, dont les vaisseaux sont presque terminés en pointe vers la prouë, diminuent considerablement cette valeur de ff , desorte qu' ordinairement ff est plusieurs fois plus petite, que la plus large section de la partie submergée, faite perpendiculairement à la quille.

XXIX. Ces six choses, dont dépend la determination de la vitesse du vaisseau, etant connues, qu'on en tire les valeurs suivantes:

$$r = \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{nc}}\right)^2; \quad \& \quad e = \frac{3ff\vartheta}{n\gamma^3}.$$

& alors la vitesse du vaisseau fera

de $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\vartheta x x}{e x^3 + r}}$ pieds dans une seconde; supposé qu'on exprime la hauteur ϑ en milliemes parties du pied de Rhin. Si donc la hauteur ϑ est estimée de 1, 024 pieds de Rhin, ou à peu pres à un pied de Paris, le vaisseau parcourra dans une seconde:

$$8 \sqrt{\frac{x x}{e x^3 + r}} \text{ pieds de Rhin.}$$

où les lettres e , r , & x , marquent des nombres absolus, & la force d'un rameur, pendant qu'il tire la rame par l'eau, laquelle est em-

ployée au mouvement du vaisseau, fera $= \frac{p e x x}{e x^3 + r}$.

XXX. Pour faire l'application de ces formules à la pratique je vais developer l'exemple, que Mr. Bernoulli rapporte dans son Hydrodynamique, pag. 299 d'une Galere, dont Mr. Chazelles a communiqué un recit dans les Memoires A. 1702. Il remarque d'abord

que cette Galere etant tirée par le poids d'un pied cubique d'eau, parcourroit une espace de 2 pieds dans une seconde. Faisant l'application de la formule §. 9 à ce cas ; qui étoit $P = \frac{Mv}{h}$; ou puisque $M = g^3 = ff b$, nous aurons $P = ff v$. Or P etant = à un pied cubique d'eau, ou $P = 1$, & $\frac{1}{4} \sqrt{v} = 2$, nous aurons $v = 64$ milliemes parties d'un pied, ou $v = \frac{64}{1000}$, d'où l'equation $P = ff v$ se changera en $1 = \frac{64}{1000} ff$, de là nous connoissons la valeur de ff , mesure de la resistance, savoir $ff = \frac{1000}{64}$ pieds quarrés, & partant pour cette Galere je pourrai supposer qu'il y avoit $ff = 16$ pieds quarrés.

XXXI. Ensuite le nombre des rameurs étoit 260 ; d'où je tire $n = 260$; & la somme de toutes les pales ensemble égaloit 130 pieds quarrés, d'où nous aurons $cc = \frac{1}{2}$. La partie extérieure des rames étoit deux fois plus longue que l'intérieure, ce qui donne $x = 2$. Et la galere mise ainsi en mouvement a parcouru chaque seconde un espace de $7\frac{1}{2}$ pieds de Paris, ou à peu près $7\frac{1}{2}$ pieds de Rhin. La force p de chaque rameur n'est pas déterminée, mais nous la pourrons trouver de la vitesse du vaisseau. Car puisque $x = 2$ nous aurons d'abord cette equation ; en supposant $\theta = 1$.

$$7\frac{1}{2} = 8 \sqrt{\frac{4}{8e + r}},$$

$$\text{ou } 8e + r = \frac{1024}{225} = 4,55.$$

De plus puisque $ff = 16$, $cc = \frac{1}{2}$; & $n = 260$, nous aurons $e = \frac{48}{260 \gamma^3}$ & $r = (1 + \sqrt{\frac{48}{130}})^2 = 2,5845$; donc $8e = 1,$

9655 &

9655 & $e = 0, 2456 = \frac{24}{130\gamma^3}$: d'où nous obtiendrons $\gamma^3 = 0, 752$ ou $\gamma^3 = \frac{1}{4}$ pied. cubique, de sorte que la force absoluë d'un rameur ait été $p = 54$ livres ; ce qui est un milieu entre les valeurs de 48 lb & 60 lb , que j'ai mises par estime. De plus, la force d'un rameur, qui est actuellement employée à pousser le vaisseau, sera d'environ 12 Livres. Mais prenant tous les rameurs ensemble, des 54 lb que chacun applique, il n'y a que 4 lb , qui agissent sur le mouvement du vaisseau.

XXXII. A l'avenir donc je pourrai avec assez de sûreté supposer $\gamma^3 = \frac{1}{4}$ & $\theta = 1$, d'où j'aurai $e = \frac{4ff}{n}$, pourvû que ff soit exprimée en pieds quarrés, & alors prenant $r = (1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}})^2$.

la vitesse du vaisseau sera de $8 \sqrt{\frac{x \cdot x}{e \cdot x^3 + r}}$ pieds dans une seconde ; & on peut être assuré, que par le moyen de cette formule on trouvera dans chaque cas proposé assez exactement la vitesse avec laquelle le vaisseau sera mis en mouvement. De plus sachant les elemens e , r , & x , dont dépend la vitesse du vaisseau, on sera en état de trouver les plus favorables dispositions de ces elemens, afin que le mouvement du vaisseau devienne le plus rapide qu'il sera possible ; & c'est à cette recherche que je vais m'appliquer avant que de finir ce Memoire.

XXXIII. Or d'abord il est evident, que la diminution des valeurs e & r doivent contribuer à l'acceleration du vaisseau. La valeur de e étant $= \frac{4ff}{n}$, on voit que c'est la diminution de la resistance ff & l'augmentation du nombre des rameurs, qui rendent le mouvement du vaisseau plus rapide. Les memes choses servent aussi à diminuer la valeur de r , de sorte qu'elles contribuent doublement à ce dessein. Mais la valeur de r sera aussi diminuée, si l'on augmente la

surface des pales cc ; & de là on tirera cette maxime, qu'on doit tâcher de rendre les pales aussi larges, que les autres circonstances le permettront; desorte que la manœuvre n'en devienne plus difficile. Il est bien vrai qu'une trop grande largeur seroit accompagnée de plusieurs autres inconveniens, mais je ne doute pas, qu'on ne sauroit tirer de cette considération encore quelque avantage pour accélérer le sillage. Or combien on en pourroit gagner, je déterminerai dans la suite, après avoir découvert la plus avantageuse valeur de x , ou du rapport qu'on doit mettre entre les parties des rames cb & ca .

XXXIV. Outre les valeurs de e & r , la vitesse du vaisseau dépend principalement de la valeur x : car la vitesse évanouit également tant si $x = 0$, que si $x = \infty$: d'où l'on voit qu'il y a une certaine valeur de x , qui produit la plus grande vitesse: & il sera fort important de connoître cette valeur. Pour cet effet on n'a qu'à égaler à zero le

différentiel de $\frac{x \cdot x}{e \cdot x^3 + r}$, ce qui donnera $2rx = ex^4$, ou $x^3 = \frac{2r}{e}$ & $x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}$. Voilà donc le plus avantageux rapport qu'on doit mettre entre les parties de la rame cb & ca ; on le déterminera par cette formule:

$$\frac{cb}{ca} = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}$$

Ce rapport n'est pas donc constant, ou le meme dans tous les vaisseaux; mais il le faut déterminer pour chaque cas proposé à part des valeurs des lettres r & e .

Ayant trouvé:

$$e = \frac{4ff}{n} \quad \& \quad r = \left(1 + \sqrt[3]{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2$$

on voit que ce plus avantageux rapport $\frac{cb}{ca} = x$ dépend premièrement de la résistance du vaisseau f ; secondement du nombre des rames

meurs

meurs n , & enfin de la largeur des pales. Dans la Galere considerée, nous avons à peu près $e = \frac{1}{4}$ & $r = 2\frac{1}{2}$, d'où il s'ensuit $x = \sqrt[3]{20} = 2,71$ ou $x = 2\frac{5}{7}$. Donc le rapport entre cb & ca devrait être $\frac{cb}{ca} = \frac{19}{7}$. Or suivant la description, il y avoit $cf = 6$ pieds & $cg = 12$ pieds, & selon toute apparence la distance cb étoit $= 10$ pieds, & ca environ $= 4$ pieds, puisqu'il y avoit plusieurs rameurs attachés à la meme rame; d'où l'on voit que le rapport dont on s'est servi dans cette Galere, ne differoit pas beaucoup de celui que la theorie nous donne à connoître.

XXXV. Comme la plus avantageuse valeur de $x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}}$ est un *maximum*, il n'est pas necessaire qu'on l'observe dans la pratique si rigoureusement; car soit qu'on prenne x un peu plus grand, ou un peu plus petit, la difference qui en naît dans la vitesse du vaisseau, sera imperceptible. Or supposant comme nous venons de trouver:

$$x = \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} \text{ \& \ } x^3 = \frac{2r}{e}$$

la veritable vitesse du vaisseau sera telle, qu'il parcourra chaque seconde un espace de

$$8 \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} : \sqrt{3r} = \frac{8}{\sqrt{3r}} \sqrt[3]{\frac{2r}{e}} \text{ pieds de Rhin.}$$

Ou cet espace sera de $\frac{5,81933}{\sqrt{e e r}}$ pieds par secondes, supposant $e = \frac{4ff}{n}$ & $r = (1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}})^2$, où ff doit être exprimée en pieds quarrés. Et partant si nous substituons ces valeurs, le vaisseau parcourra chaque seconde un espace de



$$\frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4ff}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)}} \text{ pieds de Rhin,}$$

qui est la plus grande vitesse, dont ce vaisseau est susceptible, & qu'on obtient, si l'on fait

$$x = \frac{c b}{c a} = \sqrt[3]{\frac{n \left(1 + \sqrt{\frac{3ff}{ncc}}\right)^2}{2ff}}$$

XXXVI. Ayant vû que dans l'exemple allegué il y avoit $cc = \frac{1}{2}$ puisqu'il est avantageux d'augmenter la largeur des pales, supposons qu'il soit possible de faire $cc = \frac{3}{4}$, & alors on doit disposer les rames, enforte qu'on obtienne

$$x = \frac{c b}{c a} = \sqrt[3]{\frac{n \left(1 + \sqrt{\frac{4ff}{n}}\right)^2}{2ff}}$$

& la plus grande vitesse, dont le vaisseau fillera par cette disposition sera,

$$\text{de } \frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4ff}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{4ff}{n}}\right)}} \text{ pieds par seconde.}$$

Par là on voit que, tant la proportion entre les parties des rames, que la vitesse du vaisseau, dépend uniquement du rapport $\frac{ff}{n}$, qu'il y a entre la resistance ff , qui doit être exprimée en pieds quarrés, & le nombre des rameurs: de sorte que dès qu'on connoit ce rapport $\frac{ff}{n}$, on est en état de déterminer la plus avantageuse disposition des

rames, ou le rapport $x = \frac{c b}{c a}$, & la vitesse meme, qui par ce moyen sera imprimée au vaisseau.

XXXVII. Dans

XXXVII. Dans l'exemple calculé cy - dessus, la valeur de la résistance absolue étoit $ff = 16$, & le nombre des rameurs $n = 260$, ainsi la valeur de la fraction $\frac{ff}{n}$ étoit à peu près $= \frac{1}{16}$, ou $n = 16 ff$

Supposons qu'il soit généralement $n = m ff$, ou $\frac{ff}{n} = \frac{1}{m}$, & nous aurons ces expressions :

$$x = \frac{c b}{c a} = \sqrt[3]{\frac{4}{m} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}$$

& le vaisseau décrira par son mouvement chaque seconde un espace de

$$\frac{5,81933}{\sqrt[3]{\frac{4}{m} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}} \text{ pieds de Rhin.}$$

De ces' formules je construirai la table suivante, où la première colonne marque le nombre des rameurs exprimé par ff , qui est l'aire d'une surface plane, dont la résistance est la même, que celle du vaisseau, & ff est supposé être donné en pieds quarrés. La seconde colonne représente le rapport des parties de chaque rame $bc : ac$, ou la valeur de la fraction $\frac{bc}{ac}$, exprimée en fractions décimales. La troisième colonne contient la vitesse du vaisseau, ou marque combien de pieds le vaisseau parcourra dans une seconde. La quatrième colonne indique le chemin parcouru dans une heure, pareillement en pieds du Rhin. Voici la table que j'ai calculée, la résistance du vaisseau étant égale à la résistance d'une surface plane $= ff$ donnée en pieds quarrés.

Nombre des Rameurs.	Rapport entre $b c$ & $a c$ ou la valeur de $\frac{b c}{a c}$.	Espace parcouru dans une seconde en pieds de Rhin.	Espace parcouru dans une heure en Pieds de Rhin.
0 ff	1, 2599	0, 0000	0
1 ff	1, 4620	1, 3505	4862
2 ff	1, 5417	1, 8600	6696
3 ff	1, 6510	2, 5814	9151
4 ff	1, 7997	3, 4430	12395
5 ff	1, 9096	4, 0935	14737
6 ff	2, 0000	4, 6188	16628
7 ff	2, 0779	5, 0662	18237
8 ff	2, 1472	5, 4596	19654
9 ff	2, 2098	5, 8128	20926
10 ff	2, 2674	6, 1348	22085
11 ff	2, 3208	6, 4315	23154
12 ff	2, 3708	6, 7076	24148
13 ff	2, 4178	6, 9660	25078
14 ff	2, 4623	7, 2100	25956
15 ff	2, 5044	7, 4403	26785
16 ff	2, 5449	7, 6602	27577
17 ff	2, 5836	7, 8672	28329
18 ff	2, 6208	8, 0698	29051
19 ff	2, 6564	8, 2617	29742
20 ff	2, 6909	8, 4470	30409
21 ff	2, 7242	8, 6247	31049
22 ff	2, 7565	8, 7974	31670
23 ff	2, 7877	8, 9637	32269
24 ff	2, 8181	9, 1253	32857
25 ff	2, 8477	9, 2817	33414
26 ff	2, 8765	9, 4339	33962
27 ff	2, 9044	9, 5820	34495
28 ff	2, 9317	9, 7262	35014
29 ff	2, 9584	9, 8666	35520
30 ff	2, 9845	10, 0036	36013
31 ff	3, 0099	10, 1372	36494
32 ff	3, 0350	10, 2682	36966
33 ff	3, 0599	10, 3966	37429
34 ff	3, 0845	10, 5225	37884
35 ff	3, 1089	10, 6468	38330
36 ff	3, 1330	10, 7695	38767
37 ff	3, 1569	10, 8906	39196
38 ff	3, 1806	11, 0101	39617
39 ff	3, 2041	11, 1280	40030
40 ff	3, 2274	11, 2443	40435
41 ff	3, 2505	11, 3590	40842
42 ff	3, 2734	11, 4721	41241
43 ff	3, 2961	11, 5836	41642
44 ff	3, 3186	11, 6935	42045
45 ff	3, 3409	11, 8018	42449
46 ff	3, 3630	11, 9085	42855
47 ff	3, 3849	12, 0136	43262
48 ff	3, 4066	12, 1171	43671
49 ff	3, 4281	12, 2190	44081
50 ff	3, 4494	12, 3193	44493
51 ff	3, 4705	12, 4180	44906
52 ff	3, 4914	12, 5151	45321
53 ff	3, 5121	12, 6106	45737
54 ff	3, 5326	12, 7045	46154
55 ff	3, 5529	12, 7968	46572
56 ff	3, 5730	12, 8875	46991
57 ff	3, 5929	12, 9766	47412
58 ff	3, 6126	13, 0641	47834
59 ff	3, 6321	13, 1500	48257
60 ff	3, 6514	13, 2343	48681
61 ff	3, 6705	13, 3170	49106
62 ff	3, 6894	13, 3981	49532
63 ff	3, 7081	13, 4776	49959
64 ff	3, 7266	13, 5555	50387
65 ff	3, 7449	13, 6318	50816
66 ff	3, 7630	13, 7065	51246
67 ff	3, 7809	13, 7796	51677
68 ff	3, 7986	13, 8511	52109
69 ff	3, 8161	13, 9210	52542
70 ff	3, 8334	13, 9893	52976
71 ff	3, 8505	14, 0560	53411
72 ff	3, 8674	14, 1211	53847
73 ff	3, 8841	14, 1846	54284
74 ff	3, 9006	14, 2465	54722
75 ff	3, 9169	14, 3068	55161
76 ff	3, 9330	14, 3655	55601
77 ff	3, 9489	14, 4226	56042
78 ff	3, 9646	14, 4781	56484
79 ff	3, 9801	14, 5320	56927
80 ff	3, 9954	14, 5843	57371
81 ff	4, 0105	14, 6350	57816
82 ff	4, 0254	14, 6841	58262
83 ff	4, 0401	14, 7316	58709
84 ff	4, 0546	14, 7775	59157
85 ff	4, 0689	14, 8218	59606
86 ff	4, 0830	14, 8645	60056
87 ff	4, 0969	14, 9056	60507
88 ff	4, 1106	14, 9451	60959
89 ff	4, 1241	14, 9830	61412
90 ff	4, 1374	15, 0193	61866
91 ff	4, 1505	15, 0540	62321
92 ff	4, 1634	15, 0871	62777
93 ff	4, 1761	15, 1186	63234
94 ff	4, 1886	15, 1485	63691
95 ff	4, 2009	15, 1768	64149
96 ff	4, 2130	15, 2035	64608
97 ff	4, 2249	15, 2286	65068
98 ff	4, 2366	15, 2521	65529
99 ff	4, 2481	15, 2740	65991
1000 ff	17, 3270	78, 4610	282460

XXXVIII. Cette table peut donner lieu à plusieurs réflexions curieuses. Premièrement on voit, qu'afin que le vaisseau obtienne le mouvement le plus vite, qui est possible par les mêmes forces, la partie extérieure des rames doit toujours être plus longue que la partie intérieure; condition que l'expérience a donnée à connoître, & qui se pratique généralement. En second lieu nous voyons, que plus le mouvement du vaisseau doit être rapide, plus grande doit être aussi la raison entre la partie extérieure des rames & l'intérieure; car si le vaisseau doit achever chaque heure un espace de 16600 pieds, la partie extérieure des rames doit être deux fois plus longue que l'intérieure: & pour que l'espace parcouru dans une heure soit de 36500 pieds, la partie extérieure doit être trois fois plus longue. De plus on voit, que la vitesse du vaisseau ne suit pas la raison du nombre des rameurs, ni celle des racines quarrées: car, pour rendre la vitesse du vaisseau deux fois plus grande, le nombre des rameurs doit être plus que quatre fois plus grand. La vitesse de 16628 pieds par heure demande le nombre des rameurs $= 4$ ff, mais la vitesse double de 33256 pieds par heure demande un nombre de rameurs presque $= 23$ ff, qui est presque 6 fois plus grand. Enfin on reconnoit, que plus la vitesse est grande, plus elle augmente lentement en augmentant le nombre des rameurs: & quoiqu'un nombre infini de rameurs doive produire une vitesse infiniment grande, pourtant un nombre prodigieux de rameurs comme de 10000 ff ne produit qu'une mediocre vitesse, savoir de 282460 pieds par heure, qui ne seroit que 10 fois plus grande, que si le nombre des rameurs n'étoit que $= 1$ ff. Or dans ce cas de 10000 ff rameurs, la partie extérieure des rames devoit être environ $17\frac{1}{3}$ fois plus longue que la partie intérieure.

XXXIX. Par le moyen de cette table on est aussi en état de construire & d'arranger un vaisseau, en sorte qu'il devient capable de faire un chemin donné par heure. Si l'on veut conter le chemin par milles d'Allemagne, il faut remarquer, qu'une telle mile contient 23640 pieds de Rhin. Et partant afin que le vaisseau fasse une mille d'Allemagne par heure, le nombre des rameurs doit être $= 9\frac{1}{2}$ ff;

& les rames doivent être partagées, en sorte que $\frac{bc}{ac} = 2\frac{1}{2}$ ou que

$ac : bc = 3 : 7$. Mais que le vaisseau fasse $1\frac{1}{2}$ milles par heure ou 35460 pieds, il faut un nombre de rameurs $= 27 ff$, & bc doit être presque 3 fois plus longue que ab . Donc la Galère considérée cy-dessus, où il étoit $ff = 16$, parcourra par heure une mille d'Allemagne, si elle est poussée par 152 Rameurs: mais si l'on vouloit qu'elle fit $1\frac{1}{2}$ milles d'Allemagne, on y devoit mettre 432 Rameurs. Et partant si cette Galère n'est pas capable de recevoir un si grand nombre de rameurs, il sera impossible qu'elle achève $1\frac{1}{2}$ mile par heure. Car il faut remarquer, que plus on y place de rameurs, à cause de leur poids la Galère s'enfoncera plus dans l'eau, & sa résistance, & partant la valeur de ff , deviendroit plus grande. Par cette raison il sera tout à fait impossible de disposer une Galère, tellement qu'elle soit capable de parcourir deux milles d'Allemagne par heure, puisqu'il falloit pour cet effet un nombre de rameurs $= 54 ff$, si ce n'étoit qu'on pût trouver moyen de diminuer la résistance très considérablement; or il semble que d'autres circonstances, auxquelles il faut avoir égard, ne permettent pas une si grande diminution.

XL. Pour mieux voir, combien la rigoureuse observation de la proportion trouvée entre les parties ac & bc de chaque rame, contribuë à l'accélération du vaisseau, je considérerai le cas, où le nombre des rameurs est $= 16 ff$, & la vitesse du vaisseau de 29051 pieds par heure, si l'on fait usage de la plus avantageuse disposition des rames

$\frac{bc}{ac} = x = 2,6208$; & je chercherai la vitesse, que ce même vaisseau acquerroit, si l'on ne mettoit que $x = 2$. Dans ce cas la

vitesse du vaisseau seroit de $\frac{16}{\sqrt{(8c + r)}}$ pieds dans une seconde,

& partant de $\frac{57600}{\sqrt{(8c + r)}}$ pieds par heure. Or pour ce cas

nous

nous aurons $e = \frac{4f}{n} = \frac{1}{4}$ & $r = (1 + \sqrt{\frac{1}{4}})^2 = \frac{9}{4}$ à cause de $c c = \frac{3}{4}$: donc $8e + r = 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$, & la vitesse du vaisseau sera $= \frac{115200}{\sqrt{17}} = 27940$ pieds par heure. Par conséquent, si au lieu de la proportion la plus avantageuse entre les parties des rames $\frac{bc}{ac} = 2,6208$, on faisoit $\frac{bc}{ac} = 2$, on perdroit dans la vitesse du vaisseau 1111 pieds par heure, ce qui seroit une perte déjà assez considérable. Puisque j'ai remarqué que la valeur des pales $c c = \frac{3}{4}$ pieds quarrés est plus avantageuse que si l'on faisoit $c c = \frac{1}{2}$, je calculerai encore la vitesse du même vaisseau pour cette valeur $c c = \frac{1}{2}$ en supposant $x = 2$. Dans ce cas la valeur de e reste $= \frac{1}{4}$, mais on aura $r = (1 + \sqrt{\frac{3}{8}})^2 = 2,5997$, & la vitesse du vaisseau fera de 26856 pieds par heure; d'où il est clair combien il est important d'augmenter la grandeur des pales, autant qu'il sera possible.

