ex quibus reſultabunt tres ſequentes aequationes $u+y=mb$; $t-x=nb$ et $g=\sqrt{(2at+tt)}+\sqrt{(2ax+xx)}$ ita vt habeantur quinque aequationes, ex quibus has quinque incognitas t, u, x, y, et a definiri oportebit, quod opus niſi ſubſidium adſit, eſſet maxime laborioſum et prolixum.

§. 771. Quoniam autem in praxi longitudo veli g non multum excedere ſolet interuallum AB, velum non admodum incuruabitur, eritque id circo radius curuedinis a quantitas praegrandis, ita vt futurum ſit proxime $\sqrt{(2at+tt)}=\sqrt{2at}+\frac{tt}{2\sqrt{2at}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2at+tt)}}=\frac{a}{\sqrt{2at}}-\frac{t}{4\sqrt{2at}}$; et $\sqrt{(2ax+xx)}=\sqrt{2ax}+\frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2ax+xx)}}=\frac{a}{\sqrt{2ax}}-\frac{x}{4\sqrt{2ax}}$. Vnde erit $u=\sqrt{2at}-\frac{tt}{6\sqrt{2at}}$ et $y=\sqrt{2ax}-\frac{xx}{6\sqrt{2ax}}$. Ex his definitis fit $\sqrt{2at}+\sqrt{2ax}-\frac{tt}{6\sqrt{2at}}-\frac{xx}{6\sqrt{2ax}}=mb$; $t-x=nb$; et $g=\sqrt{2at}+\sqrt{2ax}+\frac{tt}{2\sqrt{2at}}+\frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$. Ergo $g-mb=\frac{2tt}{3\sqrt{2at}}+\frac{2xx}{3\sqrt{2ax}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{3(g-mb)}{2t\sqrt{t}+2x\sqrt{x}}$; ideoque $\sqrt{2a}=\frac{2t\sqrt{t}+2x\sqrt{x}}{3(g-mb)}$. Subſtituatur hic valor pro a inuentus in altera aequatione, prodibitque $g=\frac{2tt+2xx+2t\sqrt{tx}+2x\sqrt{tx}}{3(g-mb)}+\frac{3}{4}(g-mb)$; ideoque erit $(t^{1:2}+x^{1:2})(t^{3:2}+x^{3:2})=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{8}$.

§. 772. Ad has aequationes reſoluendas pono $\sqrt{t}+\sqrt{x}=q$, $\sqrt{t}-\sqrt{x}=r$; erit $\sqrt{t}=\frac{q+r}{2}$, $\sqrt{x}=\frac{q-r}{2}$; et $t-x=qr$; atque $t^{3:2}+x^{3:2}=\frac{q^3+3qrr}{4}$, vnde erit $\sqrt{2a}=\frac{q(qq+3rr)}{6(g-mb)}$ et reliquae aequationes fient $qr=nb$ et $\frac{qq(qq+3rr)}{4}=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{8}$ ſeu $qq(qq+3rr)=\frac{3}{2}(g+3mb)(g-mb)$, per priorem vero eſt $qqrr=nnbb$, ergo illa per hanc diuiſa $\frac{qq+3rr}{rr}=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{2nnbb}$; vnde eſt $\frac{qq}{rr}=\frac{3(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}{2nnbb}$, et $\frac{q}{r}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}}{nb}$ vnde denique fit $q=\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}$ et et $r = \frac{nb}{\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$. Ex his fit

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)} + nb}{2\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$$ atque

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)} - nb}{2\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}.$$

§. 773. Cum deinde sit $\sqrt{2a} = \frac{q(qq+rr)}{6(g-mb)}$; erit $\sqrt{2a}$ $= \frac{g+3mb}{4q} = \frac{g+3mb}{4\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}$; atque $a = \frac{(g+3mb)^2}{16\sqrt{6(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}}$; vnde cognoscetur vis, qua velum in A et B secundum tangentes trahi debet, quo in aequilibrio retineatur, erit scilicet vtraque vis $= \frac{acv}{800}\frac{M}{V}$. Ducantur ergo ex A et B tangentes AK et BL, quae se mutuo secent in O, et quia vires ambae sunt aequales, media directio vis venti GO angulum AOB bisecabit; erit autem angulus AOB $=$ AKH $+$ BLH; ideoque A OG $= \frac{1}{2}$AKH $+ \frac{1}{2}$BLH, et angulus OGL $= \frac{1}{2}$BLH $- \frac{1}{2}$AKH. Quodsi autem vis ipsa venti ponatur $=$ P fiet P: $\frac{acv}{800}.\frac{M}{V} =$ sin. AOB: sin. $\frac{1}{2}$AOB $= 2$ cos. $\frac{1}{2}$(AKH $+$ BLH): 1. ideoque erit vis $P = \frac{acv\,\mathrm{cos.}\frac{1}{2}(\mathrm{AKH}+\mathrm{BLH})}{400}.\frac{M}{V}$.

§. 774. Est vero anguli AKH cosinus $= \frac{\sqrt{(2at+tt)}}{a+t} = \frac{\sqrt{2at}}{a} - \frac{3tt}{2a\sqrt{2at}}$, et anguli BLH cosinus $= \frac{\sqrt{(2ax+xx)}}{a+x} = \frac{\sqrt{2ax}}{a} - \frac{3xx}{2a\sqrt{2ax}}$; vnde erit sin. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2at}}{2a} + \frac{3tt}{4a\sqrt{2at}}\right)}$ $= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{at}}{2a}}$; et cos. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{at}}{2a}}$; similique mo-

do

do ſin. $\frac{1}{2}$BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{ax}}{2a}$, et coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{ax}}{2a}$. Ex his fit coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{x}{\sqrt{2ax}} + \frac{t}{\sqrt{2at}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(\sqrt{t} + \sqrt{x}) = \frac{q}{\sqrt{2a}} = \frac{6(g-mb)}{qq+3rr}$ et a coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} = \frac{qq(qq+3rr)}{12(g-mb)}$; et eſt $qq(qq+3rr) = \frac{3}{2}(g+3mb)(g-mb)$ ergo a coſ. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH) $= \frac{1}{8}(g+3mb)$; vnde prodit vis a vento excepta $\mathrm{P} = \frac{cv(g+3mb)}{3200} \cdot \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V}}$; hacque vi velum a vento in directione GO propelletur.

§. 775. Haec expreſſio tantum prope eſt vera, et quoniam ſinus et coſinus angulorum $\frac{1}{2}$ AKH et $\frac{1}{2}$ BLH tantum ad duos terminos expreſſimus neglectis ſequentibus omnibus, dum in praecedentibus vlterius proceſſimus, nimium concluſio a veritate aberrabit. Quocirca eosdem ſinus et coſinus accuratius exhiberi conueniet; extractione radicis autem vlterius producta reperietur:

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AKH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$$

$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AKH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$$

$$\text{ſin}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BLH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}$$

$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BLH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}.$$

Ex quibus debito modo combinatis colligitur: coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) $= 1 - \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2}{4a} + \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2(7t+6\sqrt{tx}+7x)}{32aa}$ et coſ. $\frac{1}{2}$(BLH + AKH) $= \frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{t}-x\sqrt{x}}{2a\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{x}-x\sqrt{t}}{4a\sqrt{2a}}$.

§. 776. Reſumamus ſuperiores ſubſtitutiones $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$ et $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$, vnde eſt $\sqrt{t} = \frac{q+r}{2}$ et $\sqrt{x} = \frac{q-r}{2}$; et fiet $7t + 6\sqrt{tx} + 7x = 5qq + 2rr$. Quibus ſubſtitutis prodibit coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) = coſ. OGL $= 1 - \frac{rr}{4a} + \frac{rr(5qq+2rr)}{32aa}$. At ex ſuperioribus eſt $q = \frac{g+3mb}{4\sqrt{2a}}$ et $r = \frac{4nb\sqrt{2a}}{g+3mb}$ et $a = \frac{(g+3mb)^2}{16\sqrt{6}(gg+2mgb-3mmbb-[illegible])}$.

Atque

Atque ex his obtinebitur cos. OGL $= 1 - \frac{8nnbb}{(g+3mb)^2} + \frac{240nnbb(g-mb)}{(g+3mb)^3} - \frac{416n^4b^4}{(g+3mb)^4}$. Ad vim ipsam venti P autem inueniendam erit: a cos. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(2t-\sqrt{tx}+2x)}{4\sqrt{2a}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(qq+3rr)}{8\sqrt{2a}}$ ideoque oritur a cos. $\frac{1}{2}$AOB $= \frac{g+3mb}{8} - \frac{3}{4}(g-mb) = \frac{9mb-5g}{8}$. Ex quo inuenitur vis velum in directione GO vrgens $= P = \frac{cv(9mb-5g)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; quae multo propius ad veritatem accedit.

§. 777. Interim tamen patet, hanc approximationem vsurpari non posse, si vel b multo minor sit quam g, vel etiam angulus BFH sensibiliter a recto discrepet. Quamobrem relicta approximatione praecedente, quae ex hypothesi quod a sit quantitas vehementer magna; quippe quae satis exigua imo nulla esse potest, si obliquitas anguli BFH sit permagna, et iste angulus penitus euanescat, etiamsi b non multo minor sit quam g. Resumamus igitur sine vlla approximatione superiores aequationes, quae erant: $g = \sqrt{(2at+tt)} + \sqrt{(2ax+xx)}$; $nb = t - x$; et applicatis u et y per logarithmos integratis fiet $e^{\frac{mb}{a}} aa = (a+t+\sqrt{(2at+tt)})(a+x+\sqrt{(2ax+xx)})$, denotante e numerum, cuius logarithmus $= 1$. Quodsi iam ponatur $t + x = p$, ob $t - x = nb$, prima aequatio reducta dabit $p = -2a + g\sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$.

§. 778. Cum igitur sit $t = \frac{p+nb}{2}$ et $x = \frac{p-nb}{2}$ erit $t = -a + \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$ atque $x = -a - \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$. Tum vero erit $\sqrt{(2at+tt)} = \frac{g}{2} + \frac{nb}{2}\sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$ et $\sqrt{(2ax+xx} = \frac{g}{2} - \frac{nb}{2}\sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$. Qui valores si in tertia aequatione substi-

ſubſtituantur, extracta radice quadrata erit $\frac{2a}{\sqrt{(gg-nnbb)}}$ $e^{\frac{mb}{2a}} = 1 + \sqrt{\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)}$, ex qua aequatione valorem ipſius a erui oportet. Ad hoc ponatur breuitatis ergo $\sqrt{(gg-nnbb)} = b$; et fiet $2ae^{\frac{mb}{2a}} = b + \sqrt{(4aa+bb)}$ ſeu $\frac{mb}{2a} = l\frac{b+\sqrt{(4aa+bb)}}{2a}$, logarithmo autem in ſeriem conuerſo fiet $\frac{mb}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{1\,b^3}{2\cdot3\cdot8\,a^3} + \frac{1\cdot3\,b^5}{2\cdot4\cdot5\cdot32\,a^5} -$ etc. ſeu $mb = b - \frac{b^3}{6\cdot4\,aa} + \frac{3}{40}\frac{b^5}{16\,a^4} - \frac{5\,b^7}{112\cdot64\,a^6} +$ etc.

§. 779. Haec ſeries, ſi b non multo minor fuerit quam g, ſemper vehementer conuergit, nam angulus BFH propemodum fuerit rectus, erit radius oſculi a vehementer magnus. Sin autem angulus BFH fiat vehementer paruus, tum ob n proxime $= 1$, fiet b quantitas minima; vnde et hoc caſu ſeries valde conuergit, etiamſi a non ſit quantitas tantopere magna. Ob has ergo rationes erit proxime $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b}$. Ponatur autem $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + r$ erit $\frac{b^4}{16a^4} = \frac{36(b-mb)^2}{bb}$, et $r = \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$; vnde fiet propius $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$, hincque $2a = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(b-mb)}} - \frac{9\sqrt{6b(b-mb)}}{40}$, quo valore tanquam ſatis accurato tuto vti licebit.

§. 780. Cognito itaque valore ipſius a, erit: ſin. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\frac{a+t-\sqrt{(2at+tt)}}{2(a+t)}} = \sqrt{\frac{(g-nb)(\sqrt{(4aa+bb)}-b)}{2nbb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}}$, coſ. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\frac{a+t+\sqrt{(2at+tt)}}{2(a+t)}} = \sqrt{\frac{(g+nb)(\sqrt{(4aa+bb)}+b)}{2nbb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}}$, ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{a+x-\sqrt{(2ax+xx)}}{2(a+x)}} = \sqrt{\frac{(g+nb)(\sqrt{4aa+bb}-b)}{-2nbb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}}$, coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{a+x+\sqrt{(2ax+xx)}}{2(a+x)}} = \sqrt{\frac{(g-nb)(\sqrt{4aa+bb}+b)}{-2nbb+2g\sqrt{(4aa+bb)}}}$. Ex his pro horum angulorum ſumma ac differentia reperitur coſ. $\frac{1}{2}$ AKH. coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \frac{b(\sqrt{(4aa+bb)}+b)}{2\sqrt{(b^4+4aagg)}}$, atque ſin. $\frac{1}{2}$ AKH. ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $=$

bW

$\frac{b(\sqrt{(4aa+bb)}-b)}{2\sqrt{(b^4+4aagg)}}$; vnde erit cos. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) = cos. $\frac{1}{2}$ AOB $= \frac{bb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ et cos. $\frac{1}{2}$(BLH - AKH) = cos. OGK $= \frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$.

§. 781. Cum igitur recta OG sit directio media vis venti, quam velum AHB sustinet, ea cognoscetur ex angulo OGK, quem haec directio vis venti cum vera venti directione VH facit, cuius anguli cum sit cosinus $= \frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ erit eiusdem sinus $= \frac{2nab}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$, et tangens $= \frac{2nab}{b\sqrt{(4aa+bb)}}$. Fit autem substituto valore ipsius a ante inuento: cos. OGK $= \sqrt{\frac{116bb-162mbb+81mmbb}{116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb}}$ sin: OGK $= \frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$; ergo tang. OGK $= \frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb)}}$. Hinc primo patet si sit $n=0$ et $m=1$, seu si directio venti VH ad AB sit normalis, fore angulum OGK $=0$; at si angulus VFA fere euanescat, vt sit proxime $n=1$ et $m=0$ erit tang. OGK $= \frac{b\sqrt{5}}{\sqrt{116(gg-bb)}}$; qui ergo angulus sit rectus si $b=g$, hoc est si velum in planum extendatur.

§. 782. Cum deinde posita vis venti in velum exertae quantitate $=$ P, sit P $= \frac{cv}{400} \cdot \frac{M}{V} \cdot a$ cos. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH), erit a cos. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{abb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}} = \frac{bb}{2nb}$ sin. OGH $= \frac{b^2\sqrt{5}}{2\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$: atque his substitutis fiet P $= \frac{bbcv}{800nb} \cdot \frac{M}{V}$ sin. OGH, vel etiam P $= \frac{bbcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$ existente $bb = gg - nnbb$. Si ponatur $m=1$ et $n=0$, quo casu fit recta AB normalis ad directionem venti, erit $b=g$; fitque P $= \frac{ggcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116gg-192gb+81bb)}}$, et si insuper fiat $b=g$, erit P $= \frac{gcvM}{800V}$; quae est ea ipsa expressio, quam supra pro vi venti in velum planum normaliter impingentis inuenimus.

§. 783. Quoniam b ad g proxime accedit ponamus $b = g - u$ eritque u quantitas valde parua. Hinc fit $bb = mmgg + 2nngu - nnuu$ et $b = mg + \frac{nnu}{m} - \frac{nnuu}{2m^3g}$; quibus ſubſtitutis prodit $\sqrt{(116bb - 192mbb + 81mmbb + 5mnbb)} = \sqrt{(5gg + 30gu - 15uu + \frac{96uu}{mm})}$. Ergo habebitur $P = \frac{Mcv(mmgg + 2nngu - nnuu)}{800V\sqrt{(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})}}$. Cum vero ſit $(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{g} - \frac{3u}{gg} + \frac{15uu}{g^3} - \frac{48uu}{5mmg^3}$ erit $P = \frac{Mcv}{800V}(mmg - 3mmu + 2nnu + \frac{uu}{5g}(27mm - 83nn))$ et ſin. $OGH = n(1 - \frac{4u}{g} + \frac{18uu}{gg} - \frac{48uu}{5mmgg}$ Quae formulae pro quouis caſu ſatis expedite tam mediam directionem quam ipſam quantitatem vis venti in velum impenſae praebebunt.

§. 784. At praeter angulum OGH, quem directio vis venti cum ipſa venti directione facit, ad verum mediae directionis OG ſitum definiendum noſſe oportet punctum C, in quo media directio vis venti OG rectam AB ſecat. Eſt autem ob angulum AOB biſariam ſectum, $AC : BC = AO : BO =$ ſin. ABO : ſin. BAO; qui anguli ex iam cognitis ita definiuntur, vt ſit ſin. $ABO =$ ſin. $(BFH + BLH)$ et ſin. $BAO =$ ſin. $(BFH - AKH)$; ad quos exprimendos eſt ſin. $BFH = m$; et coſ. $BFH = n$ ſin. $BLH = \frac{2ab}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; coſ. $BLH = \frac{bg - nb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ ſin. $AKH = \frac{2ab}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; coſ. $AKH = \frac{bg + nb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$. Ex quibus per angulorum compoſitionem impetrabimus ſin. $ABO =$ ſin. $(BFH + BLH) = \frac{mbg + 2nab - mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ ſin. $BAO =$ ſin. $(BFH - AKH) = \frac{mbg - 2nab + mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$.

§. 785.

§. 785. His ſinuum expreſſionibus ad communem denominatorem redactis, reperietur ratio $AC : BC = 2nnabbb - 4mnaagb + b(mbb + 2nag)\sqrt{(4aa+bb)} : 2nnabbb + 4mnaagb + b(mbb - 2nag)\sqrt{(4aa+bb)}$; quae commodius per factores ita exhibetur $AC : BC = 2nab(nbb - 2mag) + b(mbb + 2nag)\sqrt{(4aa+bb)} : 2nab(nbb + 2mag) + b(mbb - 2nag)\sqrt{(4aa+bb)}$, vnde fit $AB : AC - BC = 2nnabbb + mb^3\sqrt{(4aa+bb)} : -4mnaagb + 2nabg\sqrt{(4aa+bb)}$. Cum ergo ſit $AB = b$ fiet $AC - BC = \frac{2nagb(b\sqrt{(4aa+bb)} - 2mab)}{bb(mb\sqrt{(4aa+bb)} + 2nnab)} = \frac{2nagb(4maagg + mb^4 - 2abb\sqrt{(4aa+bb)})}{bb(4aabb - 4nnaagg + mmb^4)}$. At eſt $\frac{\sqrt{(4aa+bb)}}{2a} = \sqrt{\left(1 + \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{81(b-mb)^2}{5bb}\right)} = 1 + \frac{3(b-mb)}{b} + \frac{14(b-mb)^2}{5bb}$ ergo $AC - BC =$

$$\frac{4nagb(b-mb)\left(2 + \frac{9(b-mb)}{5b}\right)}{bb\left(mb + nnb + 3m(b-mb) + \frac{18m(b-mb)^2}{5b}\right)} =$$

$2ng\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{4m}{3b} + \frac{3}{20b}\right)(b-mb)\right)\sqrt{\frac{6(b-mb)}{b}}$. Punctum ergo C ſemper quam minime a rectae AB puncto medio diſtabit.

§. 786. Sit vt ante poſuimus $b = g - u$, atque u quantitas reſpectu g vehementer parua, erit $b^2 = mmgg + 2nngu$, neglectis terminis, in quibus u plures vna habet dimenſiones, et $b = mg + \frac{nnu}{m}$; vnde erit $b - mb = mu + \frac{nnu}{m} = \frac{u}{m}$, et $\sqrt{\frac{b-mb}{b}} = \sqrt{\frac{u}{mmg}}$; ideoque $2a = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{5(b-mb)}} = \frac{mmg\sqrt{g}}{\sqrt{5u}}$ proxime. Hinc autem fiet $AC - BC = \frac{2ng}{3m}\sqrt{\frac{6u}{g}} = \frac{2n}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gu}$. Quoniam porro ipſi a proportionalis eſt vis, quae requiritur ad velum in ſtatu ſuo conſeruandum, erit vis, quam funes velo in punctis A et B alligati ſuſtinent, vt $\frac{mm}{\sqrt{u}}$, hoc eſt directe vt quadratum

ſinus

finus anguli VFA, quem directio venti cum recta AB constituit et reciproce vt radix quadrata ex u. Vnde constat velum non nisi vi infinita in superficiem planam extendi posse; et hanc ob causam fieri nequit, vt vela vento inflata non incuruentur.

§. 787. In his, quae hactenus sunt tradita, vela instar singulorum filorum, quae omnis latitudinis sint expertia, considerauimus: quanquam enim infinita eiusmodi filorum sibi parallelorum multitudo velum constituere videtur, tamen singula fila velum constituentia non eodem modo a vento afficiuntur, ac si essent solitaria; atque sic, quae de curuatura filorum a vento impulsorum eruimus, non omni rigore ad vela transferri possunt. Primo enim, si filum solitarium vento exponitur, particulae aeris, postquam impegerunt, liberrime ad latera defluere, sicque effectum insequentium turbare non possunt; id quod in velo latitudine praedito fieri non potest. Aer igitur in vela iam impulsus quodammodo stagnabit, donec ad latera defluat; sicque particulae aeris sequentes non immediate in superficiem veli impingere poterunt, sed aerem stagnantem compriment atque ad latera depellent. Hocque adeo casu vela non per impulsionem, sed per solam pressionem aeris magis condensati maximam partem sollicitantur, quae vis non easdem sequetur leges, quas ante vi venti tribuimus.

§. 788. Haec consideratio sola efficit vt effectum venti in vela incurrentis definire non valeamus, quoniam is pendebit a quantitate voluminis aeris in veli cauitate quasi stagnantis et tum ad oras veli prorumpentis, atque a condensatione, quam iste aer a vento insequente patitur; quae

quae res ex iam cognitis principiis ad calculum adhuc revocari non possunt. Filamenta autem, quibus velum constat, longe aliam induent curuaturam, quia iam vis, qua singulae particulae vrgentur, non est vt quadratum sinus obliquitatis, sub qua ad venti directionem sunt positae, sed haec vis, quia compressione aeris adiacentis oritur, vbique fere erit eadem, neque ab obliquitate pendebit. Tum vero non solum fila secundum veli longitudinem dispositа incuruabuntur, sed etiam quae secundum latitudinem sunt extensa, quo fit vt in superficiem vndique concauam efformetur. Hoc modo incuruatio filorum latitudinalium perturbabit incuruationem filorum longitudinalium, ita vt determinatio figurae totius veli sit maxime ardua, viresque analyseos longe superet.

§. 789. Superficies autem plana in concauam, qualem vela inflata exhibent, transmutari non potest, nisi ea vel in margine plicas edat, vel fila, ex quibus est composita, extensionem admittant. Quod ad vtrumque incommodum attinet, vela solent robusto filo laxiore cingi, vt dum eius interior pars extenditur, tota superficies in planam abeat, quo remedio nimia velorum cauitas quae alioquin a vento induceretur, diminuitur et maximam partem tollitur. Illa autem filamentorum indoles, qua non solum inflecti sed etiam in maiorem longitudinem extendi se patiuntur, efficit vt velis a vento longe alia figura inducatur, quam fieret, si filamenta omnis extensionis essent expertia. Ob hanc causam etiam determinatio vis a vento exertae aliam sequetur legem, ita vt, quae hactenus de hac re sunt tradita non nisi vero prope, idque sensu satis laxo transferri queant. Cum autem in in hoc negotio practico determinatio non nimis longe a vero aberrans sufficere possit, etiam his subtilioribus inuestigationibus, per se vires calculi superantibus, supersedemus, ad alia progressuri, quae calculum non respuant.

§. 790. Imprimis autem grauitatis ratio erit habenda quae hactenus est praetermissa; qua fit vt velorum figura a vento orta non solum multum immutetur, sed etiam vis venti se alio modo exerat. Quod discrimen clarissime se manifestabit, si loco veli tabulam OA consideremus, quae circa axem horizontalem O instar penduli sit mobilis, in quam ventus secundum directionem VC, ad quam axis O sit normalis, impingat. Si enim haec tabula esset grauitatis expers, tum ventus eam mox in situm horizontalem circa O deduceret, ita vt nulla amplius vis venti sollicitans extaret. Sin autem grauitas adsit, per eam tabula situm quendam obliquum OA retinebit, ventumque, quasi in A esset alligata, excipiet; vnde nauis ad motum vrgeatur; cuiusmodi sollicitatio abesset, si tabula pondere careret. Hocque idem discrimen locum habebit, si tabula non fuerit rigida, sed instar fili perfecte flexilis, hoc enim casu grauitas pariter impediet, quo minus ea in situm horizontalem extendatur, sed curuam formabit conuexam versus venti plagam, in quam ventus vim nauem propellentem exercebit.

Tab. XXIII. fig. 1.

§. 791. Inquiramus igitur primum in effectum, quem ventus in tabulam rigidam exerceat, sitque superficies tabulae $= bb$; cuius centrum grauitatis existat in puncto C, vbi simul situm sit centrum grauitatis tabulae, ponatur autem tabulae pondus $= P$. Tum vero sit celeritas venti debita altitudini v, cum qua in directione VC in tabu-

tabulam irruat. Iam ponatur anguli BOA, in quo tabula a vento et grauitate simul sollicitata persistet, sinus $= x$, et cosinus $= \sqrt{(1 - xx)} = y$, erit media directio venti CM normalis ad tabulae superficiem; vis autem, qua ventus tabulam in hac directione vrgebit erit vt $v\,bb.(\text{sin. VCO})^2 = v\,bbyy$. Scilicet si massae aquae, cuius volumen $=$ V pondus sit $=$ M; aequabitur ista venti vis ponderi $= \frac{M}{800\,V}.\ v\,bbyy$. Praeterea vero tabula a grauitate vrgetur vi $=$ P in directione verticali CP, quae duae vires, vt se mutuo in aequilibrio teneant necesse est, vt earum momenta respectu axis O sint aequalia. Erit ergo $\frac{M}{800\,V}.\ v\,bbyy.\ OC = P.\ OC.\ \text{sin. PCA} = Px.\ OC$, ideoque $\frac{M}{800.V}.\ v\,bbyy = Px$. Ex qua aequatione angulus BOA determinabitur.

§. 792. Quoniam pes cubicus aquae circiter pondus habet 64 libr; si fierit V vnus pes cubicus, erit $M = 64$ libr, et $\frac{800V}{M} = \frac{25}{2}$ libr. Quare si superficies bb in pedibus quadratis, altitudo vero v celeritati venti debita in pedibus, simulque pondus tabulae P in libris exprimatur, habebitur ista aequatio ad mensuras notas reuocata $\frac{2vbb}{25} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2vbb}{25} = \alpha$, et ob $yy = 1 - xx$ habebitur $\alpha - \alpha xx = Px$, ideoque $xx = \frac{-Px + \alpha}{\alpha}$, vnde fit $x = \frac{-P \pm \sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Duplicem haec solutio praebet valorem pro x seu sinu anguli BOA; at cum alter valor negatiuus fiat vnitate, qua sinus totus indicatur, maior, erit iste angulus imaginarius. Quare habebitur anguli BOA sinus $x = \frac{\sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)} - P}{2\alpha} = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$, vnde, cum α et P quantitates homogeneas pondera scili-

ſcilicet denotent, angulus B O A definiri poterit. Vt ſi fuerit $P : \alpha = 3 : 2$ erit $x = \frac{1}{2}$ et angulus BOA fiet 30°.

§. 793. Quo autem pateat, quantam vim ipſa nauis, in qua eiusmodi tabula fuerit ſuſpenſa, ſuſtineat, videndum eſt, quanta vis requiratur ad tabulam in ſitu hoc, in quem a vento redigitur, conſeruandam. Scilicet ſi tabula in O ope funis ad malum fuerit alligata, inueſtigandum eſt, quanta vi et in quanam directione hic funis vrgeatur. Ad hoc reſoluatur vis grauitatis P in binas laterales, alteram in directione CA, alteram in directione ad hanc normali, atque perſpicuum hanc poſteriorem a vi venti CM omnino deſtrui. Reſtat ergo prior vis ex reſolutione grauitatis orta, cuius directio eſt CA, quae erit $= Py$: haec itaque vis a fune debet ſuſtineri; ex quo perſpicitur funem in directione tabulae Oa extendi vi $= Py$; ex cuius reſolutoine in Ob et $O\alpha$ ſequitur nauem in O propulſum iri vi $= Pxy$. Cum vero ſit $x = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$ erit $yy = \frac{P}{\alpha}\ (\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha})$ ideoque nauis propelletur vi $= P(\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha})^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$.

§. 794. Hinc patet a poſteriori, hoc eſt ex angulo BOA ad quem tabula a vento inclinatur, cognoſci poſſe vim, qua nauis propelletur. Cum enim haec vis ſit $= Pxy$, atque $2xy$ praebeat ſinum dupli anguli AOB, erit haec vis ad dimidium pondus tabulae, vti ſinus dupli anguli AOB ad ſinum totum. Haec ergo vis erit ceteris paribus maxima, ſi angulus AOB fuerit ſemirectus, hocque caſu vis nauem propellens aequabitur ſemiſſi ponderis tabulae. Erit ergo $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hincque $\frac{vbb\sqrt{2}}{25} = P$. Quamobrem ſi tabulae tam pondus quam ſuperficies fuerint data, de-

determinari poterit certa venti celeritas, qua nauis vehementiſſime propelletur, quae reſultabit ex aequatione $v = \frac{25 P}{bb\sqrt{2}}$; quae cum P detur in libris et bb in pedibus quadratis oſtendit eum ventum maximum producere effectum qui vno minuto ſecundo percurrat ſpatium $= \sqrt{1104,854 \frac{P}{bb}} = 33,2393 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ pedum. Quodſi autem celeritas venti ſit data atque ventus vno minuto ſecundo n pedes conficiat, quo tabula maximam vim excipiat debet eſſe $\frac{P}{bb} = \frac{nn}{1104,854} = \frac{905097 \cdot nn}{1000000000}$.

§. 795. Huiusmodi igitur tabula commode adhiberi poterit ad venti celeritatem abſolutam explorandam. Cognitis enim pondere tabulae P in libris, quam eius ſuperficie bb in pedibus quadratis, obſeruetur angulus BOA, ad quem tabula inclinatur, cuius ſinus ſit $= x$ et coſinus $= y$; poſito ſinu toto $= 1$ hinc ſtatim eruitur altitudo venti celeritati debita $v = \frac{25 Px}{2 bbyy}$; atque ideo ventus vno minuto ſecundo conficiet ſpatium $27,9508 \sqrt{\frac{x}{yy} \cdot \frac{P}{bb}}$ pedum. Quo autem anguli declinationum BOA a ventis maxime conſuetis neque nimis fiant magni neque nimis parui, fiat circiter $\frac{P}{bb} = 1$; quo facto celeritas venti ex obſeruato angulo BOA ita cognoſcetur. Fiat vt radix quadrata ex coſinu anguli BOA ad radicem quadratam ex tangente anguli BOA ita numerus $27,9508 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ ad quartum, qui numerus deſignabit numerum pedum, quem ventus vno minuto ſecundo abſoluit, quae operatio per logarithmos facillime expedietur.

§. 796. Anemometron hoc in ſuo genere perfectiſſimum praedicare haud dubito, cum non ſolum vtrum alius ventus alio ſit fortior, oſtendat, ſed etiam quantum ſpatium datus ventus vno minuto ſecundo percurrat, indicet.

dicet. Constructioni eius practicae hic non admodum immorari conuenit, cum artifex intelligens facile perspiciat, quomodo eius perfectio augeri queat. Hic tantum annotasse sufficiat, hoc anemometrum cum solitis tritonibus, quibus plaga venti indicari solet, ita combinari posse, vt tabula OA perpetuo directe vento opponatur; hocque pacto eodem instrumento tam plagam venti, quam ipsam eius celeritatem cognoscere licebit. Praeterea expediet tabulae OA figuram oblongam potius tribuere, quam curtatam, quo pro eadem superficie interuallum OA longius reddatur, sicque quantitas anguli BOA facilius dignosci queat, quod ope arcus circularis in gradus diuisi et in B fixi satis commode fiet, tum vero si in vno huius arcus latere gradus notantur, in altero latere numerus pedum quos ventus hanc inclinationem producens, vno minuto sec. percurrit, congrue adscribetur.

§. 797. Imprimis autem hic notandum est, centrum grauitatis ipsius tabulae et centrum grauitatis superficiei eius in idem punctum incidere debere, id quod, si tabula ex materia homogenea conficiatur et vbique eadem praedita sit crassitie quam minima, sponte vsu venit. Quodsi autem centrum grauitatis tabulae discrepet a centro
Tab XXIII. grauitatis superficiei ipsius alius prorsus orietur effectus ac
fig. 2. diuersus ab eo, quem modo determinauimus. Sit igitur primo, vt ante posuimus, pondus tabulae $OA = P$, eius superficies $= bb$, celeritas venti in directione VC impingentis sit debita altitudini v, et anguli BOA, ad quem tabula a vento declinatur, sit sinus $= x$ cosinus $= y$. Deinde vero sit C centrum grauitatis superficiei tabulae et eius ab axe O distantia $OC = a$; centrum grauitatis

autem

autem soliditatis tabulae sit in G, eiusque ab axe O distantia $OG = b$. His positis videamus, quantum et inaequalitas interuallorum a et b determinationes ante inventas sit perturbatura.

§. 798. Ex vi venti $CM = \frac{M}{800\gamma} \cdot vbbyy$ nascitur ad tabulam circa O conuertendam momentum $\frac{M}{800\gamma} \cdot avbbyy$, cui aequale esse debet momentum ex vi grauitatis ortum, quod est $= Pbx$, vnde habetur ista aequatio $\frac{M}{800\gamma} avbbyy = Pbx$, vel si pondus P in libris et magnitudines in pedibus exprimantur haec $\frac{2avbb}{25b} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2avbb}{25b} = \alpha$, habebitur vt ante $\alpha yy = Px$, hincque $x = V(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}) - \frac{P}{2\alpha}$. Resoluatur vis grauitatis P in laterales GQ et GA inter se normales, erit vis $GQ = Px$ et vis $GA = Py$; hinc ad tabulam in O continendam requiritur primum vis Op in directione AO, $= Py$, tum vero insuper vis normalis $Oq =$ vi CM − vi $GQ = \frac{2vbb}{25} yy - Px = \frac{\alpha b}{a} yy - Px$; a quibus viribus nauis propelletur vi $= Pxy + \frac{\alpha b}{a} y^3 - Pxy = \frac{b}{a} Pxy$. Erit ergo vt ante vis propellens ceteris paribus vt sinus dupli anguli AOB, at cum hac ratione insuper coniungi debet ratio $\frac{OG}{OC}$.

§ 799. Sit nunc tabula, quam hactenus rigidam posuimus, perfecte flexilis, seu sit filum graue BMYA in B suspensum, ventum in directione horizontali VY excipiens, cuius celeritas debita sit altitudini v, in A autem filum hoc firmiter sit alligatum; seu sollicitetur duabus viribus $AE = E$ et $AF = F$ quae sint tantae, vt filum BMA in hoc statu incuruato, qui ipsi cum a vento tum a grauitate inducitur, continere valeant, quarum virium al- Tab. XXIII. fig. 3.

 tera

tera AE ſit verticalis, altera AF horizontalis, quibus ſimul ſumtis aequiualebit vis AG per diagonalem parallelogrammi EF indicata. Sumatur recta verticalis AP pro axe, ac ponatur abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$; atque longitudo curuae $AM = s$. Tribuatur huic filo latitudo $= c$, vt velum repraeſentet, ſitque tota longitudo $AMB = a$, ideoque ſuperficies $= ac$; totius autem veli pondus ſit $= P$; vnde cum velum vniformiter craſſum vbique ponatur; erit ponduſculum cuiuslibet elementi $Mm = ds$, ad pondus P vti eſt ds ad a; conſequenter elementi ds ponduſculum erit $= \frac{Pds}{a}$.

§. 800. Quoniam velum ponitur perfecte flexile, vt in ſtatu permanente verſetur, neceſſe eſt, vt virium ſollicitantium momenta, quae ad filum flectendum tendunt, vbique ſe deſtruant. Vidimus autem ſupra (757) ſummam momentorum omnium a vento ortorum, quibus filum circa M dextrorſum vrgeatur eſſe $= \int dx \int p\,dx + \int dy \int p\,dy$, exiſtente $p = \frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$; ponatur breuitatis gratia $\frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} = \alpha$, vt ſit $p = \frac{\alpha dx^2}{ds^2}$; eritque a vi venti momentum dextrorſum inflectere conans $= \alpha \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2} + \alpha \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$. A viribus autem E et F oritur momentum filum circa M ſiniſtrorſum inflectere annitens $= Fx - Ey$; vnde niſi grauitas adeſſet, haec duo momenta inter ſe aequalia eſſe oporteret. Sicque prodiit ſupra illa aequatio, qua natura curuae, quae velo grauitatis experti a vento imprimitur, determinabatur. Haec autem curua vehementer ab actione grauitatis, vnde pariter momentum filum dextrorſum inflectere conans, naſcitur.

§. 801.

§. 801. Ad hoc momentum a grauitate oriundum debito modo definiendum ſumatur quoduis fili elementum intermedium Yy pro quo ſit $AX = \xi$; $XY = \Phi$; et $Yy = d\omega$; erit vt ante vidimus ponduſculum elementi $Yy = \frac{Pd\omega}{a}$, quo verticaliter deorſum ſecundum directionem YR ſollicitatur; hinc filum circa M dextrorſum vrgebitur momento $= \frac{Pd\omega}{a}(y - \Phi)$. Omnium ergo horum momentorum ſumma erit $= \frac{P}{a}(y\int d\omega - \int \Phi d\omega)$ quae quidem a grauitate portionis AY oritur. Integrum ergo momentum a toto filo AM ortum prodibit, ſi punctum Y in M transferatur, quo fit $\omega = s$; et $\Phi = y$. Hinc erit momentum totum a grauitate ortum, et filum dextrorſum circa M flectere conans $= \frac{P}{a}(y\int ds - \int y\, ds) = \frac{P}{a}\int s\, dy$. Quae vis ſi ſola adeſſet, ſeu ventus flare ceſſaret, filo induceret curuam catenariam, quae a velaria aliter non differt, niſi quod illius axis ſit verticalis huius vero horizontalis.

§. 802. His igitur momentis rite collectis pro curua AMB iſta conficietur aequatio $\alpha\int dx\int\frac{dx^3}{ds^2} + \alpha\int dy\int\frac{dx^2 dy}{ds^2} + \frac{P}{a}\int s\, dy = Fx - Ey$. Ad quam commodius tractandam ponatur breuitatis gratia $\frac{\alpha dx^2}{ds^2} = p$, vt ſit $\int dx\int p\, dx + \int dy\int p dy + \frac{P}{a}\int s\, dy = Fx - Ey$. Differentietur haec aequatio, et habebitur: $dx\int p\, dx + dy\int p\, dy + \frac{Psdy}{a} = F dx - E dy$, quae poſito dx conſtante denuo differentiata dat: $p\, dx^2 + p\, dy^2 + ddy\int p\, dy + \frac{Psddy}{a} + \frac{Pdsdy}{a} = - E ddy$; ſiue ſi per ddy diuidatur $\frac{pds^2}{ddy} + \int p\, dy + \frac{Ps}{a} + \frac{Pdsdy}{addy} + E = 0$. Differentietur tertio prodibitque ob $dsdds = dyddy$ haec aequatio $2p\, dy - \frac{pds^2 d^3y}{ddy^2} + \frac{ds^2 dp}{ddy} + p\, dy + \frac{2Pds}{a}$

$\frac{2Pds}{a} + \frac{Pdy^2}{ads} - \frac{Pdsdyd^3y}{aday^2} = 0$; quae per $\frac{ddy}{ds^2}$ multiplicata dat $dp + \frac{3pdyddy}{ds^2} - \frac{pd^3y}{ddy} + \frac{2Pddy}{ads} + \frac{Pdy^2ddy}{ads^3} - \frac{Pdyd^3y}{adsddy} = 0$.

§. 803. Aequatio haec respectu ad p habito ergo integrabilis reddetur, si multiplicetur per $\frac{ds^3}{ddy}$ eritque $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{P}{a}\int(2ds^2 + dy^2 - \frac{ds^2dyd^3y}{ddy^2}) = Cdx$. At signi summatorii integrale exhiberi potest, quo facto erit $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{Pds^2dy}{addy} + \frac{Pxdx}{a} = Cdx$ vnde $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Cum autem sit $pds^2 = \alpha dx^2$ erit $\alpha dx^2 + \frac{Pdyds}{\alpha} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Ponamus $dy = qdx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$ et $ddy = dqdx$; quibus substitutis fit $\alpha dx + \frac{Pqdx\sqrt{(1+qq)}}{a} + \frac{Pxdq}{a\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cdq}{\sqrt{(1+qq)}}$, quae per $\alpha + \frac{Pq\sqrt{(1+qq)}}{\alpha}$ diuisa dat $dx + \frac{Pxdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cadq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$ vnde fit $\frac{dx}{Ca-Px} = \frac{dq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$, ex qua aequatione cum variabiles x et q sint a se inuicem separatae, determinari poterit valor ipsius x per q; hincque etiam y et s dabitur per q propter $dy = qdx$ et $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$.

§. 804. Erit ergo $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{-Pdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$. Ponatur $\sqrt{(1+qq)} = q+r$, erit $r = \sqrt{(1+qq)} - q$ et $q = \frac{1-rr}{2r}$ porroque $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+rr}{2r}$ et $dq = \frac{-dr(1+rr)}{2rr}$, ex quibus substitutionibus fit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{4Prdr}{P+4\alpha arr-Pr^4} = \frac{-4P^2rdr}{P^2r^4-4\alpha aPrr-PP}$. Cum autem sit $P^2r^4 - 4\alpha aPrr - PP = (Prr - 2\alpha a + \sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})(Prr - 2\alpha a - \sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})$, erit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}} - \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, fitque $Q = \frac{PP}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$. Qua propter per logarithmos integrando prodibit $l\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{P}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}\, l\frac{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, vnde ad numeros regrediendo fit $Ca - Px = Da$

$(\frac{Prr}{Prr}$

$\left(\frac{Prr - 2\alpha a + \sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}}{Prr - 2\alpha a - \sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}}\right) P : \sqrt{P^2 + 4\alpha^2 a^2})$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{P}{\sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}} = m$ et $\frac{2\alpha a}{\sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}} = n$ erit $m^2 + n^2 = 1$, et m et n considerari poterunt tanquam sinus et cosinus anguli cuiusdam determinati, eritque $Ca - Px = Da \left(\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1}\right)^m$.

§. 805. Ex hac aequatione porro fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}}$

$$rr = \frac{(n+1)\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - n + 1}{m\left(\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)}$$

et $rr = \ldots$, dabitur ergo r per x, et cum sit $q = \frac{1 - rr}{2r}$, reperietur q per x; quo cognito oritur $y = \int q\,dx$ et $s = \int dx \sqrt{(1 + qq)} = y + \int r\,dx$; sicque adeo curua quaesita construi poterit. Ad constantes vero C et D determinandas ex aequationum (802) prima et secunda constat factis x et $y = 0$, fore $\frac{F}{E} = \frac{dy}{dx} = q$; ex tertia autem facto $x = y = a$, fit $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = -E\,ddy$, et ex (803) est in eadem hypothesi $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = \frac{C\,dx\,ddy}{ds}$; vnde fit $C = \frac{-E\,ds}{dx} = -E\sqrt{(1 + qq)}$. Cum autem sit $q = \frac{F}{E}$, si vim totam AG $= \sqrt{(E^2 + F^2)}$ ponamus $= G$ erit $\sqrt{(1 + qq)} = \frac{G}{E}$; ideoque $C = -G$. Deinde ob $r = \sqrt{(1 + qq)} - q$, facto $x = 0$ erit $r = \frac{G - F}{E}$ ex aequatione autem vltima ob $C = -G$, fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(-\frac{G}{D}\right)^{\frac{1}{m}}$ ideoque $\frac{-G}{D} = \left(\frac{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}\right)^m$, ac propterea $D = -G \left(\frac{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}\right)^m$.

§. 806.

§. 806. His definitis conſtantibus C et D aequationem pro curua ingredientibus, fiet $\frac{Ca - Px}{Da} = \frac{Ga + Px}{Ga}\left(\frac{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}\right)^m$, ideoque $\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}\left(\frac{Ga + Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ pro quo valore determinato ſi ſcribamus X erit $rr = \frac{n(X-1) + X + 1}{m(X-1)}$, et $r = \frac{\sqrt{(mn(X-1)^2 + m(X^2-1))}}{m(X-1)}$, vnde fit $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{(m-n)(X-1) - X - 1}{2\sqrt{(mn(X-1)^2 + m(X^2-1))}}$; et $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+rr}{2r} = \frac{(m+n)(X-1) + X + 1}{2\sqrt{(mn(X-1)^2 + m(X^2-1))}}$. Fiet ergo $q = \frac{dy}{dx} = 0$ ſeu tangens curuae verticalis, vbi fit $(m-n)(X-1) = X + 1$ ſeu $(m-n-1)X = m-n+1$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$. Hoc ergo caſu valor ipſius x innoteſcet ex hac aequatione $1 + \frac{Px}{Ga} = \left(\frac{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}\right)^m \left(\frac{m-n+1}{m-n-1}\right)^m$. Tangens curuae autem fit horizontalis ſi vel ſit $X = 1$ vel $X = \frac{n-1}{n+1}$.

§. 807. Quoniam puncto M in A tranſlato fit $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, perſpicuum eſt directionem vis AG eſſe tangentem curuae in A. Hinc cognita ratione E : F in quouis curuae puncto M inclinatio tangentis ad horizontem poteſt inueniri, eo quod $\frac{dy}{dx} = q$ per abſciſſam x determinatur. Ponamus autem vim velum in A retinentem euaneſcere, ita vt ſit $G = 0$; qui caſus locum habebit ſi velum in B inſtar penduli ſuſpendatur, ventusque in id incurrat. Erit ergo ob P quantitatem finitam $\frac{Ga+Px}{Ga}$ quantitas infinita, hincque $X = \infty$; vnde prodibit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{m-n-1}{2\sqrt{m(n+1)}}$ = quantitati conſtanti. Ex quo intelligitur velum in planum extendi atque a vento inſtar tabulae rigidae a ſitu verticali declinari. Quod quidem ex ſupra allatis facile perſpicitur cum ſi tabula ſit vbique vniformiter craſſa, in ſtatu inclinato vis venti cum grauitate ita

in

in aequilibrio consistat, vt inde nulla oriatur vis, quae tabulam, etiamsi flexilis esset, inflectere conaretur.

§. 808. Quando autem vis filum in A retinens G non est nulla, tangens curuae alicubi erit verticalis, nisi grauitas sit nulla, in hoc ergo loco capiatur punctum A, eritque vis $F = 0$ et $E = G$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$ $\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m-n+1}{m-n-1}\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$; quae quantitas idcirco ob m et n vnitate minores, erit negatiua; applicatae autem PM et pm pariter ob situm contrarium erunt negatiuae. Hinc Tab. XXIII. fig. 4.

$$\text{igitur fit } rr = \frac{(n+1)(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} - (1-n)(1+n-m)}{m(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + m(1+n-m)}$$

$$= \frac{(1+m+n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m-n}{(1+m-n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m+n} \quad \text{ob } 1-nn = mm.$$

Sit breuitatis gratia $S = \left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ erit $rr = \frac{(1+m+n)S+1-m-n}{(1+m-n)S+1-m+n}$ et $r = \frac{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}{(1+m-n)S+1-m+n}$ hincque $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{n-nS}{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}$, qui valor ob $S > 1$ negatiuus luculenter indicat $\frac{dy}{dx}$, hincque ipsam applicatam y esse negatiuam. Meminisse autem oportet esse $\frac{m}{n} = \frac{P}{2\alpha a}$, et $\alpha = \frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 809. Cum sit $r = \sqrt{(1+qq)} - q = \frac{ds-dy}{dx} = \sqrt{\frac{ds-dy}{ds+dy}}$ erit curuae tangens horizontalis, vbi est $r = 0$, vel etiam $n = \infty$. Hoc ergo euenit si capiatur $S = \frac{m+n-1}{m+n+1}$, vel $S = \frac{m-n-1}{m-n+1}$ vtroque enim casu fit $q = \infty$; est vero alter ipsius S valor affirmatiuus alter negatiuus;

qui posterior, cum potestati positiuae $\left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ aequari nequeat, est imaginarius. Erit ergo $\frac{m+n-1}{m+n+1} = \left(1 + \frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ et $\frac{Px}{Ga} = \left(\frac{m+n-1}{m+n+1}\right)^{m} - 1$, ideoque $x = \frac{Ga}{P}\left(\frac{m+n-1}{m+n+1}\right)^{m} - \frac{Ga}{P}$ qui valor est negatiuus; habebit ergo curua B A b in ramo inferiore A b tantum puta in b tangentem horizontalem, a quo loco curua rursus asscendit. Ramus autem superior A B in infinitum asscendit, facto enim $x = \infty$, fit quoque $S = \infty$, ideoque $q = \frac{dy}{dx} = \frac{-n}{\sqrt{m(1+m)}} = -\sqrt{\frac{1-m}{2m}}$; tum scilicet tangens cum horizontali VA faciet angulum cuius tangens $= \sqrt{\frac{2m}{1-m}}$; ideoque sinus $= \sqrt{\frac{2m}{1+m}}$ et cosinus $= \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$.

Tab. XXIII. fig. 5. §. 810. Si ventus desuper in directione verticali PA in velum MAm incideret, tum ipsi, si grauitate careret, eandem imprimeret curuam, quam sola grauitas demto vento produceret, id quod congruentia inter curuas catenariam et velariam docet. Quodsi ergo tum grauitas quam ventus iste desuper veniens simul agant, dubium est nullum, quin velo eadem curuatura inducatur, quam ab vtraque vi seorsim reciperet. Ad hunc ergo casum calculum accommodemus, quo clarius eius consensus cum veritate perspiciatur. Sit igitur axe AP per curuae punctum imum A sumto, quo casu fit $E = 0$ et $F = G$, abscissa $AP = x$, $PM = y$ et arcus $AM = s$, reliquae vero litterae a, P, et α easdem retineant significationes, quas supra habebant; quibus positis manifestum est, calculum in (802) datum huc transferri, si modo ponatur $p = \frac{\alpha dy^2}{ds^2}$ loco $\frac{\alpha dx^2}{ds^2}$, quippe quo pacto directio venti ad angulum rectum mutatur.

§. 811. Cum igitur ob $C = -G$ peruentum sit ad hanc aequationem $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads^2} + \frac{Gdxddy}{ds} = 0$, erit $\alpha a dy^2 + Pdyds + \frac{Pxdxddy + Gadxddy}{ds} = 0$. Ponatur $dy = qdx$, sitque $\sqrt{(1+qq)} = q + r$ seu $q = \frac{1-rr}{2r}$, fiet facta substitutione $\frac{dx}{Ga+Px} = \frac{4rdr}{(1-rr)(P+\alpha a+(P-\alpha a)rr)}$, cuius integrale est $\frac{1}{P}\, l \frac{Ga+Px}{Da} = \frac{1}{P}\, l \frac{P+\alpha a+(P-\alpha a)rr}{1-rr}$, fit autem, cum posito $x = 0$ fieri debeat $r = 0$, constans $D = \frac{G}{P+\alpha a}$; quare erit $\frac{Ga+Px}{Ga} = \frac{P+\alpha a+(P-\alpha a)rr}{(P+\alpha a)(1-rr)}$ hincque $rr = \frac{(P+\alpha a)x}{2Ga+(P+\alpha a)x}$. Tum vero prodit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{Ga}{\sqrt{(2Ga(P+\alpha a)x+(P+\alpha a)^2xx)}}$. Scribatur breuitatis ergo b pro $\frac{Ga}{P+\alpha a}$, erit $dy = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx+xx)}}$ quae aequatio manifesto est pro curua catenaria; quemadmodum id quidem recte ex congruentia curuae velariae cum catenaria coniectauimus.