Cap. IX.

DE VI, QVAM VENTVS IN VELA EXERIT.

§. 728.

Quae hactenus de vi aquae in nauis ſuperficiem incurrentis ſunt expoſita, eadem ad vim venti contra datam ſuperficiem irruentis transferri poſſunt, obſeruata ratione grauitatis ſpecificae inter aquam et aerem. Quemadmodum enim vis aquae in datam ſuperficiem impingentis reducta eſt ad pondus determinati cuiusdam voluminis aquae; ita ſimili modo vis venti reducetur ad pondus paris voluminis aeris. Cum igitur aer ſit fere octingenties leuior quam aqua, eadem determinatio vis, quae ab allapſu aquae proficiſcitur, pro vento valebit, ſi in ratione 800 ad 1 diminuatur: ſiquidem et celeritas et obliquitas incidentiae vtroque caſu fuerit eadem. Aſſumemus ſcilicet vim venti pariter ac aquae, proportionalem primo ſuperficiei in quam incurrit, ſecundo quadrato celeritatis, qua irruit, ac tertio quadrato ſinus anguli incidentiae, quippe quas rationes proxime ad veritatem accedere experientia teſtatur.

§. 729. Has ob rationes facile foret eodem modo, quo vim aquae determinauimus, vim venti, quam in vela exerit, definire ſi modo figura velorum, a qua vis potiſſimum pendet, eſſet cognita. Quoniam vero hanc figuram ipſam ante inueſtigari oportet, quam ad vis cognitionem peruenire liceat, haec tractatio aliquanto plus operis requirit, atque nonnulla principia ſtaticae ſingularia poſtulat, ex quibus figurae corporum flexibilium a viribus

qui-

quibuscunque ſollicitatorum determinari queant. Quo autem ad hanc evolutionem via facilius ſternatur, conueniet primum animum a flexibilitate velorum abſtrahere, eaque tanquam perfecte rigida contemplari. Hancobrem viſum eſt primo loco tabulas rigidas in velorum locum ſubſtituere, quae non obſtante vi venti eandem figuram conſeruent. Atque haec tractatio maxime ſimilis erit ei, qua vim aquae in ſuperficiem quamcunque irruentis definiuimus.

§. 730. Tribuamus primum tabulae rigidae vicem veli ſuſtinentis figuram planam, ſitque haec tabula in ſitu quem tenet firmiter alligata, ita vt de ſuo ſitu a vi venti deturbari nequeat. Repraeſentet recta VC directionem venti per centrum grauitatis tabulae C ductam ſitque celeritas venti debita altitudini v ipſa tabula quieſcente. Concipiatur per directionem venti VC ad planum tabulae duci planum normale, VACB, erit ACV angulus incidentiae ſub quo ventus, quaſi fluuius aereus in tabulam impingit. Sit huius anguli ACV ſinus $= m$, coſinus $= n$ poſito ſinu toto, $= 1$. Porro ponatur planum tabulae $= hh$, atque ex ante expoſitis primo conſtat, mediam directionem vis venti eſſe normalem ad planum tabulae, ac per eius centrum grauitatis B tranſire; quae itaque repraeſentetur recta CW ad planum tabulae in eius centro grauitatis C normali. Huius ergo vis directio CW cum directione venti producta CX conſtituit angulum WCX cuius ſinus $= n$. Tab. XX. fig. 4.

§. 731. Ad quantitatem huius vis venti CW definiendam, primum notandum eſt, ſi directio venti ad planum tabulae eſſet normalis, tum vim venti aequivalituram eſſe ponderi cylindri aerei, cuius baſis ſit ſuperficies

tabulae hh, et altitudo aequalis altitudini, celeritati venti debitae v. Ex quo vis venti CW aequalis foret ponderi maſſae aeris, cuius volumen eſt $= hhv$. Iam propter obliquitatem ACV iſta vis diminui debet in ratione duplicata ſinus totius 1 ad ſinum anguli ACV qui eſt $= m$, vnde in propoſito caſu vis venti CW aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $m^2 hhv$. Quodſi ergo pondus voluminis aquei V fuerit $= M$, pondus voluminis aerei V erit circiter $= \frac{1}{800} M$. Quo circa vis quam ventus VC in tabulam AB exerit, in directione CW erit $= \frac{m^2 hhv}{800V} . M$; ita vt haec vis per cognitas virium menſuras poſſit exhiberi. Cenſetur quidem ratio grauitatum ſpecificarum inter aquam ad aerem tantum vt 750 ad 1. At cum hic intelligatur aqua dulcis, pro aqua marina aſſumta ratio 800 ad 1 veritati ſatis erit conſentanea.

§. 732. Quando aduerſus plagam venti curſus eſt inſtituendus, maxime reſpiciendum eſt ad quantitatem anguli WCX; quo maior enim hic angulus exiſtit, eo propius directio vis CW ad plagam venti CV accedit. Nauis autem, ſequi debet curſum in directione CW, ſi vndique eandem reſiſtentiam in motu ſuo offenderet. Verum ob multo maiorem reſiſtentiam laterum quam prorae, directio curſus multo propius ad CV adduci poteſt, quam CW. Videmus autem in caſu praeſente angulum WCX fieri maximum, ſi euadat rectus, quippe quo caſu fit eius ſinus $n = 1$; et directio venti VC radet tabulam ACB velum repraeſentantem. At quoniam hic fit $m = 0$, manifeſtum eſt vim venti ſimul euaneſcere. Erit ergo angulus rectus quaſi aſymtotos anguli WCX, ad quam quantumuis prope accedere, ipſam vero nunquam attingere poterit.

poterit. Multo minus autem directio vis CW ad CV propius accedere potest, si figura veli non sit plana, vti mox videbimus.

§. 733. Ista vis venti determinatio autem locum non habet, nisi superficies tabulae fuerit perfecte plana, hoc est quasi politissima. Quodsi enim fuerit scabra et inaequalitatibus inquinata, vti in *m*, manifestum est, tam ipsam vim venti CW quam eius mediam directionem maxime turbatum iri, eo quod in qualibet prominentia ventus sub alio angulo incidit, ex quo eius vis simul ac directio magnopere mutatur. Cuiusmodi igitur effectum habiturus sit ventus in talem superficiem asperam incidens ex sequente casu poterimus colligere. Incidat ventus in directione VC in superficiem quasi fractam ACB, ita vt in duas superficies planas AC et BC ad C angulum inter se constituentes impingat, et ad vtramque diuersam habeat inclinationem. Exhibebunt scilicet A et B in superficie imaginaria, plana A*c*B duas eminentias, et angulus ad C sinum; ideoque hic casus aptus erit ad vim venti in superficiem asperam irruentis aestimandam etiamsi binas superficies AC et BC planas assumamus, quae figuras quascunque habere possunt Tab. XX. fig. 5.

§. 734. Sit anguli A*c*V, qui foret angulus incidentiae, si figura esset plana A*c*B et sinuositate careret, sinus $= m$, cosinus $= n$: linea recta AB $= c$, quae simul latitudinem habeat k, ita vt nunc sit $= ck$ quod ante erat $= bb$. Porro sit AC $= a$; et BC $= b$; sinus anguli CAB $= \alpha$, sinus anguli CBA $= \beta$; illius anguli cosinus $=$ A et huius $=$ B, erit anguli ACB sinus $= \alpha B + \beta A$ et cosinus $= \alpha\beta - AB$, hinc erit per trigonometriam $a : b : c = \beta : \alpha : \alpha B + \beta A$, et $cc = aa + bb - 2ab\ (\alpha\beta - AB)$.

 Iam

tabulae hh, et altitudo aequalis altitudini, celeritati venti debitae v. Ex quo vis venti CW aequalis foret ponderi massae aeris, cuius volumen est $= hhv$. Iam propter obliquitatem ACV ista vis diminui debet in ratione duplicata sinus totius 1 ad sinum anguli ACV qui est $= m$, vnde in proposito casu vis venti CW aequabitur ponderi massae aereae, cuius volumen $m^2 hhv$. Quodsi ergo pondus voluminis aquei V fuerit $= M$, pondus voluminis aerei V erit circiter $= \frac{1}{800} M$. Quo circa vis quam ventus VC in tabulam AB exerit, in directione CW erit $= \frac{m^2 hhv}{800V} . M$; ita vt haec vis per cognitas virium mensuras possit exhiberi. Censetur quidem ratio grauitatum specificarum inter aquam ad aerem tantum vt 750 ad 1. At cum hic intelligatur aqua dulcis, pro aqua marina assumta ratio 800 ad 1 veritati satis erit consentanea.

§. 732. Quando aduersus plagam venti cursus est instituendus, maxime respiciendum est ad quantitatem anguli WCX; quo maior enim hic angulus existit, eo propius directio vis CW ad plagam venti CV accedit. Nauis autem, sequi debet cursum in directione CW, si vndique eandem resistentiam in motu suo offenderet. Verum ob multo maiorem resistentiam laterum quam prorae, directio cursus multo propius ad CV adduci potest, quam CW. Videmus autem in casu praesente angulum WCX fieri maximum, si euadat rectus, quippe quo casu fit eius sinus $n = 1$; et directio venti VC radet tabulam ACB velum repraesentantem. At quoniam hic fit $m = 0$, manifestum est vim venti simul euanescere. Erit ergo angulus rectus quasi asymtotos anguli WCX, ad quam quantumuis prope accedere, ipsam vero nunquam attingere potest

poterit. Multo minus autem directio vis CW ad CV propius accedere potest, si figura veli non sit plana, vti mox videbimus.

§. 733. Ista vis venti determinatio autem locum non habet, nisi superficies tabulae fuerit perfecte plana, hoc est quasi politissima. Quodsi enim fuerit scabra et inaequalitatibus inquinata, vti in *m*, manifestum est, tam ipsam vim venti CW quam eius mediam directionem maxime turbatum iri, eo quod in qualibet prominentia ventus sub alio angulo incidit, ex quo eius vis simul ac directio magnopere mutatur. Cuiusmodi igitur effectum habiturus sit ventus in talem superficiem asperam incidens ex sequente casu poterimus colligere. Incidat ventus in directione VC in superficiem quasi fractam ACB, ita vt in duas superficies planas AC et BC ad C angulum inter se constituentes impingat, et ad vtramque diuersam habeat inclinationem. Exhibebunt scilicet A et B in superficie imaginaria, plana A*c*B duas eminentias, et angulus ad C sinum; ideoque hic casus aptus erit ad vim venti in superficiem asperam irruentis aestimandam etiamsi binas superficies AC et BC planas assumamus, quae figuras quascunque habere possunt Tab. XX. fig. 5.

§. 734. Sit anguli A*c*V, qui foret angulus incidentiae, si figura esset plana A*c*B et sinuositate careret, sinus $= m$, cosinus $= n$: linea recta AB $= c$, quae simul latitudinem habeat k, ita vt nunc sit $= ck$ quod ante erat $= bb$. Porro sit AC $= a$; et BC $= b$; sinus anguli CAB $= \alpha$, sinus anguli CBA $= \beta$; illius anguli cosinus $=$ A et huius $=$ B, erit anguli ACB sinus $= \alpha B + \beta A$ et cosinus $= \alpha\beta - AB$, hinc erit per trigonometriam $a : b : c = \beta : \alpha : \alpha B + \beta A$, et $cc = aa + bb - 2ab\,(\alpha\beta - AB)$.

 Iam

Iam ventus in partem AC impingit sub angulo $VCA = VcA - CAc$, cuius sinus propterea erit $= mA - n\alpha$. Deinde in superficiem alteram BC ventus irruit sub angulo $VCB = VcB - ABC$, cuius sinus est $= mB + n\beta$. Quodsi ergo ponantur EM et FN mediae directiones harum virium a vento exceptarum, erunt eae primum ad AC et BC normales, tum vero per harum linearum AC et BC puncta media E et F transibunt.

§. 735. Si altitudo debita celeritati venti ponatur $= v$, erit vis $EM = (mA - n\alpha)^2 akv$, atque vis $FN = (mB + n\beta)^2 bkv$, vti ante inuenimus; neglecta ratione, qua ad mensuram absolutam harum virium inueniendam opus est. Erit ergo vis EM ad vim $FN = \square$ sin. ACc. $AC : \square$ sin. BCc. $BC = Ac$. sin. $ACc : Bc$. sin. $BCc = \frac{Ac^2}{AC} : \frac{Bc^2}{BC}$, quoniam est sin. ACc : sin. $BCc = \frac{Ac}{AC} : \frac{Bc}{BC}$. Producantur vires EM et FN donec rectae AB occurrant in e et f erit $Ac = \frac{a}{2A}$ et $Bf = \frac{b}{2B}$; sitque harum virium media directio gGW et ipsa vis aequiualens GW; quae effectum venti quaesitum exhibebit. Quamobrem ex natura aequilibrii primum habetur $\frac{eg \cdot Ac^2}{AC} : \frac{AE}{Ae} = \frac{fg \cdot Bc^2}{BC} : \frac{BF}{Bf}$ ideoque $eg : fg = \frac{B \cdot Bc^2}{BC} : \frac{A \cdot Ac^2}{AC} = B \cdot BC(mB + n\beta)^2 : A \cdot AC(mA - n\alpha)^2$; et cum sit $BC : AC = b : a = \alpha : \beta$ erit $eg : fg = \alpha B(mB + n\beta)^2 : A\beta(mA - n\alpha)^2$. Ex hac analogia determinatur punctum g, in quo media directio vis venti in rectam AB incidit. Cum sit $AE = \frac{1}{2}AC$; et $BF = \frac{1}{2}BC$, erit quoque $eg \cdot \frac{Ac^2}{Ae} = fg \cdot \frac{Bc^2}{Bf}$ vnde facilis constructio puncti g reperitur.

§. 736. Quodsi ducatur recta EF, erit ea parallela ipsi AB, secetur ea a directione media gGW in puncto o erit

o eritque $EO : FO = eg : fg = \frac{Bc^2}{Bf} : \frac{Ac^2}{Ae}$. At si directio venti VC secet rectam EF in γ erit $Bc : Ac = F\gamma : E\gamma$. Tum vero si ex C in EF demittatur perpendiculum Cp erit ob triangula similia $Ae : AE = CE : Ep$, ideoque $Ae = \frac{CE^2}{Ep}$, et propter $Bf : BF = CF : Fp$, erit $Bf = \frac{CF^2}{p}$. Ex his itaque sequitur fore $Eo : Fo = \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2} : \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2}$. Postea ad angulum FoW definiendam vires CM et FN resoluendae sunt in normales ad EF et in ipsam EF incidentes. Sufficiet vero quantitates his viribus proportionales assumsisse, ex quo cum sit $EM : FN = \frac{E\gamma^2}{CE} : \frac{F\gamma^2}{CF}$ erit vis normalis ex EM orta $= \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2}$ et ex FN orta $= \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2}$. Deinde ex vi EM nascitur vis in directione $FE = \frac{E\gamma^2 . Cp}{CE^2}$, et ex vi FN nascitur vis in directione $EF = \frac{E\gamma^2 . Cp}{CF^2}$; quae duae vires inter se sunt contrariae, binae priores vero conspirant.

§. 737. Si igitur vis aequiualens GW pariter in eiusmodi vires laterales resoluatur, debebit vis ad EF normalis esse $= \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2} + \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2}$; altera vero vis in directione oF erit $= \frac{F\gamma^2 . Cp}{CF^2} - \frac{E\gamma^2 . Cp}{CE^2}$, vnde anguli FoW tangens erit $= \frac{CF^2 . E\gamma^2 . Ep + CE^2 . F\gamma^2 . Fp}{CE^2 . F\gamma^2 . Cp - CF^2 . E\gamma^2 . Cp}$. Quo appareat quantum haec directio a directione venti VC deflectat, ducatur GX ipsi VC parallela erit angulus deflexionis $WGX = FoW - F\gamma C$. Cum igitur anguli $F\gamma C$ tangens sit $= \frac{Cp}{p\gamma}$ prodibit anguli WGX tangens $= \frac{CF^2 . E\gamma^2 . (p\gamma . Ep + Cp^2) + CE^2 . F\gamma^2 (p\gamma . Fp - Cp^2)}{CE^2 . F\gamma^3 . Cp + CF^2 . E\gamma^3 . Cp}$, quae expressio in plurimas alias formas transmutari potest, ope relationis quae inter lineas figurae intercedit. Ceterum si latera AC et BC fuerint aequalia, fiet anguli WGX tangens $= \frac{p\gamma (Ep^2 - 2Cp^2 + p\gamma^2)}{Cp (Ep^2 + 3p\gamma^2)}$.

§. 738.

§. 738. Apparet autem hoc casu angulum deflexionis WGX, quo media directio vis venti GW ab ipsa venti directione VG declinat, nunquam tantum fieri posse, quam si tabula ventum excipiens est perfecte plana AB; si enim ventus in directione AC impingit, tum solam partem BC percutiet, quae cum minus sit obliqua ad venti directionem, quam superficies plana AB, directio vis venti quoque propius ad ipsius venti directionem accedet. Quodsi autem angulus VCB maior fiat angulo ACB, tum ventus non solum totam superficiem AC non stringet, sed etiam in partem tantum superficiei BC incidet, quo fiet vt eius effectus non solum fiat multo minor sed etiam non tantopere a directione venti discrepabit, quam si figura tabulae esset perfecte plana. Hinc igitur perspicuum est, inaequalitatem superficiei ventum excipientis magnopere effectum tum ratione quantitatis quam directionis turbare, ita vt calculus supra datus pro
Fig. 4. effectu venti in superficiem planam incurrentis determinando locum habere non possit, nisi ista superficies sit perfecte polita, et omni inaequalitate destituta.

§. 739. Quae hic de figura plana sunt tradita simul declarant in superficie concaua, qualem vela induere solent, effectum venti vehementer differre debere, prouti superficies velorum fuerit magis minusue laeuigata. Quamobrem si vela vento oblique opponantur, vti fit, si cursus aduersus ventum institui debet, ratio superficiei velorum maxime est spectanda; quippe quae, quo minus fuerit polita, eo magis a scopo deflectet. Hinc igitur colligitur, quo memorato incommodo obuiam eamus, maxime expedire, vt superficies velorum interna, quae per-

per se ob filamenta contexta est inaequabilis, maxime laevigetur et quasi polita reddatur; quod commodissime praestabitur, si vela pice vel colore crassiore illinantur. Nautae incommodum hoc animadvertentes vela madefacere solent; quo primum quidem impetrant vt vela magis tendantur atque in superficiem planam magis explanentur, tum vero etiam vento omnem transitum per poros velorum adimunt. Quantumuis autem hae duae res ad propositum facere videantur, tamen equidem effectum a humectatione velorum ortum maxime huic causae tribui debere arbitror, quod cauitates inter filamenta interceptae humido repleantur, sicque superficiem magis laeuem mentiantur.

§. 740. Inuenta vi, quam vela a vento impulsa sustinent definiri poterunt vires, quae ad vela in eodem situ continenda requiruntur; ad hoc enim necesse est, vt vires velum continentes cum media vi venti, quam determinauimus, in aequilibrio consistant, nisi ipsum velum sit graue, quo casu in statu aequilibrii simul ponderis ipsius veli ratio est habenda. Teneat, vti primo posuimus, veli vicem tabula plana A B gratitatis quidem expers, in quam ventus sub directione quacunque allidat, transibit media directio vis venti C M per superficiei tabulae centrum grauitatis C, eritque ad ipsum planum normalis, quantitatem autem huius vis ita determinauimus cum ex celeritate venti, eiusque obliquitate, tum ex superficie tabulae, vt pondus huic vi aequale assignari possit. Sit P pondus huic vi aequale, atque vis venti tabulam vrgentis eo est perducta, vt tabula in directione CM sollicitetur vi, quae aequalis sit ponderi P. Quare si haec tabula naui sit fir- Tab. XXI. fig. 1.

miter affixa vel alligata, ipsa nauis sollicitabitur in directione CM a vi, quae aequalis est ponderi P.

§. 741. Cum autem vela ope funium seu cordarum ad malos alligari soleant, conueniet vim determinari, quam hae cordae sustinent. Ponamus tabulam AB ope duarum cordarum Aa et Bb malo vel naui esse alligatam, ita vt cordae secundum longitudinem a vi P in directione CM pellente extendantur. Quo igitur vires in directionibus Aa et Bb agentes cum vi P in aequilibrio consistant, primum oportet directiones Aa et Bb cum directione CM in eodem plano esse positas. Deinde requiritur, vt directiones Aa et Bb, si producantur, sese in eodem rectae CM puncto intersecent. Tertio denique aequilibrii status postulat, vt ipsae vires Aa et Bb sint inter se in ratione reciproca sinuum angulorum, quos ipsarum directiones productae cum directione CM constituunt; simul vero vna harum virium puta Aa se habeat ad vim P, vt sinus inclinationis alterius directionis Bb ad CM, ad sinum anguli, quem ambae directiones aA et bB inter se constituunt. Atque ex his conditionibus tam directiones cordarum, quam vires, quibus tenduntur definientur.

§. 742. Cum ergo, si tabula AB vicem veli sustinens fuerit plana directio CM sit ad AB normalis; sumtis interuallis CA et CB aequalibus, directiones Aa et Bb aequaliter inclinatae esse debent ad AB; simulque ambae cordae Aa et Bb aequalibus viribus tendentur. Sit anguli aAC seu bBC sinus $= \mu$ cosinus $= \nu$; et p denotet vim, qua vtraque corda tendetur. His positis erit anguli, quo Aa vel Bb ad CM inclinatur, sinus $= -\nu$: et cosinus $= \mu$; vnde anguli, quo directiones aA et bB

ad

ad se mutuo inclinantur, sinus erit $= -2\mu\nu$. Hinc conditio tertia istam praebebit analogiam $p : P = -\nu : -2\mu\nu = 1 : 2\mu$; erit ergo $p = \frac{P}{2\mu}$. Quamobrem erit sinus anguli aAB seu bBA ad sinum totum, vti semissis vis P ad vim p, qua corda Aa vel Bb tenditur. Vnde perspicuum est, cordas a minima vi tendi, si earum directio fuerit perpendicularis ad planitiem veli AB, siquidem velum concipiatur grauitatis expers.

§. 743. Maneant directiones cordarum Aa et Bb ad planitiem veli normales, atque adeo parallelae directioni vis a vento exceptae CM, sint autem interualla CA et CB inaequalia. Ex natura vectis constat, ad aequilibrium constituendum summam virium Aa et Bb aequalem esse debere vi P; tum vero vires Aa et Bb reciproce proportionales esse oportere distantiis AC et BC. Quodsi ergo vis Aa ponatur $= p$; vis B$b = q$ erit primo $p + q = P$ tum vero $p.\,AC = q.\,BC$, ideoque ob $p.\,AC = P.\,BC - p.\,BC$ erit $p = \frac{P.BC}{AB}$ et $q = \frac{P.AC}{AB}$. Velum igitur planum a vento inflatum a duabus viribus, quarum directiones sint normales ad planum veli, atque cum directione media vis venti CM in eodem plano sitae, in aequilibrio contineri potest. Scilicet recta AB per puncta A et B quibus cordae velo sunt alligatae per centrum grauitatis superficiei veli transire debet. Fig. 2.

§. 744. Habeat velum planum figuram triangularem ABD, erit directio vis venti media normalis ad hoc planum in ipsius centro grauitatis C; sitque vis venti $= P$. Alligatum iam sit velum hoc in tribus angulis A, B, D, ita vt cordae ad planum trianguli sint normales; atque oporteat vim determinare, quam vnaquaeque corda patitur. Fig. 3.

tur. Sit vis cordae in A alligatae $= p$, vis cordae B $= q$ et vis cordae D $= r$. Quaeratur vis aequiualens binis viribus q et r, quae erit $= q + r$ atque in rectae puncto E applicata erit, ita vt sit BE : DE $= r : q$. Quare haec vis $q + r$ in E applicata vna cum vi p in aequilibrio tenere debet vim venti P: ex quo recta AE per centrum grauitatis C transeat necesse est. Quoniam vero AE per centrum grauitatis trianguli transit, erit BE $=$ DE, vnde erit $r = q$. Tum vero esse debet haec vis in E applicata $q + r$ ad vim in A, nempe p, vti AC ad CE hoc est vt 2 ad 1; atque insuper habetur $p + q + r = P$. Cum ergo sit $q = r$, et $2p = q + r$ fiet $p = q = r = \frac{1}{3}P$; vires igitur cordarum in singulis angulis applicatarum erunt inter se aequales, et vnaquaeque aequabitur trienti vis aequilibratae P.

Fig. 4. §. 745. Ponamus iam velum planum habere figuram quadrilateram ABDE, atque cordis quatuor in singulis angulis A, B, D, et E normaliter ad planum applicatis in aequilibrio contineri debere. Sit vis quam corda A sustinet $= p$; vis cordae B $= q$; vis cordae in D $= r$, et vis cordae in E $= s$; vis autem venti a velo exceptae sit $=$ P, quae pariter erit normalis ad planum veli, atque per eius centrum grauitatis C transibit. Ad vires igitur p, q, r et s determinandas primum oportet centri grauitatis C positionem definire. Ducantur diagonales AD et BE se mutuo in O decussantes: tum vtraque bisecetur in H et I: capiantur porro H$b = \frac{1}{3}$HO et I$i = \frac{1}{3}$IO; ac ex b ducatur diagonali BE parallela bC similique modo ex i diagonali AD parallela iC; erit harum li-

nea

nearum ductarum intersectio C centrum grauitatis quadrilateri, quod quaerebatur.

§. 746. Conferantur iam inter se binae vires sibi diagonaliter oppositae nempe p, r et q, s: ac primo quaeratur vis binis p et r simul sumtis aequiualens, quae erit $= p + r$, et applicanda erit in puncto n, ita vt sit $p.An = r.Dn$: vnde fiet $An = \frac{r.AD}{p+r}$ et $Dn = \frac{p.AD}{p+r}$. Simili modo vis binis q et s aequiualens erit $= q + s$, atque applicanda in puncto m, vt sit $Bm = \frac{s.BE}{q+s}$ et $Em = \frac{q.BE}{q+s}$. Quoniam itaque velum ab his duabus viribus $p + r$ et $q + s$ in n et m applicatis in aequilibrio teneri debet, recta mn per punctum C transibit; vnde erit $mi : Ob = mO : On$; tum vero erit $p + q + r + s = P$ atque $p + r : q + s = mC : nC = mi : Oi$; seu $p + r = \frac{mi.P}{mO}$ et $q + s = \frac{Oi.P}{mO}$. Ex his aequationibus tandem elicientur tres sequentes: I. $\frac{1}{2}(r-p)AD + (r+p)OH = \frac{2}{3}P.OH$ II. $\frac{1}{2}(s-q)BE + (s+q)OI = \frac{2}{3}P.OI$ atque III. $\frac{1}{2}(s-q)BE + \frac{1}{3}(s+q)OI : \frac{2}{3}(s+q)OI = \frac{2}{3}(r+p)OH : \frac{1}{2}(r-p)AD + \frac{1}{3}(r+p)OH$, vel $p + r + q + s = P$.

§. 747. Per has tres aequationes quatuor vires non omnes determinantur: vnde patet quaestionem hanc esse indeterminatam, vnamque cordae tensionem pro lubitu assumi posse, ex qua deinceps reliquae definiantur. Commodissime solutionem generalem autem adornabimus, si sumta vi quacunque noua u ponamus $r + p = \frac{1}{2}P + u$ et $s + q = \frac{1}{2}P - u$, atque binae priores aequationes dabunt $r - p = (\frac{1}{3}P - 2u)\frac{OH}{AD}$ et $s - q = (\frac{1}{3}P + 2u)\frac{OI}{BE}$. Hinc assumta pro lubitu vi u quatuor vires cordas tendentes ita determinabuntur, vt sit $p = \frac{1}{2}P.\frac{Ab}{AD} + u.\frac{DO}{AD}$; $q = \frac{1}{2}P.\frac{Bi}{BE}$

$-u.\frac{BO}{BE}$, $r=\frac{1}{2}P.\frac{Db}{AD}+u.\frac{AO}{AD}$; $s=\frac{1}{2}P.\frac{Ei}{BE}-u.\frac{BO}{BE}$. Hinc intelligitur, si velum in pluribus quam 4 angulis alligetur, determinationem virium, quibus singulae cordae tenduntur, eo magis fore indeterminatam.

Fig. 5. §. 748. Si velum non sit planum, sed vel ex aliquot superficiebus planis compositum, vel etiam incuruatum, atque id in duobus punctis A et B alligetur, fieri potest, vt media directio vis venti CM in rectae AB punctum quodcunque C incidat et ad eam sub angulo quocunque ACM inclinetur. Sint igitur primo directiones cordarum Aa et Bb in eodem plano cum CM ac posita vi a vento excepta $=$ P, sit vis cordam Aa tendens $=p$, et vis cordam Bb tendens $=q$. Porro quia directiones aA et bB productae in eodem puncto rectae CM concurrere debent, sit anguli AMB sinus $=\alpha$, anguli ACM sinus $=\sigma$ et cosinus $=\eta$: eritque $p:P=$ sin. CMB : α; et $q:P=$ sin. AMC : α ergo $p=\frac{\sin.CMB}{\alpha}$ et $q=\frac{P.\sin.AMC}{\alpha}$. Cum autem sit α (sin. AMB) : sin. CMB $=$ AB . CM : BC . AM $=$ AB sin. CAM : BC . σ et α (sin. AMB) : sin. AMC $=$ AB . CM : AC . BM $=$ AB . sin. CBM : AC . σ erit $p=\frac{\sigma P.BC}{AB.\sin.CAM}$ et $q=\frac{\sigma P.AC}{AB.\sin.CBM}$. Anguli autem CAM et CBM ita inter se erunt affecti vt sit $\frac{AC.\tang CAM}{\sigma+\eta\tang.CAM}=\frac{BC.\tang.CBM}{\sigma-\eta\tang.CBM}$ seu $\frac{\sigma\cot.CAM}{AC}+\frac{\eta}{AC}=\frac{\sigma\cot.CBM}{BC}-\frac{\eta}{BC}$ vel AB. cot. ACM $=$ AC cot. CBM $-$ BC. cot. CAM.

§. 749. Ratio huius vltimae aequationis, quae relationem continet inter angulos CAM et CBM, ad id vt rectae aA et bB productae se mutuo in ipsa recta CM intersecent, facile hoc modo perspicietur. Ex M in AB demittatur perpendiculum MP quod instar sinus totius consideretur;

ſideretur; eritque CP $=$ cot. BCM $=-$ cot. ACM $=-\frac{\eta}{\sigma}$. Tum vero habebitur BP $=$ cot. CBM, et AP $=$ cot. CAM: qui valores ſi loco cotangentium in vltima aequatione ſubſtituantur, prodibit $-$ AB . CP $=$ AC . BP $-$ BC . AP $=-$ AC . CP $-$ BC . CP. Hinc ergo fiet AC (BP $+$ CP) $=$ BC (AP $-$ CP) ſeu AC . BC $=$ BC . AC quae eſt aequatio identica. Sumtis ergo ad hanc normam angulis aAB et bBA ipſae vires, quibus cordae tendentur, ex ſuperioribus aequationibus definientur.

§. 750. His de velorum planorum vi, quam a vento excipiunt, expoſitis, pergamus ad vela incuruata, quae figuram habeant quamcunquae immutabilem, ita vt eandem figuram retineant, quantumuis ventus ea ſollicitet; cuiusmodi forent vela, ſi ex metallo, aliaue materia rigida conficerentur. Sit AMB eiusmodi velum cuius figura data ſit per aequationem inter abſciſſam AP $= x$ et applicatam PM $= y$. Irruat in hoc velum ventus celeritate debita altitudini v in directione VQM, quae cum axe AB conſtituat angulum VQN, cuius ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$. Ducatur applicata proxima pm, vt ſit Pp $= dx$; $mn = dy$ et elementum curuae N$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $= ds$; in quod ventus impinget ſub angulo VMm, vel VMA $=$ NmM $-$ PMQ, cuius ſinus propterea erit $= \frac{mdx - ndy}{ds}$. Vis igitur, quam elementum Mm a vento ſuſtinet erit vt $\frac{v(mdx-ndy)^2}{ds}$, cuius menſura abſoluta, ſi latitudo veli in hoc loco ponatur $= u$, et voluminis aquei V pondus ſit $=$ M, erit pondus $\frac{1}{\sqrt{\sigma\sigma}} \frac{M}{V} \cdot \frac{uv(mdx-ndy)^2}{ds}$, ponamus autem breuitatis gratia α pro quantitate conſtante $\frac{1}{\sqrt{\sigma\sigma}} \frac{M}{V}$, ita, vt vis quam elementam Mm latitudinem habens u ſuſtinet ſit $= \frac{\alpha uv(mdx-ndy)^2}{ds}$. §. 751.

Tab. XXII. fig. 1.

§. 751. Vis huius directio autem est normalis ad velum in M, quare si ducatur normalis KMN, vt sit PN $= \frac{ydy}{dx}$, velum vrgebitur in directione NM, vel si vis referatur ad axem AB in directione TN, vi $= \frac{\alpha uv(mdx-ndy)^2}{ds}$. Resoluatur haec vis in duas laterales RN et SN, quarum illa ad AB sit normalis, haec in ipsam AB incidat, erit ob triangula TNR et mMn similia, vis NR $= \frac{\alpha uvdx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et vis NS $= \frac{\alpha uvdy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. Summa ergo omnium virium elementarium N S erit $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et summa omnium RN $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. At momentum vis R N respectu puncti A est $\frac{\alpha uv(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, vnde summa omnium momentorum $= \alpha v \int \frac{v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, quae diuisa per $\alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ dabit punctum C in axe AB, per quod media directio vis venti CW transibit, erit scilicet AC $= \frac{\int \frac{u(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}}{\int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}}$. Atque vis tota venti reducetur ad duas vires C E et C F, quarum illa est C E $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et CF $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ ex quarum compositione oritur vis CG vi venti, quam velum AMB sustinet, aequiualens.

§. 752. Quodsi ad angulum attendamus, quo media directio vis venti CW ab ipsa directione venti VQ declinat, facile colligemus, eum angulo recto fore eo minorem, quo magis figura veli AMB fuerit incuruata siquidem ventus totam internam veli superficiem feriat. Si enim ventus directe in velum impingat, tum quidem media directio CM ab ipsa venti directione VQ non discrepabit

bit, ex quo intelligitur discrepantiam cum obliquitate anguli AQV crescere. At vero haec obliquitas vltra certum terminum crescere non potest, quin portio veli quaedam prorsus non a vento impellatur, atque adeo inutilis euadat. Sin autem ventus maxima obliquitate, quam memorata conditio permittit, in velum illabatur, tum portionem quidem aliquam veli vehementer oblique stringet, hincque directio vis venti fere ad angulum rectum discedet a directione venti, simul vero ventus ob curuaturam veli in reliquam portionem magis directe incurret, vnde directio vis venti multo magis ad directionem venti reducetur, propterea quod vis venti directe impingentis multo maior est, quam vbi oblique venit. Ex quibus efficitur, vela plana esse aptissima non solum ad maximam vim venti excipiendam, sed etiam ad cursum aduersus ventum instituendum.

§. 753. Quanquam haec per se satis sunt plana, tamen eo magis illustrabuntur, si vim venti, quam in vela flexibila exerit, determinabimus, quo in negotio imprimis necesse est, vt curuatura, quam ventus velo inducit, definiatur, hac enim cognita per solutionem praecedentis problematis, si curuatura inuenta loco figurae A M B substituatur, vis venti eiusque media directio cognoscetur. Quae operatio primo intuitu admodum molesta videtur, cum curua veli prodeat transcendens: at vero huius curuae inuentio ipsa simul monstrabit vim venti in velum exercitam, eiusque mediam directionem; ita vt substitutione non sit opus. Cum enim curuae etiam simplicissimae in calculo superiori substitutae ad aequationes maxime intricatas deducant, ea curua, quae a natura for-

matur, dum ventus velum perfecte flexile inflat, ad simplicissimum casum perducit; etiamsi ipsa sit transcendens. Eiusmodi scilicet commoda natura semper suppeditat, vt quo strictius eam sequamur solutiones quidem subinde intricatas attamen ita comparatas obtineamus, vt quaesito commodissime satisfaciant.

Fig. 2. §. 754. Sit igitur filum perfecte flexile BMA, quod loco veli considero, in B fixum, in A autem retineatur sufficienti vi AG, ita vt a vento VM inflatum et in figuram BMA incuruatum, in hoc statu perseueret. Ad hanc curuam BMA, quam filo ventus inducit inueniendam ex A duatur ad venti directionem recta normalis AP, quae instar axis consideretur, in quo ponatur abscissa $AP = x$, respondens applicata $PM = y$; et longitudo fili $AM = s$. Quoniam iam filum perfecte flexile ponitur, necesse est, vt omnes vires, quae filum in M inflectere conantur, se mutuo destruant, nisi enim hoc eueniret, filum actu in M magis minusue inflecteretur, ideoque status, quem iam permanentem pono, turbaretur. Quia hic tantum ad flexibilitatem, quam filum in puncto M habet, attendo, in reliquis locis id tanquam rigidum contemplor; eritque pars BM omnino immobilis, pars AM vero circa M quasi polum rotari posset, si vis hunc effectum intendens adesset. Patet autem a vi AG si ea sola adesset, filum vtique circa A motum iri; ab impulsionibus venti autem in partem AM factis filum in partem contrariam replicaretur, quamobrem necesse est, vt hi duo effectus se mutuo destruant.

§ 755. Vires autem, quibus corpus quodcunque circa polum seu axem fixum conuertitur, definiuntur per momen-

momenta, quae ex viribus respectu illius poli seu axis fixi nascuntur. Sic ad momentum ex vi AG, quae sit $= G$, cognoscendum, resoluatur haec vis in duas laterales AE et AF, axi AP cum cogruentes tum normales, ac sit vis $AE = E$ et vis $AF = F$; ita vt sit $G = \sqrt{(E^2 + F^2)}$. Hoc facto ex vi $AE = E$ nascitur momentum filum AM circa M dextrorsum rotans $= Ey$; at ex vi $AF = F$, oritur momentum sinistrorsum rotans $= Fx$, ita vt momentum ex vi G ortum et simistrorsum vrgens sit $= Fx - Ey$. Tantum ergo esse debebit momentum, quo filum circa M a vento dextrorsum sollicitatur: ad quod inueniendum capiatur quaecunque particula fili $Yy = d\omega$, et ordinatae ipsi respondentes ponantur $AX = \xi$, $XY = \Phi$ et ponatur breuitatis gratia vis venti elementum Yy vrgens $= pd\omega$; quae cum sit normalis puta YZ, resoluatur in laterales YR et YS coordinatis parallelas, erit vis $YR = pd\Phi$ at $YS = pd\xi$.

§. 756. Iam a vi $YR = pd\Phi$ oritur momentum dextrorsum vrgens $= pd\Phi(y - \Phi)$, et a vi $YS = pd\xi$ momentum pariter dextrorsum tendens $= pd\xi(x - \xi)$. Illorum igitur momentorum omnium summa erit $= y\int pd\Phi - \int p\Phi d\Phi$, si post integrationem ita peractam, vt integrale euanescat posito ξ et $\Phi = 0$, ponatur $\xi = x$ et $\Phi = y$; eadem ergo momentorum summa erit $= y\int pdy - \int pydy = \int dy \int pdy$, si pds denotet vim venti, quam elementum curuae Mm patitur. Simili modo summa alterorum momentorum ab A ad M vsque erit $= x\int pd\xi - \int p\xi d\xi$, si post integrationem debito modo peractam ponatur $\xi = x$: ex quo eadem momentorum summa erit $= x\int pdx - \int pxdx = \int dx \int pdx$. A vento ergo fi-

lum AM dextrorsum circa M vrgebitur momento virium $= \int dy \int p\,dy + \int dx \int p\,dx$, cui aequale esse debet momentum $Fx - Ey$, quo idem filum sinistrorsum pellitur. Hinc itaque obtinebitur ista aequatio $Fx - Ey = \int dy \int p\,dy + \int dx \int p\,dx$ seu $F\,dx - E\,dy = dy \int p\,dy + dx \int p\,dx$, qua natura curuae continetur.

§. 757. Quoniam $p\,ds$ denotat vim, qua elementum $Mm = ds$ a vento normaliter vrgetur, erit $p\,ds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, si quidem v denotet altitudinem celeritati venti debitam, et α est quantitas constans supra (§. 750) descripta. Quo autem haec ad mensuras finitas reducantur, necesse est filo latitudinem tribuere seu quasi infinita eiusmodi fila sibi parallela et contigua concipere, quo ipso figura veli quadrangularis rectangularis resultat, cuius longitudo cum sit AMB, ponatur latitudo $= c$ eritque $p\,ds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, et nunc α est $\frac{c}{100} \cdot \frac{M}{V}$, vbi M designat pondus massae aqueae, cuius volumen est V. Cum igitur sit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$, erit $\int p\,dx = \alpha v \int \frac{dx^3}{ds^2}$ et $\int p\,dy = \alpha v \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$, quia celeritas venti $\sqrt{v}$ est constans. Substituantur hi valores in aequatione supra inuenta, ac prodibit pro curua quaesita haec aequatio $\frac{Fx - Ey}{\alpha v} = \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2}$: quae autem ter differentiari deberet, antequam a signis integralibus penitus liberetur.

§. 758. Expediet autem aequationem generalem ad formam simpliciorem, et a signis integralibus liberam perducere. Cum igitur sit $F\,dx - E\,dy = dy \int p\,dy + dx \int p\,dx$, erit sumto dx constante $-E\,ddy = ddy \int p\,dy + p\,ds^2$, et $-E = \int p\,dy + \frac{p\,ds^2}{ddy}$; quae denuo differentiata dat $0 = 3p\,dy + \frac{dp\,ds^2}{ddy} - \frac{p\,ds^2 d^3y}{ddy^2}$, ob $ds\,dds = dy\,ddy$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{p} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3\,dy\,ddy}{ds^2} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3\,dds}{ds}$ quae integrata dat $p = \frac{c\,dx\,ddy}{ds^3}$.

$\frac{Cdxddy}{ds^3}$. Quocirca erit $\int pdx = C\int\frac{dx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Cdy}{ds} + M$; et $\int pdy = C\int\frac{dxdyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cdx}{ds} + N$. Quibus valoribus in prima aequatione substitutis erit $Fdx - Edy = \frac{-Cdxdy}{ds} + Ndy + \frac{Cdxdy}{ds} + Mdx$, vnde habetur $M = F$ et $N = -E$. Sumta ergo constante C, quae est arbitraria negatiua fiet $p = -\frac{Cdxddy}{ds^3}$; et $\int pdx = F - \frac{Cdy}{ds}$, atque $\int pdy = \frac{Cdx}{ds} - E$. Cum igitur puncto M in A translato tam $\int pdx$ quam $\int pdy$ euanescant, erit in A $\frac{dy}{ds} = \frac{F}{C}$ et $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{C}$; vnde fit $C = G = \sqrt{(EE+FF)}$.

§. 759. Cum iam nostro casu sit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$; habebimus pro curua AMB hanc aequationem $\alpha v dx ds = -Gddy$, quae integrata dat $\alpha v s dx = -Gdy + Cdx$; vbi ad constantem C determinandam notasse oportet, facto $s = \alpha$, fieri $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, vnde erit $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{G} = \frac{F}{E}$; ideoque $C = \frac{FG}{E}$. Consequenter ista emerget aequatio $\alpha v s dx = \frac{G}{E}(Fdx - Edy)$. Quo autem aequatio inter coordinatas, eliminato arcu s, obtineatur, resumatur aequatio $\alpha v dx ds = -Gddy$, quae per $\frac{dy}{ds}$ multiplicata fit $\alpha v dx dy = -\frac{Gdyddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, cuius integrale est $\alpha v y dx = Cdx - Gds$; et translato M in A, quia fit $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{G}$, erit $\frac{G}{C} = \frac{E}{G}$ et $C = \frac{G^2}{E}$; ideoque $\alpha v y dx = \frac{G^2dx}{E} - Gds$. Ergo $EGds = G^2dx - \alpha v Eydx$; et $EGdy = dx\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}$ siue $dx = \frac{EGdy}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha v Ey)}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$.

§. 760. Hinc primum patet directionem vis G velum retinentis cum tangente curuae in A congruere; translato enim M in A fit $dx : ds = AE : AG$. Deinde in-

telligitur curuam AM vbique concauitatatem axi AP obvertere; ex aequatione generali enim $p = \frac{-Gdxddy}{ds^3}$, sequitur ddy vbique habere valorem negatiuum, quod est signum concauitatis. Hancobrem curua alicubi habebit tangentem axi AP parallelam, quod eueniet, vbi fit $dy = 0$, seu $ds = dx$. Cum igitur sit $EGds = G^2dx - \alpha vEydx$ facto $ds = dx$ fiet $y = \frac{G^2 - EG}{\alpha vE}$; haec est ergo applicata maxima in curuatura veli AMB; et curua vltra hunc locum iterum ad axem AP accedet, donec ipsi occurrat. Denique ex aequationibus inuentis assignari potest longitudo arcus $AM = s$, per applicatam $PM = y$; erit enim per vltimam aequationem integratam $s = \frac{FG - \sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}{\alpha vE}$ et radius osculi curuae in M, qui est $= -\frac{ds^3}{dxddy}$, fiet $= \frac{G}{p} = \frac{Gds^2}{\alpha vdx^2} = \frac{(G^2 - \alpha vEy)^2}{E^2G}$.

Fig. 3. §. 761. Ponamus iam AMHB esse curuam veli a vento in directione VDH incurrente formatam, et quoniam positis $AP = x$; $PM = y$, et $AM = s$, est $dx = \frac{EGdy}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha vEy)}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}}$, ducatur ordinata maxima DH, quae nunc instar axis consideretur; ad quam ex M ducto perpendiculo MQ, ponatur $HQ = t$ et $MQ = z$; erit ob $HD = \frac{G^2 - EG}{\alpha vE}$; $PM = y = \frac{G^2 - EG}{\alpha vE} - t$; et $dx = -dz$; vnde fit $dy = -dt$ et $\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha vEG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)} = E\sqrt{(2\alpha vGt + \alpha^2v^2tt)}$. Quare erit $dz = \frac{Gdt}{\sqrt{(2\alpha vGt + \alpha^2v^2tt)}}$. Ponatur $\frac{G}{\alpha v} = a$, eritque $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at + tt)}}$; et quantitas a erit radius osculi curuae in puncto H, quod est quasi vertex curuae. Nam quia ob signum radicale eidem valori t respondet applicata z tam affirmatiua quam negatiua, erit axis HD simul curuae diameter orthogonalis.

§. 762.

§. 762. Ex data ergo curuatura veli AHB, quae inter coordinatas HQ $= t$ et QM $= z$ ista aequatione exprimitur $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$, innotescit vis, quae ad velum in dato loco A retinendum requiritur. Erit namque haec vis G $= \alpha a v$, ideoque constans: vnde ad velum in quocunque loco retinendum eadem requiritur vis, cuius directio cum tangente curuae in eo loco congruere debet. Scilicet si veli latitudo ponatur $= c$; atque massae aqueae, cuius volumen sit $=$ V, pondus sit $=$ M, quia est $\alpha = \frac{c}{800}\frac{M}{V}$; erit vis ad velum in quolibet loco detinendum requisita $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, seu ista vis aequabitur ponderi massae aereae cuius volumen est $= acv$; erit ergo hoc volumen parallelepipedon rectangulum, cuius tres dimensiones sunt, radius osculi curuaturae veli in vertice H; latitudo veli c, et altitudo debita celeritati venti v. Haec eadem vis autem simul praebet tensionem veli in singulis locis, qua superficies veli diruptioni resistit, quae ergo erit in duplicata ratione celeritatis venti, si velum eandem curvaturam conseruet.

§. 763. Quoniam est $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$ erit integrando $z = al^{\frac{a+t+\sqrt{(2at+tt)}}{a}}$. Quodsi ergo ponatur HD $= f$ et AD $= h$ erit $h = al^{\frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}}$; et si in A ducatur tangens AK axi occurrens in K, erit anguli AKH tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}}$; ideoque sinus $= \frac{a}{a+f}$; et cosinus $= \frac{\sqrt{(2af+ff)}}{a+f}$. Si igitur in axe capiatur HI $= a$ erit DI $= a+f$; ideoque habebitur AK : AD $=$ DI : HI. Posito porro arcu HM $= s$, erit $ds = \frac{dt(a+t)}{\sqrt{(2at+tt)}}$; atque ipse arcus HM $= s = \sqrt{(2at+tt)}$; vnde erit arcus AH $= \sqrt{(2af+ff)}$. Denique radius osculi in M erit $= \frac{ds^3}{-dtddz}$

$=$

$= \frac{(a+f)^2}{a}$; vnde in puncto A erit radius osculi $= \frac{(a+f)^2}{a} = \frac{DI^2}{HI}$; quae sunt praecipue curuae velariae proprietates.

§. 764. Consideremus nunc velum AHB quod vento directe ita exponatur, vt directio venti VH sit ad rectam AB normalis; quae recta AB per veli extremitates A et B, quibus est fixum, transeat. Sit distantia extremitatum $AB = 2h$ et longitudo veli seu curua AHB $= 2g$, quae duae res in praxi solent esse datae; vento ergo in directione VH incurrente velum in curuam ante descriptam incuruabitur, eritque eius vertex in H existente HD diametro curuae. Ponatur radius osculi in H, $= a$; et interuallum $HD = f$; habebimus ad has quantitates a et f determinandas istas duas aequationes $h = a\, l\frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}$ et $g = \sqrt{(2af+ff)}$; vnde erit $f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. et $h = a\, l\frac{g+\sqrt{(aa+gg)}}{a}$, ex qua aequatione valor ipsius a erui debet. Quod quo facilius praestari possit expediet logarithmum per seriem exprimere, eritque $h = g - \frac{1 \cdot g^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot g^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot g^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^6} +$ etc. vnde si cognitus esset valor ipsius a, reperiri posset facile valor ipsius h.

§. 765. Ex hac aequatione primum apparet si fuerit $h = g$ seu distantia AB ipsi veli longitudini AHB aequalis, fore $a = \infty$, quod quidem per se est manifestum, quia hoc casu velum in lineam rectam erit extensum, cuius radius curuedinis vbique est infinitus. Quodsi ergo h nonmulto fuerit minor quam g, qui casus solet esse frequentissimus, erit proxime $h = g - \frac{g^3}{6aa}$, ideoque $\frac{g^3}{6aa} = g - h$, vnde prodit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-h)}}$; hicque erit valor ipsius a, si velum vehementer extendatur, vt longitudo AHB non multum superet rectam AB. Sin autem accuratius

rem

rem definire velimus, ſumatur $h = g - \frac{g^3}{6aa} + \frac{3g^5}{40a^4}$, ſeu $0 = (g-h)a^4 - \frac{g^3aa}{6} + \frac{3}{40}g^5$; et ponatur $a^2 = \frac{g^3}{6(g-h)} + k$, et orietur $0 = \frac{g^6}{36(g-h)} + \frac{g^3k}{3} - \frac{g^6}{36(g-h)} - \frac{g^3k}{6} + \frac{3}{40}g^5$ ſeu $0 = k + \frac{9}{20}gg$; vnde erit $aa = \frac{g^3}{6(g-k)} - \frac{9gg}{20}$ atque $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-h)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-h)}$, qui valor pro praxi ordinaria ſatis tuto ſemper vſurpari poterit.

§. 766. Quodſi ergo velum AH vento ita directe opponatur, vt directio venti VH ad rectam AB ſit normalis, ex datis $AB = 2h$ et longitudine veli AHB $= 2g$ definietur radius oſculi in vertice curuae A, quem poſuimus $= a$, hincque ſinus veli $DH = f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. His cognitis ſi ducantur in A et B tangentes curvae AK et BK, erit anguli AKD ſeu BKD tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}} = \frac{a}{g}$; et vires, quae requiruntur ad velum in hoc ſtatu ſuo continendum, in directionibus Aa et Bb agentes erunt $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, cum his igitur binis viribus in aequilibrio erit vis venti a velo excepta. Sit haec vis $= P$, erit ex natura aequilibrii $\frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$; $P =$ ſin. AKD : ſin. AKB $= 1 : 2$ coſ. AKD, hoc eſt vt $1 : \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Erit ergo vis venti $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Cum autem ſit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-h)}} - \frac{9}{40}\sqrt{69(g-h)}$, erit $\frac{a}{\sqrt{(aa+gg)}} = 1 - \frac{3(g-h)}{g}$ erit $P = \frac{cv(h-g)}{400} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 767. Manentibus ergo celeritate venti et latitudine veli c iisdem, vis venti in velum exerta erit vt $3h - 2g$. Sit primum $h = g$, quo caſu velum in planum extenditur et ob a infinitum vires requiruntur infinitae magnae ad velum in ſtatu hoc continendum; interim tamen vis a vento excepta erit vt g, qua nauis propelletur. Sit

iam $h = \frac{n-1}{n} g$, fiet vis venti vt $\frac{n-3}{n} g$; quae ergo erit ad vim eiusdem veli plani vt $n-3$ ad n. Quamobrem si $n = 6$, hoc est si fuerit longitudo AB ad longitudinem veli AHB vt 5 ad 6, tum vis a vento orta duplo erit minor, quam si velum esset in planum extensum; minores valores pro n assumere non licet quia approximatio instituta hoc non permittit. Si velum planum longitudinis $AB = 2h$ concipiatur, foret eius vis a vento accepta vt h hoc est vt $\frac{n-1}{n} g$. Quare vires, quas ventus idem exerit I in velum AHB, II in velum planum AB, et III in velum AHB in planum expansum, erunt vt 1, $n-3$; II $n-1$; III, n: sicque duplici modo vis venti in velum incurvatum diminuitur.

§. 768. Per obseruationes autem praeter interuallum AB et longitudinem veli AHB commode innotescit sinuamen veli seu distantia $HD = f$; qua cognita sine valore radii osculi a vis venti in velum exercita definiri potest. Cum enim sit $g = \sqrt{(2af + ff)}$, fiet $a = \frac{gg - ff}{2f}$ et $\sqrt{(aa + gg)} = \frac{gg + ff}{2f}$. Quare cum vis a vento excepta sit $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$ fiet factis substitutionibus $P = \frac{2gcvM}{800V} \cdot \frac{gg - ff}{gg + ff}$, vbi est g semissis longitudinis veli AHB. Hinc sequitur fore vim venti in velum AHB, si esset in planum expansum, ad vim venti in idem velum incurvatum AHB vti est 1 ad $\frac{gg - ff}{gg + ff}$ seu vt $gg + ff$ ad $gg - ff$. Si igitur esset sinuamen HD pars decima totius veli longitudinis AHB, ita vt sit $f = \frac{1}{5} g$, erit vis huius veli in planum expansi ad vim eiusdem incuruati vt 1 ad $\frac{24}{25}$, seu vt 13 ad 12, ita vt per hanc incuruationem pars decima tertia vis pereat.

§. 769.

§. 769. Multo difficilior autem eſt quaeſtio, ſi recta A B extremitates A et B veli iungens cum directione venti VH obliquum faciat angulum BFH; atque longitudo veli AHB data ſit: tum enim primo axis ſeu diameter curuae velariae et ipſa curuae, quam velum induet, poſitio determinari debet, qua cognita praeter quantitatem vis, quam ventus in velum exerit, eius directio erit definienda, quae aliquantum a venti directione VH diſcrepabit. Manifeſtum quidem eſt, ſi velum eſſet planum, hoc eſt, ſi longitudo AHB non excederet interuallum A B, tum directionem vis venti normalem futuram eſſe ad rectam AB; incuruatio autem non ſolum hanc venti vim diminuet, ſed etiam directionem eius propius ad venti directionem VH adducet. Atque ob hanc rationem laxitas velorum plurimum curſui adverſus ventum inſtituendo obeſt, quippe ad quem curſum requiritur, vt directio vis a vento exceptae plurimum diſcrepet ab ipſa venti directione, plus autem, quam ad angulum rectum diſcrepare nequit. Tab XXII. fig. 4.

§. 770. Sit igitur interuallum $AB = b$, et longitudo veli $AHB = g$, ita vt ſit $g > b$; ponatur anguli BFH quem directio venti cum poſitione rectae AB facit, ſinus $= m$ coſinus $= n$, quae ſunt cognita. Tum ex incognitis ſit VH axis curuae, quam velum induit, a eius radius oſculi in vertice H, atque ad hunc axem ex punctis A et B demiſſis perpendiculis AD et BE, ponatur $HD = t$; $AD = u$; et $HE = x$; $BF = y$; erit ex natura curuae $u = \int \frac{adt}{\sqrt{(at+tt)}}$ et $y = \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$; atque arcus $AH = \sqrt{(2at+tt)}$ et arcus $BH = \sqrt{(2ax+xx)}$. Tum vero erit $BE + AD = mb$ et $HD - HE = nb$,