$\frac{b\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$): ex qua aequatione si valor ipsius u eruatur, atque in $\frac{Mgu}{3Vbb}(a-\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$ substituatur, prodibit vis, quam remus ab aqua in directione ST sustinet.

§. 616. Quoniam vero hic remi pars, quae in aqua vibratur, in se non est determinata, sed tam ex ipsius remi, quam aquae celeritate determinatur, in praxi eiusmodi mensura obseruari difficulter poterit. Quamobrem vt propius ad praxin inuestigationem nostram accommodemus, simulque calculo consulamus, in quo rem vero proxime expediuisse sufficit; concipiamus ergo remum palae formem ODFF cuius planities DFF aquam findat; sit eius centrum grauitatis, seu potius media directio vis aquae in puncto S, quod in planitiei puncto medio satis tuto accipere licet, siquidem longitudo DF prae OS sit valde parua. Ponatur $OS = a$, sitque latitudo remi $FF = g$ et longitudo $DF = b$, erit iam ex praecedentibus vero proxime vis, quam iste remus vibratus ab aqua sustinet $= gb\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}\right)^2$, seu pondus huic vi aequiualens est $= \frac{Mgb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}\right)^2$; quae vis in puncto S normaliter ad planitiem DFF erit applicata.

Fig. 5.

Fig. 3.

§. 617. Posita igitur portionis remi aquam findentis longitudine $= b$, et latitudine $= g$, remus ROS in S vrgebitur in directione ST vi $= \frac{Mgb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}\right)^2$ cuius momentum respectu hypomochlii O erit $= \frac{Magb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}\right)^2$. Huic ergo momento aequale esse debet momentum vis remigis, quod est $= pb(1-\frac{u}{a})$, ita vt habeatur ista aequatio $pb(1-\frac{u}{a}) = \frac{Magb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}\right)^2$, ex qua si valor ipsius u eruatur, innotescet vera vis, quam remex exercet. Si igitur obliquitas remi tam fuerit parua vt

sinus

ſinus m ſinui toti aequalis aeſtimari queat, tum erit $pb\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)=\frac{Magb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b}-\sqrt{v}\right)^2$; et vis ST quam remus ſuſtinet erit $=\frac{Mgb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b}-\sqrt{v}\right)^2$ vel $=\frac{pb}{a}\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)$.

§. 618. Si igitur nauis ſtatuatur mobilis ab hac vi ST actu mouebitur, ſimul vero conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem. Quod ſi autem in altera nauis parte alius remus aequali vi vibretur, tum vires nauem rotantes ſe mutuo deſtruent, atque vis nauem in directione ſpinae BA propellens duplicabitur ita vt ea futura ſit $=\frac{2pb}{a}\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)$. Haec autem vis non continuo aget, cum remiges tempore opus habeant, cum ad remum ex aqua poſt finitam vibrationem extrahendum tum iterum in aquam immittendum, ita vt triens tantum temporis totius fere ad nauem promouendam impendatur. Hanc obrem ſex remigum more ſolito operantium effectus huc redibit, vt nauis conſtanter vi $=\frac{2pb}{a}\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)$ propellatur: atque ſi 6ψ remiges operi ad moueantur, erit vis ab illis exerta $=\frac{2\psi pb}{a}\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)$.

§. 619. Ponamus iam reſiſtentiam, quam nauis motu ſuo directo in aqua ſuffert, tantam eſſe, quantam ſuperficies plana ff, directe in aqua mota aequali celeritate patitur; atque ſit motus nauis iam ad aequabilitatem perductus, ita vt celeritas ipſius debita ſit altitudini v. Habemus ergo caſum ſupra tractatum, quo aquam contra navem quieſcentem celeritate $\sqrt{v}$ aduenire poſuimus; ſcilicet remi in naui hac celeritate mota in aqua ſtagnante eundem praeſtabunt effectum, ac ſi nauis quieſceret, et aqua celeritate $\sqrt{v}$ in directione HX affluereet. Reſiſtentia ergo quam nauis iſta celeritate ſecundum directionem

BA mota patitur erit $= \frac{Mffv}{V}$, cui, quia motus aequabilis ponitur, aequalis esse debet vis remorum, quorum numerus sit 6ψ, quae est $= \frac{2\psi pb}{a}\left(1 - \frac{u}{\alpha}\right)$, ita vt habeatur ista aequatio $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}\left(1 - \frac{u}{\alpha}\right)$.

§. 620. Ad motum nauis igitur a 6ψ remigum opere ortum definiendum habemus has duas aequationes $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}\left(1 - \frac{u}{\alpha}\right)$ et $pb\left(1 - \frac{u}{\alpha}\right) = \frac{Magb}{V}\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v}\right)^2$; quae vt ad simpliciorem formam redigantur, ponamus longitudines in pedibus rhenanis exhiberi, et cum sit $\alpha = 1$, $M = 64$ V libr. et $p = 32$ libr. obtinebimus has aequationes $ffv = \frac{\psi b}{a}(1-u)$ et $b(1-u) = 2agb\left(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v}\right)^2$; ex quarum posteriori oritur $\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v} = \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agb}}$ et $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agb}} = \sqrt{\frac{\psi b(1-u)}{aff}}$. Erit ergo $\frac{aau}{bb} = \frac{b(1-u)}{a}\left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2$. Sit $\frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = z$ erit $z^3 u = (1-u)\left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2$ hincque $u = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2}{z^3 + \left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2}$ et $1 - u = \frac{z^3}{z^3 + \left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2}$ et consequenter $v = \frac{\psi zz : ff}{z^3 + \left(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2}$.

§. 621. In hac expressione designat gb planitiem remi, qua aqua finditur; intelligitur ergo quo maior fuerit ista planities eo maiorem proditurum esse nauis celeritatem; et, si amplitudo ista remi fiat infinita, tum prodit $v = \frac{\psi zz}{ffz^3 + \psi}$, quae est ea ipsa expressio, quam invenimus posito obstaculo, cui remus applicatur, immobili. Hoc ipsum natura rei postulat, nam facta amplitudine remi infinita, resistentia aquae erit infinita, ideoque obici immobili aequiualebit. Minor ergo remi superficies naui minorem inducet celeritatem; ex quo videatur maxime ex-

expedire remos quam ampliſſimos confici. Verumtamen aliae rationes nimiam remi amplitudinem diſſuadent; quoniam quo amplior remi extremitas efficitur, eo fortiorem ac grauiorem remum facere oportet, quo fit, vt difficilius vibretur indeque propulſio nauis debilitetur.

§. 622. Tantam igitur remis amplitudinem tribui oportet, quantam reliquae circumſtantiae permittunt; has autem ſi conſulamus, deprehendemus remo ab vno homine agitando maiorem commode amplitudinem tribui non poſſe, quam vnius pedis quadrati, ita vt futurum ſit $gh = 1$ et $\sqrt{\frac{1}{2gh}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$ proxime. Si materia ſimul leuior ac fortior reperiatur, vt remus minus grauis eandem vim ſuſtinere queat, tum vtique conſultum erit maiorem amplitudinem conficere; qua in re experientia aptiſſimam ſuppeditabit deciſionem: dummodo hoc praeceptum teneatur, vt remi circa extremitatem, qua aquam vrgent, tam fiant ampli quam fieri poteſt; vt ſcilicet non ſolum ſatis ſint firmi ſed etiam ab vno homine facile tractari poſſint. Si plures homines vni remo deſtinentur, tum pari modo ex eorum vi tam firmitas remi, quam pondus et amplitudo determinabuntur.

§. 623. Sit $\sqrt{\frac{1}{2gh}} = \gamma$, et $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$, erit vt oſtendimus $\gamma = 0,7071$ quam proxime; retinebimus autem valorem generalem γ; vt concluſiones latius pateant: erit ergo $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (\gamma+\delta)^2}$ ped. Maxima ergo ab eodem remigum numero, et eadem remorum amplitudine, naui celeritas imprimetur, ſi fuerit $z^3 = 2(\gamma+\delta)^2$, et $z = \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$. Definitur ergo hac aequatione ratio maxime idonea inter partes remi SO et RO, ad

nauem

nauem celerrime promouendam. Si $\gamma = 0$, prodit casus supra tractatus, vbi remos obstaculis immobilibus applicari posuimus; praesenti igitur casu, dum aqua remo cedit ratio SO ad RO maior oritur, ideoque pars remi exterior SO respectu partis interioris RO maior statui debet, quam in praecedente hypothesi erat definita: et quo minor remo amplitudo tribuitur ob auctum valorem γ, ratio $\frac{SO}{RO}$ augebitur.

§. 624. Quoniam est $\gamma = 0$, $7071 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, erit $2\gamma\gamma = 1$, hincque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + 2\delta\sqrt{2} + 2\delta\delta)}$; quae fractio cum sit vnitate maior, indicat perpetuo in remis partem exteriorem SO superare debere partem intra nauem stam RO; quantumuis exiguus sit remigum numerus 6ψ. Aucto autem remigum numero 6ψ, ratio SO ad RO magis augeri debet. Si ergo pro quouis pede quadrato, quem superficies ff resistentiam absolutam exhibens continet, sex remiges constituantur, vt sit $\psi = ff$, fiet $\delta = 1$ eritque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})} = 1$, $79963 = \frac{9}{5}$ proxime. Hoc ergo casu debet esse SO:RO $= 9 : 5$. Si numerus remigum ab hac regula paulisper discrepet, vt sit $\psi = ff(1 \pm \theta)$ existente θ fractione quam minima, erit $\delta = \sqrt{(1 \pm \theta)} = 1 \pm \frac{\theta}{2}$ et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2} \pm (2 + \sqrt{2})\theta)} = \frac{9}{5} \pm \frac{2\theta}{5}$; seu erit SO:RO $= 9 \pm 2\theta : 5$ proxime, si fuerit numerus remigum $= 6(1 \pm \theta)ff$.

§. 625. Hinc definiri potest absolute maxima celeritas, quam datus remigum numerus, remis secundum praecepta data institutis, naui imprimere valet. Cum enim

sit

ſit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (\gamma+\delta)^2}$, et $z = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, fiet $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ $= \frac{2\delta\delta . RO}{3SO}$ ped. Hinc nauis vno minuto primo propelletur per ſpatium $387, 3\delta\sqrt{\frac{RO}{SO}}$ pedum, hoc eſt per ſpatium $\frac{345\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ pedum. Si igitur ſit numerus remigum $6\psi = 6ff$, ita vt ſit $\delta = 1$, et ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, nauis tempore vnius minuti propelletur per ſpatium $387, 3\sqrt{\frac{5}{9}} = 288\frac{3}{4}$ pedum. Vna igitur hora nauis percurret ſpatium 17323 pedum, quod ſpatium aliquanto beſſem vnius milliaris germanici ſuperat. Si eſſet $\gamma = 0$, atque remi obſtaculis inuincibilibus applicentur, tum caſu $\psi = ff$ nauis vna hora ſpatium 20700 pedes abſolueret.

§ 626. Ex his porro numerus remigum determinari poterit, qui nauem dato tempore per datum ſpatium promouere valeant. Oporteat ſcilicet nauem tempore vnius horae per ſpatium n pedum propelli; ac fiet $n = \frac{20700\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ $= \frac{20700\delta}{\sqrt[3]{(\delta+\sqrt{\frac{1}{2}})}}$ ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ſit $n = 20700\,m$. fiet $\delta^3 = m^3\delta + m^3\sqrt{\frac{1}{2}} = m^3\delta + m^3 . 0,7071$. Quodſi ſpatium vna hora abſoluendum ſit vnum milliare, fiet $m = 1,1414$ eritque adeo $\delta^3 = 1,48701\delta + 1,05148$; vnde reperitur $\delta = 1,4822 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$. Habebitur ergo $\psi = 2,1967\,ff$, et remigum requiſitorum numerus erit $= 13,18\,ff$. Vt autem nauis vna hora tantum 20700 pedes conficiat, ex aequatione $\delta^3 = \delta + 0,7071$ oritur $\delta = 1,2531 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, hincque $\psi = 1,57\,ff$, numerus ergo remigum ad hoc iter abſoluendum requiſitus eſt $6\psi = 9,42\,ff$.

§. 627. Ponamus numerum remigum $6\psi = nff$ erit $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \sqrt{\frac{n}{6}}$; et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{4n}{3}} + \frac{n}{3})}$; nauisque vna hora propelletur per ſpatium $23238 \sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \frac{RO}{SO} = \frac{9487\sqrt{n}}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{n}{3}})}}$ pedum, ſubſtituendis ergo loco n ſucceſſiue numeris definitis erit

numerus Remigum	Ratio RO : SO	nauis vna hora propellitur per ſpatium.
ff	1000 : 1355	8150 ped.
$2\,ff$	1000 : 1488	10995 ped.
$3\,ff$	1000 : 1587	13042 ped.
$4\,ff$	1000 : 1668	14690 ped.
$5\,ff$	1000 : 1738	16092 ped.
$6\,ff$	1000 : 1800	17323 ped.
$7\,ff$	1000 : 1855	18426 ped.
$8\,ff$	1000 : 1907	19432 ped.
$9\,ff$	1000 : 1954	20358 ped.
$10\,ff$	1000 : 1998	21217 ped.
$11\,ff$	1000 : 2040	22022 ped.
$12\,ff$	1000 : 2080	22786 ped.

§. 628. Quoniam igitur remis ad celerrimum nauis motum inſtructis naui a 6ψ remigibus imprimitur celeritas debita altitudini $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$, videamus quanta vis requiratur, quae nauem directe ſecundum BA trahens ipſi eandem celeritatem inducat. Sit vis haec quam quaerimus $= P$ librarum: fiet $P = \frac{Mffv}{V} = 64\,ffv$ libr. ſi f et v in pedibus exprimantur, erit ergo $v = \frac{P}{64\,ff}$, quae ipſi

ipsi $\frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$ aequalis posita dabit $P = \frac{128\delta\delta ff}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$; tantam ergo vim 6ψ remiges exerunt; vis igitur vnius remigis valebit $\frac{64\delta\delta ff}{9\psi\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$ libr. $= \frac{64}{9\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$ libr. propter $\frac{\psi}{ff} = \delta\delta$. Cum iam sit $\frac{SO}{RO} = \sqrt{2}(\gamma+\delta)^2$, erit vis vnius remigis $= \frac{64 \cdot RO}{9 \cdot SO}$ libr. Si igitur sit $RO = SO$, vis vnius remigis valebit $7\frac{1}{9}$ libr; at si $SO = 2RO$ valebit tantum semissem $3\frac{5}{9}$ libr.

§. 629. Ex his intelligitur vires singulorum remigum, quatenus tendunt ad nauem propellendam, sine respectu ad nauem habito determinari non posse, etsi remiges aequales vires ad remos vrgendos impendant. Vidimus autem cum semper debeat esse $SO > RO$, maximam vim vnius remigis ad nauem propellendam non vltra 7 libras extendi posse, quae autem si nauis celerius progrediatur adhuc multo fit minor. Scilicet si nauis vna hora integrum milliare germanicum absoluat, tum ob $\frac{SO}{RO} = 2,1246$, vnius remigis vis valebit $3\frac{1}{3}$ libr; ita vt de 32 libris, quas remex quisque ad remum impendit, tantum $3\frac{1}{3}$ librae ad nauem propellendam impendantur. Celeritate igitur nauis cognita, ex tabula praecedente innotescit ratio inter SO ad RO; hincque definietur vis vnius remigis ad nauem propellendam: si quidem remi modo maxime lucroso sint instructi.

§. 630. Quemadmodum haec ex principiis indubitatis deduximus, ac litteris vniuersalibus tales tribuimus valores, qui a praxi parum discrepant, sic etiam conclusiones, quas inde sumus consecuti, experientiae satis sunt consentaneae. Quod vt clarius appareat, exemplum ab experientia petitum secundum theoriam curatius euoluamus. Perhibetur autem eiusmodi exemplum in Comment. Acad.

Scient. Parisinae A. 1702, quo Vir Celeb. Daniel Bernoulli vsus est in Hydrodynamica; triremis scilicet Galera dicta a 260 Remigibus propulsa singulis minutis secundis $7\frac{1}{3}$ pedes absoluebat: tenebat autem in remis pars exterior SO ad partem interiorem RO rationem duplam, atque omnium remorum planities, quibus aqua findebatur, aestimabatur 130 pedum quadratorum. Resistentia triremis non assignatur, videtur autem ea tanta assumi posse, quantum patiatur superficies 20 ped. quadratorum aequali celeritate directe in aqua mota.

§. 631. Primum discrimen statim in eo versatur, quod in hoc exemplo singulis remigibus tantum semissis pedis quadrati, quo aquam percutiunt, tribuatur; dedimus autem hactenus vnicuique remo planitiem vnius pedis quadrati; quare hoc casu erit $gb = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2gb}} = \gamma = 1$. Mirum autem non est, hic minorem planitiem vni remigi respondere, quoniam plures remiges vni remo erant admoti, atque planities remorum non in eadem ratione augeri potest, si enim casu duorum remigum vni remo admotorum velimus superficiem remi duplicare, pondus remi in ratione $2\sqrt{2} : 1$ augeri deberet; ex quo duo homines multo maiorem difficultatem offenderent ad hunc remum mouendum, quam vnus homo ad remum simplicem. Etsi ergo, si quisque remex remum vibrat, assumi potest $gb = 1$, in casu praesente tamen valor ipsius gb erit $= \frac{1}{2}$.

§. 632. Quoniam numerus remigium est 260, fiet $\psi = 43\frac{1}{3}$; hinc erit ob $ff = 20$ circiter, $\frac{\psi}{ff} = 2,1666$ etc. haec autem quantitas, quia pendet a vi cuiusque remigis, quae valde est variabilis, et modo intendi modo remitti potest, non tam exacte definiri potest, sed si

si remiges maiorem vim intendant, augetur, contraque diminuitur. In casu praesente videntur remiges omnibus viribus labori incubuisse, quia singulis minutis 24 vibrationes absoluisse perhibentur, ita vt quantitas $\frac{\psi}{ff}$ maiorem valorem habuisse videatur. Sumamus ergo $\frac{\psi}{ff} = 2,56$ vt sit $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 1,6$; et $\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 2,6$. Porro ratio partium cuiusque remi SO : RO erat dupla ideoque $\frac{a}{b} = z = 2$, hincque ex §. 620, resultat altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{10,24}{14,76}$ ped. qua ergo nauis singulis minutis primis absoluet 395 ped. hincque singulis minutis secundis 6, $\frac{7}{12}$ ped.

§. 633. Experientia autem docuit istam nauem singulis minutis confecisse $7\frac{1}{5}$ pedes, quamobrem necesse est vt vel remiges multo maiorem vim exercuerint, quam quidem assumsimus, vel resistentia nauis minor fuerit quam quae plano 20 ped. quadr. designari queat. Maiorem ergo fuisse oportet valorem $\frac{\psi}{ff}$, quam posuimus, quamobrem eius valorem a posteriori inuestigemus. Sit ergo $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$ erit $v = \frac{4\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$; cui vno minuto secundo respondet spatium $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4000\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$ ped; quod cum esse debeat $7\frac{1}{5}$ ped. erit $\frac{36}{5} = \sqrt{\frac{250\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$, ex qua fit $\delta = 1,7964$ hincque $\frac{\psi}{ff} = 3,2367$. Ita vt fuerit vel ff tantum 13, 39 ped. quadr. vel remiges maiorem vim quam 32 libr. impenderint vel vtrumque.

§. 634. Cognito iam per experientiam valore $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, inquiramus, quantum ratio $\frac{SO}{RO} = z$, quae erat $= 2$ discrepet ab ea, quae naui maximam celeritatem ceteris paribus imprimere valet. Scilicet cum sit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (i+\delta)^2}$

 fiet

fiet haec expressio maxima, si fuerit $z^3 = 2(1+\delta)^2 = 15,638$, quae praebet $z = 2,5 = \frac{SO}{RO}$. Quare si remorum pars exterior ad interiorem habuisset rationem vt 2, 5 ad 1 seu vt 5 : 2, tum iidem remiges nauem adhuc celerius, idque cellerrime, quantum eadem vi licet, promouissent. Hoc enim casu foret $v = \frac{20229}{23457}$ ped. qua celeritate minuto secundo absoluuntur pedes 7, 3416. minuto primo autem 440, 496, et hora vna 26429, 76 ped. Ratione autem $\frac{SO}{RO} = 2$ nauis vno minuto secundo fecit 7, 2 ped. vno minuto primo 432 ped. et vnius horae spatio 25920 ped.

§. 635. Exemplo hoc non solum theoria, quam de actione remorum exposuimus, confirmatur, verum etiam ipsa praxis huius theoriae ope ad maiorem perfectionis gradum euehi poterit. Per experientiam quidem iam satis prope ii casus, quibus maximum minimumue locum habet, sunt eruti, atque etiam in exemplo allato ratio SO : RO = 2 : 1 non tantopere a vera et maxime lucrosa 5 : 2 differt, quam videatur: dum enim plures remiges vni remo erunt admoti, omnes non in eodem puncto remum sollicitare possunt, ex quo pars remi interior RO minor aestimari debet, quam reuera est, qua diminutione ratio SO : RO a ratione 5 : 2 parum discrepabit. Neque tamen sola praxis sine subsidio theoriae verum cuiusque maximi minimiue gradum supeditare valet; hincque theoria perpetuo praxi quantumuis iam excultae insigne adiumentum ac lucrum afferet.

§. 636. Quoniam igitur in agitatione remorum consueta tam exigua portio virium, quas remiges exerunt, ad nauis promotionem impenditur; eo quod duas temporis, qua

qua vnaquaeque agitatio absoluitur, partes in eleuatione remorum eorumque noua applicatione consumunt, vnamque tantum partem remos in aqua vibrant. Quo fit vt etiam in hoc temporis articulo non solum multum de vi sua perdant, antequam remum ad motum aequabilem perducant, sed etiam maximam partem remum oblique percutiant, quoniam vtrumque effectum remi vehementer debilitant. Primum igitur duae tertiae partes totius vis a remigibus exertae inutiliter pereunt; ac deinde quauis agitatione motus de nouo generari debet; neque enim motus in praecedente agitatione genitus, quicquam ad sequentem confert, quin potius motus ante productus totus destrui debet, quod sine virium dispendio fieri nequit. Ex quo mirum non est de 32 libris, quas cuique remigi tribuimus tantum $3\frac{1}{3}$ libras ad nauis propulsonem redundare.

§. 637. Incommodum hoc practici quoque iam pridem senserunt, et hancobrem alium remigandi modum proposuerunt, quo remi in rotam dispositi motu continuo in gyrum agantur. Qui modus vtique, si commode ad praxin accommodari posset insigni gauderet praerogatiua prae modo solito. Primo enim omnis vis, quae continuo ad rotam circumagendam impenditur, perpetuo remos contra aquam impellit, neque vllo tempore vis omnino inutiliter collocatur. Deinde motus rotae semel impressus non solum non destrui debet, sed etiam non parum confert ad vniformitatem conseruandam; ita vt nulla virium portio inutiliter impendatur, nisi quae ad frictionem superandam requiritur. Quo igitur intelligatur, quantum emolumentum ab huiusmodi machina sit expectandum, effectum ab ea oriundum calculi ope determinabimus; simul

Tab. XVIII. fig. 6.

mulque inuestigabimus, quomodo ea ad institutum maxime idonea sit instruenda.

§. 638. Ad vtrumque igitur nauis latus constituta sit rota mobilis circa axem horizontalem O, cuius radii OA, OB, OC, etc. sint totidem remi cylindro O tam firmiter affixi, quantum vis ab ipsis sustinenda postulat. Vnusquisque ergo radius erit remus, cuius superficies, qua aquam percutit, cum axe horizontali in eodem plano est sita. Sit IK superficies aquae cui remorum partes Bβ, Cγ, Dδ, Eε, Fζ immergantur, atque circum agatur rota in sensum ABCDE, vt palae remorum submersae in aquam impingant. A vi igitur aquae nauis secundum directionem KI promouebitur; vires enim, quam singulae palae sustinent, eundem in naui propellenda effectum exerent, ac si in directionibus parallelis in centro grauitatis nauis essent applicatae.

§. 639. Ponamus nauem motum vniformem iam esse adeptam, quo in directione K progrediatur celeritate altitudini v debita; quem motum si in aquam transferamus, perinde erit, ac si nauis quiesceret, atque aqua in directione IK celeritate eidem altitudini v debita incurreret. Sit quoque celeritas, qua rota in plagam ABCD convertitur, aequabilis et altitudo debita celeritati, qua extremitates radiorum A, B, C, etc. circumaguntur, sit $= u$. Longitudo radiorum OA ponatur $= a$, et latitudo palarum aquam findentium sit $= g$. Teneat pala OD situm verticalem, sitque eius pars δD aquae submersa $= b$, ita vt huius palae superficies aquam percutiens sit $= gb$; erit pars radii extra aquam eminens O$\delta = a - b$. Consideretur iam alia quaecunque pala OC cum verticali OD an-

angulum conſtituens COD, cuius ſinus ſit $= m$, coſinus $= n$, poſito ſinu toto $= 1$, erit $\frac{O\delta}{O\gamma} = n$, et $O\gamma = \frac{a-b}{n}$ hincque pars aquam findens γC erit $= a - \frac{a+b}{n} = \frac{b-(1-n)a}{n}$, quae motu angulari circa O in aquam impingit.

§. 640. Conſideremus huius palae elementum quodcunque X, in aqua verſans, cuius ab axe O diſtantia ſit $OX = x$. Hoc ergo punctum in directione ad OC normali XN mouebitur celeritate $= \frac{x\sqrt{u}}{a}$; tantaque celeritate aqua in hanc palam incurreret in directione NX, ſi aqua non haberet motum propium. At cum ob motum navis aqua moueatur in directione HX celeritate $\sqrt{v}$; ſumto $XN = \frac{x\sqrt{u}}{a}$, capiatur $XM = \sqrt{v}$, et compleatur parallelogrammum XMLN, cuius diagonalis LX tam directionem quam celeritatem, qua aqua in X incurrit, repreſentabit. Erit autem vis aquae incurrentis, vt quadratum celeritatis XL^2 et quadratum ſinus anguli incidentiae LXC coniunctim, ex quo vis aquae erit vt $XL^2 (\text{ſin.} LXC)^2$. Eſt vero $\text{ſin.} LXC = \text{coſ.} LXN$, et $(\text{ſin.} LXC)^2 = 1 - (\text{ſin.} LXN)^2$ et propter $\text{ſin.} LXN = \frac{LN\,\text{ſin.}\,LNX}{XL}$, erit $(\text{ſin.} LXC)^2 = 1 - \frac{LN^2(\text{ſin.}\,LNX)^2}{XL^2}$.

§. 641. Cum iam ſit anguli XNL ſinus $= m$, et coſinus $= n$, erit $XL^2 = v + \frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{vu}}{a}$; et $LN^2 (\text{ſin.} LNX)^2 = mmv$; hincque oritur vis aquae in elementum X vt $(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, quae ſi ducatur in elementum gdx dabit volumen aquae $= gdx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, cuius pondus aequale eſt vi aquae impingentis. Directio huius vis normalis eſt ad ſuperficiem palae, ex eaque ergo oritur vis nauem horizontaliter promouens $= ngdx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} -$

 $n\sqrt{v})^2$

$n\sqrt{v})^2 = ngdx\left(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv\right)$, quae integrata dat $\frac{ngx^3u}{3aa} - \frac{nngxx\sqrt{uv}}{a} + n^3gxv - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$. Ponatur $x = a$, ac prodibit vis a tota pala $C\gamma$ ad nauem promouendam orta $= \frac{ngau}{3} - nnga\sqrt{uv} + n^3gav - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$.

§. 642. Praeterea vero vis aquae circumactionem rotae impedit, qui effectus propterea vi hominum compensari debet. Determinanda haec ex momento, quod ista vis respectu axis O praebet, quod est $= gxdx\left(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv\right)$. Huius integrale est $= \frac{gx^4u}{4aa} - \frac{2ngx^3\sqrt{uv}}{3a} + \frac{nngxxv}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3n^2a} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Ponamus $x = a$, vt prodeat totum momentum a pala $C\gamma$ ortum circumactioni rotae resistens $= \frac{gaau}{4} - \frac{2ngaa\sqrt{uv}}{3} + \frac{nngaav}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3nna} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Hic autem vbique notandum est esse debere $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$; oportet ergo esse $\frac{(a-b)\sqrt{u}}{na} > n\sqrt{v}$ seu $a-b > \frac{nna\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. In situ ergo verticali OD debet esse $a-b > \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ seu $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; quod, si euenerit in omni situ obliquo simul erit $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$.

§. 643. Ponamus iam rotam duodecim radiis esse instructam, vti figura repraesentat, ac pro binis radiis OC et OE verticali OD proximis erit $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro sequentibus OB et OF erit $n = \frac{1}{2}$. Numerus igitur palarum aquam simul percutientium pendebit ab eleuatione axis O supra aquae superficiem; quae tanta esse debet, vt sit $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$: sumamus ergo $O\delta = a-b = \frac{1}{2}a$, vt sit $b = \frac{1}{2}a$, atque si radius OD sit verticalis, praeter eum duo tantum remi proximi OC et OE in aqua versabuntur. Etsi autem motu rotae quatuor radii in aquam porrigunturr,

riguntur, tamen quia tum oblique mouentur, vis eorum tuto aequalis aestimari potest vi trium, quorum medius est verticalis; ita vt rota perpetuo eandem vim exerere sit censenda.

§. 644. Pro radio igitur verticali OD est $n = 1$, ex eoque ad nauem propellendam vis nascitur $\frac{7gau}{24} - \frac{3ga\sqrt{uv}}{4} + \frac{gav}{2}$. Pro radio vero OC est $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ex eoque nascitur vis ad nauem propellendam $= \frac{gau}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right) - \frac{ga\sqrt{uv}}{2} + \frac{gav}{4}(3\sqrt{3} - 3)$, quae cum eadem sit pro radio OE nauis a tribus radiis OC, OD et OE atque adeo a tota rota propelletur vi $= \frac{gau}{3}\left(\frac{13}{24} + \sqrt{3}\right) - \frac{7ga\sqrt{uv}}{4} + gav\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right)$ quae sumtis in fractionibus decimalibus valoribus proximis abit in $0,757905.gau - 1,75.ga\sqrt{uv} + 1,049037.gav$. Haec igitur vis nauem propellens aequalis esse debet resistentiae, quam nauis in aqua patitur, quae vt supra assumsimus sit $= ffv$, ita vt iam habeatur vna aequatio $ffv = 0,757905.gau - 1,75.ga\sqrt{uv} + 1,049037.gav$, qua ratio inter v et u continetur, vt sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{(1,31942.\frac{ff}{ga} - 0,05126)}$.

§. 645. Momentum iam vis aquae a radio verticali OD ortum est $= \frac{15gaau}{64} - \frac{7gaa\sqrt{uv}}{12} + \frac{3gaav}{8}$; at momentum a radio OC vel OD ortum ob $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erit $= \frac{2gaau}{9} - \frac{gaa\sqrt{uv}}{9}(3\sqrt{3} - 1) + \frac{gaav}{4}$, cuius duplum ad praecedens momentum ex radio verticali OD ortum dabit momentum totale, quo rota ab aqua impeditur $= \frac{361}{576}ga^2u - gaa\sqrt{uv}\left(\frac{13}{36} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{7gaav}{8}$; seu in fractionibus decimalibus $0,67882.gaau - 1,51581.gaa\sqrt{uv} + 0,875.gaav$, quod ductum in $\frac{M}{V}$ dabit momentum ponderis, cui

 aequa-

aequale esse debet momentum virium rotam circumagentium. Denotat autem M pondus totius nauis, et V volumen carinae, ita vt si V in pedibus cubicis et M in libris exprimatur sit $\frac{M}{V} = 64$.

§. 646. Ex relatione autem inter u et v supra inventa reperitur $\frac{u}{v} = 1,28160 + 1,31942 . \frac{ff}{ga} + 2,3090 \sqrt{(1,31942 . \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$, ex qua si valores loco u et $\sqrt{u}$ in momento nunc inuento substituantur, prodibit hoc momentum $= \frac{Mgaav}{V} (0,89565 . \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(1,31942 . \frac{ff}{ga} - 0,05126)})$. Quae formulae, si ff fuerit multo maius quam ga ob terminum 0,05126 valde paruum multo fieri possunt simpliciores; fiet nimirum $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + 1,14866 . \frac{f}{\sqrt{ga}}$ et $\frac{u}{v} = 1,28160 + 2,65225 . \frac{f}{\sqrt{ga}} + 1,31942 . \frac{ff}{ga}$; hincque porro momentum a vi aquae ortum et motui rotae contrarium erit $= \frac{Mgaav}{V} (0,05925 . \frac{f}{\sqrt{ga}} + 0,89565 . \frac{ff}{ga})$.

§. 647. Ponamus iam rotam hanc ope eiusmodi ergatae circumagi, vt dum ergata semel conuertitur, rota faciat n reuolutiones. Sit longitudo vectium quibus ergata circum agitur $= b$, atque numerus hominum ergatam voluentium ponatur $= \theta$, qui numerus ante erat 6ψ. Celeritas igitur hominum se habebit ad celeritatem rotae in extremitate D, quae est $= \sqrt{u}$, in ratione composita ex ratione $1 : n$ et ratione $b : a$, ex quo celeritas hominum erit $= \frac{b\sqrt{u}}{na}$, et altitudo huic celeritati debita $= \frac{bbu}{nna^2}$. Hinc si vis, quam quisque homo quiescens valeat exerere ponatur $= p$, erit vis qua tanta celeritate progrediens exercere valet $= p(1 - \frac{bbu}{nna^2 \alpha})$ denotante α altitudinem vnius pedis

pedis momentum ergo omnium hominum ad ergatam circumagendam erit $= \theta pb(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$, quod ad axem rotae translatum fit $= \frac{\theta pb}{n}(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$.

§. 648. Quoniam vero ad vtramque nauis partem vnam eiusmodi rotam collocamus, vis aquae tam absoluta, qua nauis propellitur, quam momentum inde ortum duplicari debebit. Duplum igitur vis illius absolutae supra (644) aequare debuissemus ipsi ffv, vel ipsam vim huius semissi $\frac{1}{2}ffv$, vnde scribendo $\frac{ff}{2}$ loco ff, orietur $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{(1,31942.\frac{ff}{2ga} - 0,05126)} = 1,1545 + 1,14866.\frac{f}{\sqrt{2ga}}$ quam proxime, et $\frac{u}{v} = 1,2816 + 2,65225.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942.\frac{ff}{2ga}$. Momentum vero quod vtraque rota ab aqua coniunctim suffert erit $= \frac{2Mgaav}{V}(0,05925.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565.\frac{ff}{2ga})$, cui aequale esse deberet momentum virium sollicitantium, si nulla esset frictio superanda.

§. 649. Cum igitur frictio in machina tantopere composita sit admodum notabilis, eo quod tam axis rotae quam axis ergatae frictionem patiantur, momentum impedimentorum augeri debet. Addamus ergo ad momentum illud ab aqua ortum frictionem cuius momentum ad axem rotae relatum, ab vtraque rota sit $= 2Fa$, atque si aggregatum momento virium sollicitantium aequale ponamus, habebimus hanc aequationem. $2Fa + \frac{2Mgaav}{V}(0,05925.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565.\frac{ff}{2ga}) = \frac{\theta pb}{n} - \frac{\theta pb^3v}{n^3a^2\alpha}(1,2816 + 2,65225.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942.\frac{ff}{2ga})$ ex qua obtinetur altitudo celeritati nauis debita $v = (\frac{\theta pb}{n} - 2Fa) : \frac{2Mgaa}{V}$

$\frac{2Mgaa}{V}(0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}) + \frac{\theta pb^3}{n^3a^2\alpha}(1,2816 + 2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ga})$ vnde ipsa nauis celeritas potest determinari.

§. 650. Quo haec expressio tractabilior reddatur, ponamus $\frac{b}{n} = z$; sitque breuitatis gratia $\gamma = 0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}$ et $\delta = 1,2816 + 2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ag}$, erit autem accuratius nullo neglecto termino: $\gamma = 0,44782 \cdot \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$ $\delta = 1,2816 + 0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} + 2,309 \sqrt{(0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$. Quibus factis substitutionibus erit altitudo debita celeritati, qua nauis propelletur $v = \frac{\theta pz - 2Fa}{\frac{2Mgaa\gamma}{V} + \frac{\theta pz^3\delta}{aa\alpha}}$. Exprimantur longitudines in pedibus rhenanis, eritque $\frac{M}{V} = 64$; ac ponatur vt hactenus $p = 32$ libr. et $\alpha = 1$ ped. Praeterea sit momentum $2Fa = 32k$, nempe sit frictio tanta ad quam superandam axi rotae in distantia k applicari debeat pondus 32 librarum: eritque $v = \frac{\theta z - k}{4gaa\gamma + \frac{\theta z^3\delta}{aa}}$.

§. 651. Patet hic eiusmodi valorem ipsi z tribui posse vt celeritas nauis fiat maxima ceteris paribus, ad quem inueniendum differentiatur formula ipsi v aequalis, eritque $4gaa\gamma\theta - \frac{\theta\theta\delta z^3}{aa} + \frac{k\theta\delta zz}{aa} = 0$, seu $4ga^4\gamma = 2\theta\delta z^3 - 3k\delta zz$. Sit $k = \mu z$, denotabit μ numerum hominum, qui frictionem ergatae superare valeant; ita vt nullus motus ipsi induci queat, nisi numerus hominum θ excedat numerum μ: erit ergo frictione hoc modo in computum ducta $v = \frac{(\theta - \mu)z}{4gaa\gamma + \frac{\theta\delta z^3}{aa}}$ ex qua pro maxima celeri-

tate

tate reperitur $2ga^4\gamma = \theta\delta z^3$; hincque oritur $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}} = \frac{b}{n}$. Ex hac ergo aequatione reperietur vel longitudo vectium b ergatae infigendarum, si detur ratio inter celeritatem ergatae et rotae; vel si detur longitudo b reperietur numerus $n = \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{\theta\delta}{2ga\gamma}}$, qui indicat, quoties rota circumagi debeat, dum ergata semel conuertitur.

§. 652. Ex hoc valore ipsius $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}$ oritur ergo celeritas nauis maxima, cuius altitudo debita erit $v = \frac{(\theta-\mu)\sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}}{6gaa\gamma} = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{4g^2a^2\gamma^2\theta\delta}}$. Quoniam fere est $\gamma = 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}$, erit $4g^2a^2\gamma^2$ quantitas constans nempe $= (0,89565)^2 f^4$, eo quod ff repraesentat resistentiam nauis absolutam non ab arbitrio nostro pendentem. Vnde intelligitur celeritatem insuper per valorem ipsius δ augeri posse, ipsum minuendo quantum fieri potest. Hoc autem fit augendo valorem ga ita vt celeritas nauis videatur quousque libuerit augeri posse. At vero, primum augeretur frictio, ob machinam ponderosiorem factam, qua celeritati multum decederet. Tum vero, quam primum valor $\frac{ff}{2ga}$ minor fit vnitate, valor pro γ assumtus ob aliquot neglectos terminos non amplius valet, totaque conclusio concidit.

§. 653. Cum igitur tota disquisitio iam a valore $\frac{ff}{ga}$ pendeat, ponamus $\frac{ff}{ga} = m$, erit $v = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{\frac{4\theta f^4}{mm}}}\gamma^2\delta$ et $z = \frac{b}{n} = a\sqrt[3]{\frac{2ff\gamma}{m\theta\delta}}$. Atque loco m successiue ponamus numeros 1, 2, 3, 4, etc. indeque valores conuenientes pro γ et δ inuesti-

inuestigemus, qui in formulis substituti efficient vt quantitates z et v per solas quantitates θ, μ et f determinentur. Loco m vero numeros vnitate minores non substituo, quia valor ga ob grauissimas causas maior ipso ff accipi non potest. Si enim nauis sit exigua, tum ea tantam machinam, qualem valor ipsius ga ipsum ff superans requireret, sustinere non posset, et in nauibus grandioribus, ob ff iam satis magnum, valor ipsius ga necessario minor capi debet.

§. 654. En igitur sequentem tabellam:

$m = 1$; $\gamma = 0,48805$; $\delta = 3,74241$
$m = 2$; $\gamma = 0,95372$; $\delta = 5,20125$
$m = 3$; $\gamma = 1,41508$; $\delta = 6,46672$
$m = 4$; $\gamma = 1,87425$; $\delta = 7,63469$
$m = 5$; $\gamma = 2,33205$; $\delta = 8,74102$
$m = 6$; $\gamma = 2,78887$; $\delta = 9,80386$
$m = 7$; $\gamma = 3,24497$; $\delta = 10,83392$
$m = 8$; $\gamma = 3,70048$; $\delta = 11,83797$
$m = 9$; $\gamma = 4,15552$; $\delta = 12,82095$
$m = 10$; $\gamma = 4,61016$; $\delta = 13,78624$

§. 655. Substituantur hi valores successiue in formulis $\frac{na}{b} = \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff} \cdot \frac{m\delta}{2\gamma}}$ et $v = \frac{(\theta-\mu)}{3} \sqrt[3]{\frac{mm}{4\theta f^4 \gamma^2 \delta}} = \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{mm}{108\gamma^2\delta}}$ seu $v = \frac{\theta-\mu}{6\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2mm}{\gamma^2\delta}}$; prodibitque haec tabula:

$m =$

$m = \frac{ff}{ga} = 1$	$\frac{na}{b} = 1,56514 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,21819 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 2$	$\frac{na}{b} = 1,76019 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,19856 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 3$	$\frac{na}{b} = 1,89961 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,18600 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 4$	$\frac{na}{b} = 2,01217 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,17677 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 5$	$\frac{na}{b} = 2,10824 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16950 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 6$	$\frac{na}{b} = 2,19298 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16352 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 7$	$\frac{na}{b} = 2,26924 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15844 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 8$	$\frac{na}{b} = 2,33898 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15405 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 9$	$\frac{na}{b} = 2,40345 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15019 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 10$	$\frac{na}{b} = 2,46358 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,14675 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$

§. 656. Ex hac tabula intelligitur celeritatem nauis eo fore maiorem, quo minor fuerit valor $\frac{ff}{ga}$, hoc est quo maior sit cum radius rotae a, tum latitudo palarum g. Neque vero valor ipsius v admodum decrescit, crescente valore fractionis $\frac{ff}{ga}$; hic enim si decuplo maior capiatur, altitudo v nequidem sui triente diminuitur, ideoque ipsa celeritas vix sexta sui parte debilitatur. Ceterum si $\frac{ff}{ga}$ vnitate minor capiatur, altitudo v crescit vsque ad certum terminum, post quem iterum decrescit, quoad fiat $\frac{ff}{ga} = \frac{0,05126}{0,65971}$, quo casu fit circiter $v = 0,07 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Sin-

autem ponamus $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{8}$; fit $\gamma = 0,25113$, $\delta = 2,83021$ et $\frac{na}{b} = 1,41239 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$; $v = 0,23494 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ si fiat $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{10}$ oritur $\gamma = 0,04808$; $\delta = 1,62762$ et $\frac{na}{b} = 1,19175 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ atque $v = 0,29090 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$.

§. 657. Operae igitur vtique pretium esset hoc maximum inuestigare, si inde vsus in praxi expectari posset: sed praeterquam, quod ob auctam rotae molem frictio μ augeatur, hincque valor v diminuatur, conditionem praecipuam nondum in calculum vocauimus, qua supra (643) vidimus necessario esse debere $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin enim rota non sui parte antica in aquam impingeret. Quoniam igitur sumsimus $O\delta = \frac{1}{2} OD$ debet esse $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} < \frac{1}{2}$ et $\frac{u}{v} > 4$. at est $\frac{u}{v} = \delta$; quamobrem necesse est vt sit $\delta > 4$. Hinc perspicitur casum primum quo $m = \frac{ff}{ga} = 1$ sine detrimento celeritatis adhiberi non posse, quia est $\delta < 4$ ideoque aqua in partem rotae posticam quodammodo irruit, et effectum diminuit. Sequentes vero casus omnes, quia in ipsis est $\delta > 4$, vtiliter ad praxin transferri possunt neque experientia sensibiliter a theoria dissentire deprehendetur.

§. 658. Celerrime ergo nauis propelletur, si ipsi $\frac{ff}{ga}$ eiusmodi tribuatur valor, cui respondeat $\delta = 4$, tum enim tota rota, qua aquae immergitur, aquam percutiet nauemque propellet. Reperitur autem tum $\frac{ff}{ga} = 1,16240$ et $\gamma = 0,55745$, atque porro $\frac{na}{b} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ et $v = 0,21590 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Rota ergo primo ita institui debet, vt

sit

fit $ga = \frac{ff}{1,1624} = \frac{6}{7}ff$ proxime: ſicque tam latitudo palarum g, quam longitudo radiorum a habita reliquarum circumſtantium ratione determinabitur. Deinde ſi detur numerus operariorum θ, definietur commodiſſima ratio $\frac{na}{b}$, ſimulque altitudo debita celeritati nauis v, ex qua ſpatium, quod nauis dato tempore percurret, aſſignari poterit; datur enim altitudo illa v in pedibus rhenanis.

§. 659. Quo praerogatiua huius remigandi modi prae conſueto perſpici queat, ex antecedentibus repetamus, quae de celeritate nauis a 6ψ remigibus propulſae ſunt allata. Inuenimus autem fore altitudinem celeritati debitam $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{(\gamma+\delta)^2}} = \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{2}(\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ (623, 625) denotante gh amplitudinem remi vnius. In motu ergo remorum ordinario ſemper eſt $v < \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{2\frac{\psi}{ff}}}$, eoque magis v ab iſto limite diſtabit, quo minor fuerit fractio $\frac{\psi}{ff}$. Ponatur iam numerus remigum $6\psi = \theta$, vt ſit $2\psi = \frac{1}{3}\theta$, fiet $v < \frac{\theta}{9\sqrt[3]{\frac{1}{3}\theta f^4}}$ ſeu in fractionibus decimalibus erit $v < 0,16025 \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. quae quantitas multo minor eſt, ea, quae, ſi remi in rota diſponantur, eſt inuenta, erat enim $v = 0,21590. \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, ſi omnia ad celerrimum motum naui vtroque modo imprimendum diſponantur.

§. 660. Quoniam celeritas nauis maxima ope rotae propulſa debita eſt altitudini $0,21590. \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, erit haec altitudo minor quam $0,21590. \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Quare cum altitudo

debita celeritati nauis ope remorum propulsae sit minor quam $0,16025 . \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, a veritate non multum aberrabimus, si hos defectus ipsis quantitatibus proportionales statuamus. Quod si ergo vtroque casu idem hominum operantium numerus adhibeatur, erit celeritas nauis ope remorum propulsae ad celeritatem nauis ope rotae propulsae vt $\sqrt{16025}$ ad $\sqrt{21590}$ hoc est vt 1 ad 1,16072 seu vt 6 : 7 proxime. Sexta igitur parte eadem nauis ab eodem hominum numero ope rotae celerius promoueri poterit, quam ope remorum, consueto more adhibitorum, quod sane est lucrum minime spernendum.

§. 661. Quia idem hominum numerus eandem nauem ope rotae celerius promouere potest quam ope remorum, patet si celeritas nauis sit proposita, pro rota pauciores homines requiri quam pro remis. Sit numerus hominum nauem remis promouentium $= \eta$, ac numerus hominum, qui ope rotarum eandem nauem eadem celeritate propellere valent $= \theta$; erit $0,21590 . \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}} = 0,16025 . \frac{\eta}{\sqrt[3]{\eta f^4}}$ seu $21590 \sqrt[3]{\theta^2} = 16025 \sqrt[3]{\eta^2}$: hincque $\theta : \eta = 16025^{3:2} : 21590^{3:2} = 1 : 1,5638$; erit ergo $\theta : \eta = 2 : 3$ seu propius vt 16 : 25, si igitur loco remorum rotae adhibeantur, tum tertia operariorum parte supersederi poterit: scilicet si nauis remis instructa postulet 25 remiges, nauis rotis instructa tantum 16 hominibus opus habebit, vt aequali celeritate propellatur.

§. 662. Ex tabula autem computata simul intelligitur quanta circumspectione ad rotam astruendam opus sit, vt tantum lucrum obtineatur. Primo enim in machina

ea

ea ipsa proportio inter na et b obseruari debet, quam inuenimus; a qua si nimium recedatur, celeritas nauis sensibiliter diminuetur. Deinde vero praecipue ratio inter ff et ga cum ea, quam assignauimus, satis prope congruere debet: minor enim statui nequit, quin simul portio vis aquae ad nauem repellendam impendatur. Quod si autem $\frac{ff}{ga}$ maior capiatur, quam 1, 1624 tum celeritas nauis continuo fiet minor, ita vt facta $\frac{ff}{ga} = 6$ celeritas nauis vix superatura sit celeritatem, quae ipsi a remis imprimi potest. Quamobrem si quis forte hanc remigandi modum ad praxin deducere velit, probe ad praecepta tradita attendere debet, ne loco lucri detrimentum patiatur.

§. 663. Quamuis autem iste naues propellendi modus prae solito remigandi modo insigni gaudeat praerogatiua, tamen tantis coniunctus est incommodis, si ad praxin respiciamus, vt haec incommoda lucrum longe superent. Primum enim huiusmodi ergata, quae ope rotae dentatae remos in gyrum dispositos circumagat, in nauibus non nimis magnis non solum spatium requireret satis magnum sed etiam pondus nauis totum tantopere augeret, vt hinc non exigua retardatio oriatur. Deinde etiamsi spatium esset idoneum ad eiusmodi machinam collocandam, tamen tot operarii, quod requiruntur, locum non inuenirent vires suas machinae applicandi. In triremi ordinaria certe, ad quam propellendam plures quam 100 homines adhiberi debent, ergata tot hominibus circumagenda nullo modo effici poterit. In minoris vero moduli nauigiis de ergata ipsis imponenda nequidem cogitari potest.

§. 664. Missa itaque ergata de machina simplicioni

cogitare debemus, cuius ope rotae remis instructae circumagi, simulque sufficiens hominum numerus operi admoueri queat. In hunc finem machina videtur commodissima, si axis OO, cui vtrinque extra nauem Rota D*d* est affirmata, intra nauem incuruetur in figuram RS SR: tum enim plures homines in naui sedentes pro navis latitudine prehendentes partem SS partim trahendo partim trudendo rotas D*d* circumagent hocque nauem propellent. Atque cum hoc modo nulla ergata adhibeatur, fiet $n = 1$, atque b denotabit longitudinem radii RS; existente $OD = Od = a$. Non solum igitur ista machina mole illa ingenti, quam commemorauimus, caret, sed etiam homines sedendo opus administrabunt, neque discursando incommodum afferent; ita vt hinc plus non nascatur incommodi, quam a remigum labore ordinario.

Tab. XIX. fig. 1.

§. 665. Si igitur duabus rotis nauis instruatur, vti hactenus possuimus, ac resistentia nauis aequalis sit resistentiae plani ff, primum esse debet proxime $ga = \frac{6}{7} ff$. Scilicet si vtraque rota ex duodecim remis sit composita atque ad medietatem radiis DK aquae immergatur, rectangulum ex longitudine vnius radii a in latitudinem g debet esse $= \frac{6}{7} ff$. Quoniam vero f proxime profunditatem, ad quam nauis submergitur denotat, radius $OD = a$ duplum ipsius f excedere nequit, ne rota profundius quam ipsa nauis submergatur. Si igitur capiatur $a = 2f$, remanebit pro $g = \frac{3}{7} f$. Deinde si numerus remigum sit $= \theta$ capi debet $\frac{na}{b}$ hoc est $\frac{OD}{RS} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$, superficie ff in pedibus quadratis expressa. His vero ita instructis celeritas nauis debita erit altitudini $v = 0,21590. \frac{\theta + \mu}{\sqrt[3]{\theta f}}$ ped.

ped. seu nauis vno minuto absoluet spatium $15\sqrt{1000v}$ pedum, atque vna hora spatium $13224,182\sqrt[3]{\frac{\theta-\mu}{\theta f^4}}$ ped.

§. 666. Vt nauis vna hora milliare germanicum seu 23627 pedes absoluat, debet esse $\theta > ff$, et cum frictio μ sit valde parua, ea prae θ negligi poterit, quippe quam operarii superabunt, si singuli tantillum vires magis intendant quam ipsis tribuimus. Neglecto ergo μ erit spatium vna hora percurrendum $= 13224,182\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$: quare vt vnum milliare conficiatur debet esse $\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}} = \frac{23627000}{13224182}$, vnde fit $\frac{\theta}{ff} = 5,703$. Si igitur ob frictionem fiat $\theta = 6ff$, tot operarii nauem vna hora per milliare germanicum promouebunt; ope remorum autem ad idem spatium absoluendum requiruntur remiges $13ff$, ita vt hoc modo nequidem semisse operariorum opus sit. Ex quo multo maius lucrum existit, quam ante indicauimus, cuius rei ratio est, quod supra in denominatore terminum $\frac{1}{\sqrt{2gb}}$ reiecimus (659.)

§. 667. Quoniam igitur ad nauem vna hora per milliare germanicum propellendam debet esse $\frac{\theta}{ff} = 6$, patet, nisi sit ff valde paruum, omnes operarios non vni axi SS admoueri posse ob defectum spatii. Operariorum numerus enim, qui ad vnum axem vertendum applicari possunt, determinatur latitudine nauis, cuius bini pedes vni homini spatium sedendi concedent. Quia vero manibus in manubrio SS non tantum spatium requirunt, ad vtramque partem axis SS totidem operarii constitui poterunt.

runt. Atque hinc quot pedes contineat latitudo nauis OO, tot operarii vires ſuas in axe SS conuertendo exerere poterunt. In nauigiis remis propulſis fere ſolet eſſe latitudo $= 4f$; vnde ſi fuerit $\theta = 6ff > 4f$ ſeu $f > \frac{2}{3}$ ped. tum vnus axis non ſufficit tot operariis, quot requiruntur ad nauem per milliare germanicum vna hora promouendam.

§. 668. His igitur caſibus oportebit duas pluresue eiusmodi axes vtrinque rotis inſtructas in naui conſtitui. In hypotheſi ſcilicet aſſumta, qua latitudinem nauis $= 4f$ poſuimus, numerus eiusmodi machinarum debet eſſe $\frac{3}{2}f$, longitudine f in pedibus expreſſa. Quoniam vero calculum hactenus ad duas rotas accommodauimus, ſi plures adhibeantur, quaedam mutatio in expreſſionibus inuentis fieri debebit. Sit ergo numerus axium $= \sigma$ ſeu numerus rotarum $= 2\sigma$, ita vt ſit proxime $\sigma = \frac{2}{3}f$, alia mutatio hinc non orietur, niſi vt vbique loco ga ſcribamus σga. Capi ergo debebit $\frac{ff}{\sigma ga} = 1,1624$ ſeu proxime $ga = \frac{6}{7}\frac{ff}{\sigma}$. Quodſi igitur fuerit $\sigma = \frac{3}{2}f$ fiet $ga = \frac{4}{7}f$; ſumto ergo radio rotae $OD = 2f$. fiet latitudo palarum $g = \frac{2}{7}$ ped. quae diſtributio ſatis commode ad praxin deduci poterit.

§. 669. Numerus autem rotarum hoc modo in naui conſtitutarum neque rationem inter a et b neque celeritatem nauis afficiet: manebit enim $\frac{OD}{RS} = 1,60963.\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$. Cum igitur, ſi nauis ita adſtruatur, vt ſingulis horis milliare germanicum abſoluat, debeat eſſe $\theta = 6ff$ fiet hoc caſu $\frac{OD}{RS} = 1,60963.\sqrt[3]{6} = 2,925$, ideoque $RS:OD = 1:2,925$. Quo autem manubrium SS ab hominibus cum trahendo tum trudendo commodius verſari poſſit radius RS

vnum

vnum pedem ſuperare nequit ſumto ergo RS = 1 ped. fiet OD = 2,925 ped. Determinato autem hoc modo radio OD = a, fiet $\frac{ff}{\sigma g} = 3,4$, et latitudo palarum $g = \frac{5ff}{17\sigma}$ ped. Atque ſi $\sigma = \frac{3}{2}f$ erit g $\frac{10}{51}f$ ſeu proxime $g = \frac{1}{5}f$. Probe autem notandum eſt axem OO ad eam altitudinem ſuper aquam eſſe conſtituendum, vt ſemiſſis radiorum verticalium OD aquae immergatur.

§. 670. Accommodemus haec ad exemplum triremis ſupra iam tractatum, in qua erat $ff = 16$ ped. ob rationem enim (633) allatam videtur iſte valor commode ipſi ff tribui poſſe, quo certiores de effectu eſſe queamus. Vt igitur iſta nauis tempore vnius horae per vnum milliare germanicum propellatur, opus erit 96 hominum, cum ſolito remigandi modo plures quam 200 requirantur. Ad hoc ergo ſex axes ſeu 12 rotae in naui diſponi debebunt, et quiuis axis a 16 hominibus verſabitur. Si igitur ſit RS = 1 pedis, fiet OD = a = 2,925 ped. et rotae in aqua ad 1,46 ped. immergentur; latitudo vero palarum erit $= \frac{5 \cdot 16}{6 \cdot 17}$ ped. ob $\sigma = 6$. hoc eſt proxime $\frac{4}{5}$ ped. Quodſi autem videatur RS tantum ſtatuere $\frac{3}{4}$ ped. fiet OD = a = 2,194 ped. et latitudo palarum g = 1,04 ped.

§. 671. Triremis ergo hoc modo inſtructa a 96 operariis vna hora per milliare germanicum promoueri poterit; neque hic modus tantis difficultatibus obnoxius eſſe videtur, quam primo intuitu apparebat. Lucrum enim plus centum hominum facile compenſat ſumtus, qui ad eiusmodi rotas fabricandas impenduntur, et, ſi quae difficultates praeterea occurrerent: operae pretium erit de iis tollendis diligentius cogitare. Sumtus quidem ad haec ope-

ra ſufficientis roboris efficienda parui momenti eſſe videntur, cum ſi ſemel ſint facti longo tempori ſufficiant: Contra autem centum hominum victus et ſuſtentatio perpetuo duret. Vt taceam numerum hominum operi admouendorum non ab arbitrio noſtro pendere; et quamuis fortaſſe ſatis adſint, tamen plerumque ad opera longe vtiliora adhiberi poſſunt. Denique iſte labor rotas verſandi, quia eſt vniformis, et motus iam impreſſus laborem adiuuat, non tantopere homines defatigabit, quam remorum agitatio.
