mus expeditam momentum illius corporis respectu axis illi axi paralleli ac per centrum grauitatis ducti determinandi; quae methodus regula ista facili continetur. Massa seu pondus corporis multiplicetur primum per distantiam centri grauitatis ab axe suspensionis, hocque productum denuo multiplicetur per excessum longitudinis penduli simplicis isochroni supra distantiam illam centri grauitatis ab axe suspensionis; vel quaeratur media proportionalis inter distantiam centri grauitatis ab axe suspensionis et inter distantiam centri oscillationis a centro grauitatis, quo facto productum ex massa corporis et quadrato mediae huius proportionalis dabit momentum corporis respectu axis per centrum grauitatis transeuntis et axi suspensionis paralleli.

§. 340. Quaecunque igitur accipiatur distantia axis suspensionis PQ a centro grauitatis G corporis eadem perpetuo prodibit quantitas momentum corporis respectu axis AB exprimens. Quodsi igitur successiue idem corpus in variis distantiis ad oscillandum suspendatur erit semper distantia centri oscillationis a centro grauitatis reciproce vt distantia centri grauitatis ab axe suspensionis. Interim tamen ad nostrum institutum non omnino perinde est quanta distantia axis suspensionis PQ a centro grauitatis G accipiatur; sed eam neque nimis magnam neque nimis paruam accipi conuenit. Cum enim factum $h(k-h)$ sit constans, expediet distantiam $h$ mediocris assumsisse quantitatis vt factores $h$ et $k-h$ non admodum fiant dispares, atque conclusio eo certior inde inferri queat. Hoc vero obtinebitur, si eiusmodi eligatur suspensio, quae oscillationes maxime celeres producat.



§. 341.

§. 341. Modus quidem iste, etsi in se admodum expeditus ac facilis, nullo modo ad naues praecipue maiores accommodari potest, ob ingens pondus et volumen quae impediunt, quo minus in libero aere suspendi atque ad oscillandum impelli queant. Verum tamen vtilitatem afferre poterit non contemnendam, si ad similitudinem vastiorum nauium minora exempla summa diligentia conficiantur, qualia fere semper fabrefieri curantur. Si enim istae minoris moduli nauiculae ipsis nauibus omnino sint similes, experimenta quae in iis instituuntur simul proprietates maiorum declarabunt. Inseruient itaque istiusmodi moduli cum ad sectionem aquae tum ad volumen aquae submersum, tum etiam ad stabilitatem ac momentum respectu cuiusque axis determinanda, quae res in scientia nauali summam vtilitatem habebunt.

§. 342. Quodsi autem nauiculae, in qua experimentum instituitur, centrum grauitatis non tam accurrate fuerit exploratum, quemadmodum opus est, ex duplici suspensione duplicique motu oscillatorio momentum nauiculae respectu axis per centrum grauitatis transeuntis poterit concludi etiam ignoto loco centri grauitatis. Ponamus enim in primo motu oscillatorio repertam esse longitudinem penduli simplicis isochroni $= k$; deinde axem suspensionis a corpore magis remoueri per interuallum $= x$, ita vt si priori casu fuerit distantia centri grauitatis ab axe suspensionis $= h$, ea casu altero futura sit $= h + x$: sit autem hoc altero casu longitudo penduli simplicis isochroni $= q$: ob $h(k-h) = (h+x)(q-h-x)$ reperietur $h = \frac{x(q-x)}{q-k-2x}$ atque $gg = h(k-h) = \frac{x(k-q+x)(k+x)(q-x)}{(k-q+2x)^2}$, quae quantitas per

per pondus corporis M multiplicata dabit momentum eius quaesitum respectu axis AB per centrum grauitatis G ducti et paralleli axibus binis, ex quibus erat suspensum.

§. 343. Non difficile itaque erit pro data naui momentum eius respectu axis cuiuspiam horizontalis per experimenta definire, dummodo nauis accuratum habeatur exemplum idoneae magnitudinis fabrefactum. Non solum autem hoc exemplum ratione figurae et constructionis omnino simile esse oportet ipsi naui quam repraesentat, sed etiam oneratio vbique ad similitudinem debet esse constituta. Primo scilicet non solum pondus nauiculae minoris ad pondus maioris triplicatam tenere debet rationem laterum homologorum, sed etiam pondera ita debent esse disposita vt centrum grauitatis similiter sit positum. Deinde etiam omnia pondera in ipsa naui eiusque exemplo cum in se spectata similia esse debent, tum similiter distributa, vt etiam momenta respectu similium axium prodeant similia.

§. 344. Quemadmodum autem ex momento minoris nauiculae respectu cuiuspiam axis determinato momentum respondens in naui maiori simili concludi debeat, ex dictis facile colligi licet. Cum enim momentum sit productum ex pondere corporis in quadratum cuiuspiam lineae rectae, corporum similium momenta similia tenebunt rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quoniam autem pondera sunt in ratione triplicata, si inuenta fuerit linea illa, per cuius quadratum pondus nauiculae multiplicatum praebet momentum eius respectu axis cuiuspiam; tum pro ipsa naui per regulam auream quaeratur similis linea recta in ratione simplici laterum homologorum;

 quae

quae si fuerit inuenta, eius quadratum per pondus ipsius nauis multiplicatum dabit momentum nauis respectu axis in ea similiter positi.

§. 345. Modus iste per oscillationes momenta corporum respectu cuiusuis axis per centrum grauitatis ducti explorandi [illegible] adhiberi potest ad momenta superficierum planarum inuestiganda, atque ideo parem vtilitatem afferet ad momenta sectionis aquae nauium cognoscenda, quae ad stabilitatis cognitionem requiruntur. Ex lamina scilicet aequabili ac perquam tenui exscindatur figura sectioni aquae omnino similis, eaque in situ verticali posita suspendatur ex axe horizontali, ita vt vel axis longitudinalis vel latitudinalis situm teneat horizontalem; tum lamina ad oscillandum impellatur noteturque longitudo penduli simplicis isochroni $k$. Quodsi nunc distantia centri grauitatis laminae ab axe suspensionis fuerit $= b$, erit $\sqrt{b(k-b)}$ linea illa, per cuius quadratum superficies laminae multiplicari debet, vt prodeat eius superficiei momentum respectu axis vel longitudinalis vel latitudinalis, eius videlicet qui in motu oscillatorio situm horizontalem obtinuit.

§. 346. Quodsi autem pro huiusmodi lamina definita fuerit ea linea, per cuius quadratum superficies laminae multiplicata praebet eius momentum respectu axis propositi, tum fiat vt longitudo illius laminae ad longitudinem sectionis aquae, cui figura laminae similis est sumta, ita linea illa inuenta $\sqrt{b(k-b)}$ ad quartam. Haecque quarta linea proportionalis inuenta erit ea ipsa longitudo per cuius quadratum superficies sectionis aquae multiplicari debet, vt obtineatur eius momentum, cuius cognitio ad stabilitatem nauis definiendam requiritur. Manifestum autem est, vt ista

ista conclusio sit legitima, laminam primo vbique eiusdem crassitiei atque ex materia homogenea paratam esse debere, deinde etiam necesse est vt lamina illa sit tenuissima, seu vt eius crassities prae superficie euanescat; quemadmodum iam indicauimus.

§. 347. Ad longitudinem autem penduli simplicis isochroni cum oscillationibus istiusmodi experimentorum inuestigandam, plures modi adhiberi possunt, quorum commodissimus mihi videtur, qui nititur longitudine penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis, quae etsi in variis terrae regionibus aliquantillum discrepat, tamen satis tuto his praecipue locis accipi potest $3166\frac{1}{4}$ part. mill. pedis Rhenani. Numerentur iam oscillationes corporis suspensi, quae vno minuto primo absoluuntur, sitque eorum numerus $= n$, et longitudo penduli simplicis isochroni, quae quaeritur ponatur $= k$ partium millesimarum pedis Rhenani, erit ex natura oscillationum $\frac{60}{n} : 1 = \sqrt{k} : \sqrt{3166\frac{1}{4}}$ hincque $k = \frac{11398500}{nn}$. Oscillationes vero efficiendae sunt admodum exiguae, vt arcus circulares per quos fiunt cum cycloidicis confundantur, atque oscillationes inter se isochronae obtineantur.

§. 348. His itaque continetur doctrina de oscillationibus nauium, quas peragunt vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem, quae duo oscillationum genera non solum sunt praecipua, quae in nauibus inuestigari merentur, sed ea etiam sola ad calculum reuocari possunt. Quae enim oscillationes circa alium axem horizontalem fieri concipiuntur, eae rarissime circa axem fixum contingunt, sed plerumque inter oscillandum axis circa quem fiunt oscillationes continuo mutatur. Pendet autem haec irregularitas

a diffia diſſimilitudine partium nauis vtrinque circa axem diſpoſitarum, qua fit vt linea recta per centra oſcillationis ambarum ſectionis aquae partium non ſit ad axem oſcillationis ſeu ei parallelum in ſectione aquae ſumtum normalis, quae conditio ad oſcillationes puras et regulares producendas abſolute eſt neceſſaria.

§. 349. Siue autem oſcillationes, quae circa alium axem horizontalem praeter longitudinalem et latitudinalem fiunt, ſint regulares ſiue irregulares, eae tamen ſatis prope ex cognitis oſcillationibus circa axem longitudinalem et latitudinalem factis concludi poterunt, medium ſcilicet aliquod inter has tenebunt. Facile namque ex forma nauium colligere licet alteras harum oſcillationum fore celerrimas alteras tardiſſimas. Quicquid autem ſit, ſi quis voluerit oſcillationes iſtas irregulares circa axem quemcunque horizontalem obliquum eodem modo, quo regulares, definire, is quidem a veritate non multum aberrabit. Oportebit autem pro tali axe obliquo tam ſtabilitatem nauis reſpectu iſtius axis, quam momentum cognitum eſſe; atque momentum per ſtabilitatem diuiſum dabit longitudinem penduli ſimplicis, cuius oſcillationes cum oſcillationibus nauis proxime congruent.

§. 350. Quemadmodum autem ad ſtabilitatem reſpectu axis obliqui definiendam, calculo particulari opus non eſt, ſed ea ex cognitis ſtabilitatibus reſpectu axium longitudinalis et latitudinalis facile colligi poteſt; ita etiam momentorum ratio eſt comparata. Namque ſi cognita fuerint momenta nauis reſpectu axis cum longitudinalis tum latitudinalis, ex iis momentum reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis definiri poteſt.

Quod

Quod vt appareat, ſit G centrum grauitatis nauis, AB axis longitudinalis et CD latitudinalis, quorum reſpectu momenta ponuntur cognita. Sit vero EF axis obliquus in plano horizontali ACBD aſſumtus reſpectu cuius momentum quaeritur. Sumatur nauis particula quaecunque M, ex qua primum in planum horizontale perpendiculum ML demittatur atque ex L in axes perpendicula LP, LQ et LR.

§. 351. Momentum igitur nauis reſpectu axis EF quaeſitum erit $= \int M . MR^2 = \int M . ML^2 + \int M . LR^2$. Sit ſinus anguli $AGE = m$, coſinus $= n$, erit $LO = \frac{LP}{n}$, $PO = \frac{mLP}{n}$, $GO = PG - \frac{m . LP}{n}$, et $OR = mPG - \frac{mm . LP}{n}$; vnde $LR = mPG + n . LP$. Hinc erit momentum reſpectu axis $EF = \int M . ML^2 + m^2 \int M . PG^2 + 2mn \int M . PG . LP + n^2 \int M . LP^2$, in qua expreſſione ob nauem circa axem AB vtrinque ſimilem terminus $\int M . PG . LP$ euaneſcet. Cum igitur ſit momentum reſpectu axis longitudinalis AB, quod ſit $R = \int M . ML^2 + \int M . LP^2$, et momentum reſpectu axis latitudinalis CD quod ſit $S = \int M . ML^2 + \int M . PG^2$, erit momentum reſpectu axis obliqui $EF = m^2 S + n^2 R$ ob $mm + nn = 1$. Ex quo ſine peculiari ſiue calculo ſiue experimento momentum nauis reſpectu axis cuiusuis obliqui horizontalis expedite poterit determinari, ex datis momentis reſpectu axium longitunalis atque latitudinalis. Tab. XII. fig. 2.

§. 352. Poſuimus in iſta de oſcillationibus nauium tractatione perpetuo centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali eſſe ſitum, quae tranſit per centrum grauitatis totius nauis ſimul ac per centrum magnitudinis carinae: hancque hypotheſin ideo aſſumſimus, quod cum ea ad oſcillationes maxime tranquillas reddendas requiratur, tum vero oſcillationes tam verticales quam horizontales seu circa axem horizontalem motu angulari factas puras, et vniformes atque in ſuo genere iſochronas producat. Quodſi autem aliae nauium conditiones non permittant, vt ſectionis aquae centrum grauitatis verticaliter immineat centro magnitudinis carinae, atque ad eas conditiones magis reſpiciendum ſit, quam ad tranquillitatem oſcillationum oſcillationes neque verticales neque horizontales purae exiſtere poterunt, ſed alterum genus perpetuo cum altero erit permixtum, ſi quidem axis horizontalis per centrum grauitatis ductus, circa quem oſcillationes fiunt, cum centro grauitatis ſectionis aquae non fuerit in plano verticali conſtitutus.

§. 353 Quando autem centrum grauitatis ſectionis aquae non in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis ductam cadit, id erit vel magis verſus proram vel verſus puppim promotum. Vtroque tamen caſu neceſſe eſt, vt id ſit poſitum in interſectione plani diametralis et ſectionis aquae; quoniam ſectio aquae vtrinque circa hanc interſectionem ex duabus partibus ſimilibus et aequalibus conſtat. Quamobrem axis longitudinalis etiam ſublata hypotheſi prius aſſumta, cum centro grauitatis ſectionis aquae tamen in plano verticali erit ſitum. Ex quo manifeſtum eſt hoc quoque caſu oſcillationes circa axem longitudinalem factas eſſe puras futuras, ita vt hoc oſcillationum genus etiamnum peculiarem tractationem non requirat.

§. 354. Aliter autem res ſe habet in oſcillationibus, quae fuerit circa axem latitudinalem: eo quod centrum graui-

grauitatis ſectionis aquae non poſitum erit in plano verticali, in quo axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis ductus collocatur. Hinc enim fit, vt inter oſcillandum vel volumen modo maius modo minus aquae immergatur, ſi centrum grauitatis in quiete permaneat, vel centrum grauitatis nauis aſcendat deſcendatue ſi perpetuo aequale volumen aquae immerſum maneat. Non poterunt igitur hoc caſu oſcillationes circa axem latitudinalem fieri quin ſimul centrum grauitatis nauis vel aſcendat vel deſcendat; atque id circo nauis circa axem latitudinalem oſcillationes puras abſoluere non poterit, ſed eae ſemper neceſſario oſcillationibus verticalibus erunt inquinatae, ex quo confuſum et difforme oſcillationum genus naſcetur.

§. 355. Vt hoc clarius percipiatur, ſit ADB ſectio nauis verticalis a prora A ad puppim B facta et nauem vtrinque in duas partes ſimiles et aequales diuidens: ſit praeterea ADB portio huius ſectionis ſub aqua verſans, dum nauis in aequilibrio eſt conſtituta; eruntque centrum grauitatis nauis G et centrum magnitudinis carinae O cum in plano huius ſectionis tum in eadem recta verticali CD poſita. Porro erit recta AB axis longitudinalis ſectionis aquae eiusque diameter, ex quo ſectionis aquae centrum grauitatis I in hac ipſa recta AB ſitum erit: quodſi incideret in punctum C oſcillationes forent eiusmodi, vti ante definiuimus, atque oſcillationes tam verticales quam horizontales fierent purae. Pro praeſenti inſtituto igitur punctum I a puncto C remotum aſſumimus. Tab. XII. fig. 3.

§. 356. Quando nunc nauis haec ex ſitu aequilibrii ad oſcillationes circa axem latitudinalem peragendas inclinatur, ſectio diametralis ADB manebit quidem verticalis, verum

 alia

alia prodibit ſectio aquae, cuius pariter diameter exiſtet in interſectione eius cum plano verticali ADB. Sit igitur in ſitu hoc inclinato recta $ab$ diameter ſectionis aquae, ſecans ſuperiorem diametrum AB in puncto V, atque ponatur interuallum $CV = x$. Angulus vero $AVa = BVb$ ſit quam minimus $= dw$, qui erit angulus inclinationis nauis de ſitu aequilibrii. Quantitas igitur ſectionis aquae in vtroque ſitu ad ſenſum non mutabitur, ſed aream habebit eandem, quae ponatur $= 2D$. Poſitio haec latiſſime patet, atque omnes declinationes de ſitu aequilibrii, ex quibus oſcillationes circa axem latitudinalem oriri queant, in ſe complectitur.

§. 357. Vt nunc in motum oſcillatorium inquiramus, qui ex hac declinatione ex ſitu aequilibrii oriri debet, ponamus pondus totius nauis $= M$, volumen carinae ſeu partis aquae ſubmerſae, dum nauis in aequilibrio verſatur $= V$: et vti interuallum $CV = x$ poſitum eſt, ſit interuallum $CI = c$. Diſtantia centrorum grauitatis nauis et magnitudinis carinae $GO = b$, vbi ponimus centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere: ita vt, ſi contrarium eueniat, littera $b$ negatiuum valorem induat. Idem de litteris $c$ et $x$ eſt intelligendum, quae affirmatiuum valorem retinent, ſi punctum I puppi B propius eſt puncto C, punctumque V prorae propius quam C. Quodſi autem haec puncta aliter fuerint diſpoſita, tum in mutatione ſignorum omnis variatio poterit comprehendi.

§. 358. In ſitu igitur hoc inclinato erit $ab$ in ſectione aquae, ideoque horizontalis, et partis nunc aquae immerſae planum diametrale erit $aDb$. Quantum autem futurum ſit volumen partis ſubmerſae, ex eo colligi poterit, quod,

quod, ſi recta $ab$ per punctum I tranſiret, volumen aequale foret voluminis in ſitu aequilibrii V. Quare hoc caſu volumen aquae ſubmerſum maius eſt quam V, hocque excedit ſpatio, quod comprehenditur inter ſectionem aquae $ab$ et ſectionem ipſi parallelam per I ductam, quarum diſtantia erit $Ii = (c + x)dw$. Cum autem mutatio quam minima ponatur, ſectio aquae $ab$ aequalis cenſeri poteſt ſectioni aquae naturali $= 2D$, et hanc obrem volumen nunc aquae ſubmerſum erit $= V + 2D(c + x)dw$.

§. 359. Cum autem vis nauem ſurſum pellens ſit vt volumen aquae ſubmerſum, hoc ſtatu; vis navem ſurſum vrgens maior eſt quam pondus nauis M quo deorſum nititur: atque exceſſus ſe habebit ad $2D(c + x)dw$ vt M ad V. Ergo Centrum grauitatis nauis hoc ſtatu actu ſurſum ſollicitabitur vi $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$ exceſſu ſcilicet vis ex preſſionibus aquae ortae ſupra ipſius nauis pondus. Aſcendere igitur debebit centrum grauitatis nauis G, quod nunc infra aquae ſuperficiem ſubmerſum eſt ad profunditatem $Gg$, ducta $Gg$ perpendiculari ad $ab$. Ob angulum autem $cGg$ infinite paruum $dw$ erit $Gg = Gc = GC + xdw$. Hoc igitur ſitu inclinato centrum grauitatis G profundius eſt ſitum, quam in ſitu aequilibrii, idque interuallo $Cc = xdw$. ſi quidem $x$ valorem affirmatiuum obtineat, qualem figura repraeſentat.

§ 360. Quando ergo punctum V extra puncta C et I vti in figura cadit, vis ex preſſione aquae orta tendet ad centrum grauitatis G in altitudinem naturalem conſtituendum. Nam ſi V extra C et I verſus proram ſit poſitum, centrum grauitatis G profundius ſtat in inclinatione quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam vis praeſto eſt id id ſurſum ſollicitans. Sin autem punctum V extra puncta C et I verſus puppim eſſet ſitum, tum centrum grauitatis G in ſtatu inclinato magis foret eleuatum quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam pondus nauis preſſioni aquae praeualeret, atque centrum grauitatis G magis immergeret; ſi quidem angulus inclinationis $dw$ ſit affirmatiuus, hoc eſt ſi inclinatio ita fiat, vt prora magis immergatur quam puppis. In inclinatione enim contraria omnia contra ſe habebunt, ob $dw$ negatiuum.

§. 361. His igitur duobus caſibus vires nauem ſollicitantes tendent, ad nauem ex ſitu inclinato in ſitum aquilibrii reſtituendam, ſi quidem nauis in hoc ſitu aequilibrii habeat ſtabilitatem. Vtrum autem vno motu continuo, hoc eſt dum angulus $dw$ omnino euaneſcit, nauis in ſitum aequilibrii reſtituatur an minus, poſtea indagabimus. Hic vero prius nobis ſpectandus eſt caſus, quo punctum V intra puncta C et I cadit; qui hoc habet ſingulare, quod vis quidem adſit centrum grauitatis G ſurſum vrgens, cum tamen in ſitu inclinato hoc centrum grauitatis iam altius ſit poſitum quam in ſitu aequilibrii. Hoc ergo caſu vires non ſolum non reſtitutionem in ſitum aequilibrii promouebunt, ſed adeo magis perturbabunt; centrum enim grauitatis iam nimis eleuatum etiam magis eleuabunt, ex quo motus vehementer irregularis exiſtat, neceſſe eſt.

§. 362. Quare cum res ita ſe habeat, ſi punctum V intra puncta C et I cadat, concludendum eſt, oſcillationes non ſubito regulares et vniformes generari poſſe, quam primum V extra C et I cadat, ſed difformitatem tantum continuo magis decreſcere. Difformitas autem in omni caſu eo maior erit, quo maius fuerit intervallum

vallum inter puncta C et I. Nam si haec puncta coincidant et sit $c = o$; tum vis centrum grauitatis eleuans erit $= \frac{2MDxdw}{V}$ et idem centrum grauitatis G magis erit depressum quam in situ aequilibrii interuallo $xdw$. Cum igitur hoc casu vis vrgens proportionalis sit ipsi interuallo, quo centrum grauitatis a suo situ naturali est remotum, hoc casu vniformitas motus oscillatorii non turbabitur. Manifestum autem est, quo maius sit interuallum $e$, eo minus vim illam spatio $xdw$ fore proportionalem, ex quo vniformitas eo magis tolletur.

§. 363. Vt nunc in motum, qui ex actione virium nauem in situ hoc inclinato sollicitantium inquiramus, ante omnia idem, quod de omni motu corporum extensorum, est notandum: seorsim scilicet inuestigandus est motus centri grauitatis, atque motus rotatorius circa centrum grauitatis. Quod primum ad motum centri grauitatis G attinet, id verticaliter sursum vrgebitur nostro casu a vi motrice $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$, quoniam autem in centro grauitatis collectum concipi debet integrum nauis pondus M, vis acceleratrix centri grauitatis erit $= \frac{2D(c+x)dw}{V}$. Pari igitur modo centrum grauitatis primo motus momento versus suum situm naturalem impelletur, quo pendulum longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$, quod a situ quietis per interuallum $xdw$ est deductum.

§. 364. Ad motum gyratorium circa centrum grauitatis definiendum, determinari oportet momentum virium sollicitantium respectu horizontalis per centrum grauitatis G ductum et ad planum ADB normalem, quoniam ex nauium forma certum est, motum gyratorium circa hunc nullum nullnmque alium axem oriri debere. Oritur autem hoc momentum a ſolis aquae preſſionibus, quae ita concipi poſſunt, quaſi ſingulis particulis voluminis ſubmerſi eſſent inſitae iis ipſis proportionales, atque verticaliter ſurſum vrgeant. Volumen autem in ſitu inclinato aquae ſubmerſum $aDb$ in tres partes diſcerpi poteſt; primum ſcilicet in partem ADB cuius volumen poſitum eſt $= V$, tum in partem inter angulum $BVb$ contentam; ac tertio in partem intra angulum $AVa$ comprehenſam, ita vt totum volumen aquae ſubmerſum ſit $= V + BVb - AVa$, quarum partium ſi vniuscuiusque momentum fuerit determinatum, ſimul totius voluminis aquae ſubmerſi momentum habebitur.

§. 365. Contemplemur primum partem V, cuius cum ſit centrum grauitatis in O, ex ea naſcetur vis nauem ſurſum pellens in directione verticali $Oo$, atque haec vis ipſi nauis ponderi M aequalis erit. Haec autem vis non tendet ad reſtitutionem in ſtatum aequilibrii, ſed contra nitetur, eritque eius momentum propterea negatiuum $= M \cdot og = Mbdw$. ob $Go = b$. Quare ſi momentum ad reſtitutionem producendam determinare velimus ex parte voluminis aquae ſubmerſi V naſcetur momentum $= -M bdw$: quod ad nauem ſubuertendam tendet, ſi quidem centrum grauitatis nauis G ſupra O cadat; et hanc obrem, niſi momenta ex reliquis partibus oriunda fiant affirmatiua ac ſimul maiora quam $Mbdw$, nulla omnino reſtitutio nauis in ſitum aequilibrii fieret, quemadmodum ſupra de ſtabilitate eſt oſtenſum.

§. 366. Vt momenta, quae ex partibus intra angulos $BVb$ et $AVa$ comprehenſis naſcuntur, inueſtigemus, ſit

ſit portionis intra angulum $BVb$ contentae volumen $= P$ et huius centrum grauitatis ſeu magnitudinis ſitum in P, cuius, diſtantia ab V ſit $Vp = p$. Ex hac ergo portione vis naſcitur $= \frac{MP}{V}$ et nauem ſurſum pellit in directione $Pp$; quae vis ideo ad nauis reſtitutionem tendet. Huius autem vis momentum reſpectu axis horizontalis per G ducti erit $= \frac{MP}{V} \cdot pg$; at eſt $pg = Vp - Vg = Vp - VC = p - x$, ex quo momentum huius vis ad reſtitutionem tendens erit $= \frac{MP}{V}(p-x)$. Sit porro portionis intra alterum angulum $AVa$ contentae volumen $= Q$, eiusque centrum grauitatis in Q exiſtente $Vq = q$. Ex hac portione igitur vis oritur $= \frac{MQ}{V}$ nauem in directione $qQ$ ſurſum vrgens, quae ideo reſtitutioni in ſitum aequilibrii renitetur. Momentum ergo erit $= -\frac{MQ}{V} \cdot gq = -\frac{MQ}{V}(q+x)$.

§. 367. Cum igitur volumen in ſitu inclinato aquae ſubmerſum totum ſit $= V + BVb - AVa$; erit momentum ex hoc volumine natum ad nauem reſtituendam $= - Mbdw + \frac{MP}{V}(p-x) + \frac{MQ}{V}(q+x) = - Mbdw + \frac{M}{V}(Pp + Qq - Px + Qx)$. In hac autem expreſſione denotat $Pp$ momentum portionis intra angulum $BVb$ contentae reſpectu axis horizontalis per punctum V ducti et normalis ad planum ADB; ſimilique modo $Qq$ exhibet momentum portionis intra angulum $AVa$ contentae reſpectu eiusdem axis horizontalis per V ducti. Denique P et Q ſunt volumina ipſa nauis intra angulos $BVb$ et $AVa$ contenta.

§. 368. Repraeſentet nunc AEBFA ipſam ſectionem aquae, cuius diameter AB congruat cum recta AB in praecedente figura, ſitque I centrum grauitatis huius ſectionis aquae et PVQ ille axis horizontalis, qui vtrique Tab XII. fig. 4.



ſec-

sectioni aquae cum in situ aequilibrii tum in situ inclinato est communis. Nunc concipiatur haec sectio circa axem PQ, aliquantulum conuerti ad angulum $dw$, vt oriantur illa spatia P et Q intra angulos ad PQ contenta: atque diametro AB parallela consideretur recta quaecunque XRY, cuius pars RY verticaliter producta generet triangulum
fig. 5. $YRy$ elementare voluminis P. Area autem huius trianguli erit $= \frac{1}{2} RY^2 . dw$, ex quo erit $P =$ summae omnium $\frac{1}{2} RY^2 dw = \frac{1}{2} dw \int RY^2$ similique modo erit ex altera parte $Q = \frac{1}{2} dw \int RX^2$. ideoque $P - Q = \frac{1}{2} dw \int (RY^2 - RX^2)$.

fig. 4. §. 369. Sit nunc per centrum grauitatis I sectionis aquae ducta recta EF parallela ipsi PQ, erit ex natura centri grauitatis $\int sY^2 = \int sX^2$. Cum igitur sit $RY = SY + VI$ et $RX = SX - VI$, erit $RY^2 - RX^2 = SY^2 - SX^2 + 2 VI . XY$ atque $\int (RY^2 - RX^2) = \int sY^2 - \int sX^2 + 2 VI . \int XY = 2 VI . \int XY$ ob $\int sY^2 - \int sX^2 = 0$. Dat autem $\int XY$ aream totius sectionis aquae quae posita est $= 2 D$, et est $VI = c + x$, vnde erit $P - Q = \frac{1}{2} dw . 2 (c+x) . 2 D = 2 D (c+x) dw$. Quare pro formula superiore erit $- Px + Qx = - 2 D (c+x) x dw = - 2 D dw (cx + xx)$, vnde iam litterae P et Q ante tantum assumtae ex calculo exterminabuntur, superest igitur vt valorem $Pp + Qq$ determinemus.

§. 370. Cum sit $Pp$ momentum ponderis voluminis aquei intra angulum $BVb$, et $Qq$ momentum ponderis
fig. 5. aquae intra angulum $AVa$ contenti respectu axis PQ, elementum ipsius $Pp$ reperietur ex angulari sectione $YRy$, sit enim $RM = z$, $MN = dz$, ob angulum $YRy = dw$ erit $Mm = z dw$, et particula $MNnm = z dz dw$. Huius
fig. 4. igitur momentum respectu axis PQ erit $= zz dz dw = dw . zz dz$.

$zzdz$. At eſt $zzdz$ productum ex particula quacunque ſectionis aquae ipſius in quadratum diſtantiae ſuae ab axe PQ multiplicatum, ideoque momentum quaſi materiae elementare ſectionis aquae reſpectu axis PQ. Quare cum ſit $Pp = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$, in parte PBQ et $Qq = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$ in parte PAQ, erit $Pp + Qq = dw \times$ *momentum ſectionis aquae reſpectu axis* PQ, cuiusmodi momenta ſectionis aquae iam ſupra ſumus contemplati.

§. 371. Conſiderauimus autem ante momentum ſectionis aquae reſpectu axis horizontalis per eius centrum grauitatis I ducti; quamobrem etiam hic concipiamus axem EF per I ductum et ipſi PQ parallelum, ſitque momentum ſectionis aquae reſpectu huius axis $EF = 2D.ff$, eſt enim perpetuo momentum cuiusque ſiue corporis ſiue ſuperficiei aequale producto ex quadrato alicuius lineae rectae in corporis vel maſſam, vel in ſuperficiei aream. Deinde etiam demonſtrauimus ſi habeatur momentum alicuius figurae reſpectu axis per eius centrum grauitatis tranſeuntis quemadmodum inde momentum reſpectu cuiusuis alius axis illi paralleli definiri debeat. Scilicet regulam ibi traditam ſequentes reperiemus momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = 2D.ff + 2D.VI^2 = 2Dff + 2D(c+x)^2$, vnde erit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$.

§. 372. Cum nunc ſit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$ et $-Px + Qx = -2Ddw(cx + xx)$ erit $Pp + Qq - Px + Qx = 2Ddw(ff + cc + cx)$. Atque hanc obrem momentum quod ex preſſione aquae oritur ad conuertendam nauem circa axem horizontalem Tab. XII. fig. 3.

 per

per centrum grauitatis G ductum atque ad planum ADB normalem erit $= Mdw\left(-b + \frac{2D(ff+cc+cx)}{V}\right)$ huiusque effectus tendet ad restitutionem nauis in situm aequilibrii. Atque ex hac expressione simul intelligitur, vtrum nauis eo modo, quo posuimus, ex situ aequilibrii declinata sese restituere conetur an secus. Nimirum nauis se restituet si fuerit $\frac{2D(ff+cc+cx)}{V} > b$. Quodsi autem sit VI $= 0$, qui est casus supra in stabilitatis indagatione pertractatus, restitutio sequetur si fuerit $\frac{2Dff}{V} > b$.

§. 373. Cum igitur nauis circa axem latitudinalem stabilitate praedita ponatur, erit $\frac{2Dff}{V} > b$. Quamobrem si inclinatio fiat circa axem PQ vt hic posuimus, vis restituens maior erit, quam vis restituens inclinatione circa axem EF facta, atque excessus illius vis super hanc erit $= \frac{2DMdw}{V}(cc+cx) = \frac{2DMdw}{V}$, VI.CI, si quidem haec expressio fuerit affirmatiua. Ex quo perspicuum est, si punctum V ad alteram partem punctorum C et I nempe inter I et puppim cadat, tum hanc expressionem fieri negatiuam, atque vim restituentem minorem esse futuram, quam si inclinatio circa axem EF esset facta; quin etiam valor ipsius $x$ tantopere in negatiuum excrescere poterit, vt vis restituens, quatenus ea in motu rotatorio producendo consistit, fiat negatiua atque inclinationem adeo augeat.

§. 374. Quamuis autem hoc casu, quo $x$ tantum valorem negatiuum induit, vt etiam $c+x$ fiat negatiuum satis ingens, inclinatio de situ aequilibrii augeatur, tamen subuersio nauis non subsequetur, dummodo habeat stabilitatem. Tum enim centrum grauitatis magis erit

eleua-

eleuatum quam in ſitu aequilibrii, ſimul vero altera vis ſuperius determinata, id deprimet, atque in ſtatum naturalem reducet. Quamobrem inclinatio primo tantum momento aliquantulum augebitur, mox vero cum centrum grauitatis propius fuerit ad ſuum ſitum naturalem reductum, motus eueniet fere congruus cum eo, quem ſupra in motu reſtitutionis in ſtatum aequilibrii definiuimus, atque ideo deinceps inclinatio diminui incipiet. Interim tamen hoc certo ſequitur, motum oriturum eſſe perquam difformem, atque a motu oſcillatorio vniformi alieniſſimum.

§ 375. Conſideremus autem caſum, quem figura repraeſentat, quo momentum preſſionum aquae ad inclinationem minuendam atque ad reſtitutionem tendit; motumque inueſtigemus quo haec reſtitutio ſaltem incipiet. Ad hoc ponatur momentum materiae totius nauis reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis ducti, circa quem fiet reſtitutio $= Mk^2$. Atque hinc initium motus reſtitutionis ſimile erit motui reſtitutionis penduli ſimplicis cuius longitudo eſt $= \frac{Vkk}{2D(ff+ce+cx)-Vb}$. Ac penduli tantae longitudinis oſcillationibus iſochronae forent oſcillationes nauis circa axem horizontalem latitudinalem, ſi modo hae oſcillationes eſſent vniformes, neque a motu centri grauitatis turbarentur.

§. 376. Ex his intelligitur, motum nauis poſt inclinationem factam oriundum eo magis fore irregularem ac perturbatum, quo magis primi motus tum centri grauitatis, tum rotationis circa axem latitudinalem a ſe inuicem diſcrepent. At ſupra inuenimus motum centri grauitatis initio conuenire cum motu penduli ſimplicis longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$ (§. 363), hic vero eſt oſtenſum motum

 rota

rotationis ipſo initio conuenire cum motu penduli, cuius longitudo ſit $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Quo maior itaque fuerit differentia inter has expreſſiones eo maior difformitas inerit in motu nauis. Contra autem perſpicuum eſt, ſi hae duae longitudines fuerint inter ſe aequales, tum oſcillationes vtriusque generis conſentire, atque id circo fore regulares neutrasque ab alteris turbari.

§. 377. Dabitur igitur caſus, quo ex facta inclinatione nauis motum oſcillatorium vniformem ac regularem recipiet, id quod eueniet ſi punctum V ſeu interuallum CV $= x$ ita fuerit conſtitutum vt fiat $\frac{Vx}{2D(c+x)} = \frac{Vkk}{2D(ff+cx+cx)-Vb}$. Quare ſi ex hac aequatione definiatur valor ipſius $x$, prodibit ille inclinationis caſus, ex qua nauis motum oſcillatorium vniformem conſequetur. Iſte autem caſus latius patebit, nam cum omne corpus, quod initio motu maxime irregulari mouetur, mox vniformitatem affectet, eiusque motus tandem ſeſe ad motum oſcillatorium ſimplicem pendulorum ſimilem componat; per hanc inueſtigationem ille innoteſcet motus, quem nauis, quantumuis irregulari motu principio circa axem latitudinalem moueri inceperit, tandem aſſequetur; ita vt omnes motus oſcillatorii maxime irregulares tamen in hunc motum oſcillatorium regularem tandem abire debeant.

§. 378. Longitudo igitur penduli iſochroni cum motu oſcillatorio regulari, quem nauis tandem recipiet, erit $= \frac{Vx}{2D(c+x)}$, ſi ipſi $x$ valor tribuatur, quem obtinet in hac aequatione: $2Dkkc + 2Dkkx = 2Dffx + 2Dccx + 2Dcxx - Vbx$ quae reducitur ad hanc $xx = \frac{2x(Dkk - Dff - Dcc + \frac{1}{2}Vb) + 2Dkkc}{2Dc}$ Ponatur breuitatis gratia $Dff +$

$Dcc -$

$Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$, eſt enim ob ſtabilitatem $Dff > \frac{1}{2}Vb$, hincque multo magis $Dff + Dcc > \frac{1}{2}Vb$, eritque $xx = \frac{x(kk-pp)}{c} + kk$; vnde elicitur $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp V(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc})$. Cum igitur $x$ duplicem habeat valorem, oſcillationes duplici modo tandem regulares euadere poterunt; vterque enim valor ſemper eſt realis. Hoc autem valore ſubſtituto prodit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk-pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)}{2cc + kk - pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)} = \frac{V}{2D} \cdot \frac{2kk}{kk + pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)}$.

§. 379. Vt hi duo caſus quibus oſcillationes obtingunt vniformes, melius percipiantur, ponamus primum eſſe $CI = c = o$, quo caſu iam nouimus oſcillationes tam verticales, quam horizontales eſſe regulares. Fiet autem $pp = ff - \frac{Vb}{2D}$: et $V(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc}) = \frac{kk-pp}{2c} + \frac{ckk}{kk-pp}$, vnde $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{kk-pp}{2c}$ ob $c = o$. Ergo fit vel $x = o$ vel $x = \infty$. Priori caſu oſcillationes ſolae prodeunt horizontales, quarum longitudo penduli ſimplicis iſochroni eſt $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk}{pp} = \frac{Vkk}{2Dff - Vb}$, poſteriori oſcillationes ſolae verticales efficientur reſpondentes pendulo $= \frac{V}{2D}$, quos ambo caſus iam ante tractauimus.

§. 380. Ponamus eſſe $p = k$ ſeu $kk = ff + cc \frac{Vb}{2D}$, quae poſitio in nauium figuras cadere poteſt, erit $x = \mp k$. Altero caſu quo eſt $x = CV = + k$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(c+k)}$; altero caſu vero quo eſt $CV = - k$ fiet longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(k-c)}$. Ad ſimilitudinem ergo talis penduli oſcillationes oriri poterunt ſi fuerit $k > c$ hoc eſt $p > c$. Quoties autem nauis habet ſtabilitatem ſimul erit $p > c$; nam propter ſtabilitatem cum ſit $Dff > \frac{1}{2}Vb$, erit in hac aequatione $Dff + Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$ etiam $p > c$. Quando autem

eſt

eſt $p > c$ neutro caſu longitudo penduli inuenta vnquam negatiua eſſe poteſt, ac propterea duobus ſemper caſibus oſcillationes vniformes et tautochronae oriri poterunt.

§. 381. Si interuallum $CI = c$ fuerit valde paruum, ſimul vero $(kk-pp)^2$ quantitas ſatis ingens vt prae ea terminus $4cckk$ ſit perquam exiguus, erit $\surd(4cckk + (kk-pp))^2 = kk-pp + \frac{2cckk}{kk-pp}$ proxime; vnde erit $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{(kk-pp)}{2c} \mp \frac{ckk}{kk-pp}$. Longitudo autem penduli ſimplicis iſochroni erit, ſi ſignum $+$ locum habeat $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{cc}{kk-pp}} = \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk-pp}{cc+kk-pp}$, in his autem oſcillationibus verticales plurimum praeualebunt, motusque circa axem horizontalem vix erit ſenſibilis. Valente autem ſigno $-$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk}{pp - \frac{cckk}{kk-pp}}$; in hocque oſcillationum genere oſcillationes verticales fere erunt nullae.

§. 382. Quomodo autem cunque nauis initio inclinetur ex ſitu aequilibrii, et quantumuis irregularis motus inde oriatur, tamen ipſum motum, qui ſequetur per principia ante ſtabilita determinare licebit dummodo inclinatio de ſtatu aequilibrii fuerit minima. Ponamus enim nauem principio ita declinatam eſſe, vt centrum grauitatis interuallo $r$ magis fuerit depreſſum quam in ſtatu aequilibrii, atque vt tota nauis motu angulari ex ſitu aequilibrii declinata ſit angulo $= s$. Tum vero motum eſſe ſubſecutum, hocque durante depreſſionem centri grauitatis infra ſitum naturalem eſſe adhuc $= y$, et ſitum nauis praeſentem a ſitu aequilibrii differre angulo $= w$. motum vero in hoc ſtatu ita eſſe comparatum, vt celeritas, qua centrum gra-

grauitatis in ſitum naturalem procedit, ſit debita altitudini $v$, celeritatem angularem autem circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum tantam eſſe, vt in diſtantia $k$ ab hoc axe debita ſit altitudini $u$.

§. 383. Repraeſentet autem figura eum nauis ſtatum, quem hic durante motu conſideramus, erit nobis $w$ quod ante fuerat $= dw$, atque cum ſit $y = x dw$, hic nobis eſt $\frac{y}{w}$, quod ante fuerat $x$. Iam tempuſculo minimo $dt$ centrum grauitatis aſcendendo progrediatur per interuallum $= - dy$, quo progreſſu altitudo celeritati debita $v$ augmentum accipiat $dv$; eodem vero tempuſculo $dt$ motu angulari nauis conuertatur per anguli elementum $- dw$, quia ad ſtatum aequilibrii accedit, et altitudo celeritati angulari, quae in diſtantia $k$ viget, debita $u$ augmentum capiat $= du$. Cum igitur elementa $dy$ et $du$ aequali tempuſculo $dt$ conficiantur, erit ex natura motus $dt = - \frac{dy}{\sqrt{v}} = - \frac{kdw}{\sqrt{u}}$ vnde erit $dy : dw = k\sqrt{v} : \sqrt{u}$.

§. 384. Quodſi nunc vtramque ſollicitationem contemplemur, qua tam aſcenſus centri grauitatis acceleratur, quam motus rotatorius incitatur, reperiemus binas ſequentes aequationes

I. $dv = - dy . \frac{2D}{V} (cw + y)$

II. $du = - w dw (\frac{2D}{V} (cc + ff) - b) - dw . \frac{2D}{V} cy$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{2D}{V} = 2m$ et $\frac{2D}{V} (cc + ff) - b = 2nk^2$ atque habebuntur ſequentes aequationes

I. $dv = - 2mcw dy - 2my dy$

II. $du = - 2mcy dw - 2nk^2 w dw$

 quae

quae inuicem additae summam producunt integrabilem; erit scilicet

$$v+u=C-2mcwy-my^2-nk^2w^2$$

Cum autem ipso motus initio, quo erit $y=r$ et $w=s$, sit $v=o$ et $u=o$ erit

$$v+u=2mcrs+mr^2+nk^2-2mcwy-my^2-nk^2w^2.$$

§. 385. Quoniam autem elementa $dy$ et $dw$ eodem tempore absoluuntur, erit $dy=\frac{k\,dw\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $dw=\frac{dy\sqrt{u}}{k\sqrt{v}}$; vterque valor substituatur in illis aequationibus differentialibus, eritque

$$\text{I. } \frac{dv\sqrt{u}}{\sqrt{v}}=-2mckwdw-2mkydw$$

$$\text{II. } \frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}}=-\frac{2mcydy}{k}-2nkwdy$$

quarum summa integrata dabit $2\sqrt{vu}=\text{Const.}-mckw^2-\frac{mcy^2}{k}-2mk\int ydw-2nk\int wdy$. At ex aequatione differentiali prima est $-2\int wdy=\frac{v}{mc}+\frac{yy}{c}$, ex altera vero $-2\int ydw=\frac{u}{mc}+\frac{nk^2w^2}{mc}$; quibus substitutis habebitur $2\sqrt{vu}=\text{Const.}+\frac{ku}{c}+\frac{nkv}{mc}+(\frac{nk}{c}-\frac{mc}{k})(yy+k^2w^2)$ seu $\frac{mku+nkv}{mc}-2\sqrt{vu}=(\frac{nk}{c}-\frac{mc}{k})(rr-yy+k^2(ss-w^2))$.

§. 386. Duas igitur nacti sumus aequationes integrales, ex quibus bini valores $v$ et $u$ poterunt determinari per $r$, $s$, $y$ et $w$. Quodsi fuerit factum, differentietur valor ipsius $v$ inuentus ac differentiale aequale ponatur ipsi $-2mcwdy-2mydy$, hocque pacto obtinebitur aequatio inter $y$ et $w$, cuius ope ad datum quemuis ipsius $y$ valorem licebit valorem anguli $w$ assignare. Ac si denique factis substitutionibus hae aequationes in subsidium vocentur $dt=\frac{-dy}{\sqrt{v}}=\frac{-kdw}{\sqrt{u}}$, omnes quantitates variabiles $v$, $u$, $y$ et $w$ per tempus $t$ exhiberi poterunt, atque hoc

facto

facto ad datum quoduis tempus ſtatus, in quo nauis verſabitur, aſſignari poterit.

§. 387. Hanc inueſtigationem autem vlterius non perſequor, cum propter calculi difficultatem et prolixitatem, tum etiam, quia praeſens inſtitutum eo non multum iuuaretur. Sufficiat igitur perſpicue monſtraſſe, leges motus hic et in ſuperiore libro ſtabilitas omnino ſufficere ad motus huiusmodi maxime irregulares ac perturbatos determinandos, quanquam ſaepius calculus ob ſummam moleſtiam ad finem perduci non poteſt. Etſi autem in hac inueſtigatione inclinationem nauis e ſitu aequilibrii infinite paruam poſuimus, tamen methodus reſoluendi manet eadem inclinatione poſita quantumuis magna. At tum calculus multo adhuc fit prolixior et difficilior, eo quod in tanta inclinatione, figura ſectionis aquae continuo mutatur cuius mutationis ideo ratio quouis momento haberi debet.