Cap. III.

DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 192.

Quando nauis ita iam fuerit constituta, vt aquae in situ erecto immissa aequilibrium teneat, quod euenit, si centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem cadant, tum insuper efficiendum est, vt iste aequilibrii situs sit stabilis, ac viribus inclinantibus resistat. Quodsi enim nauis, cum parumper ex situ hoc aequilibrii declinetur, sese vel non restituat vel adeo subuertatur, ea nullo modo mari committi poterit, vbi continuo praesto sunt, vires vel venti vel ipsius maris, quae nauem de situ suo erecto declinant. Quamobrem circa constructionem nauium hoc maxime requiritur, vt situs aequilibrii, ad quem nauis est apta reddita, satis ingenti praeditus sit stabilitate, cuius ope nauis sine subuersionis periculo omnibus maris ac tempestatis iniuriis exponi possit. Quo enim stabilitas est maior eo minus nauis a viribus vrgentibus inclinabitur, eoque minus subuersioni erit obnoxia.

§. 193 Stabilitas autem haec, qua corpus aquae innatans in situ aequilibrii perseuerat, ortum suum trahit a viribus aquae, quibus externa carinae superficies premitur; quae vires, siquidem aequilibrium affuerit, sese destruunt, nullumque effectum ad statum mutandum exercent. At si nauis ex situ aequilibrii fuerit depulsa, tum istae aquae vi-

res

res nauem extra ſitum aequilibrii perſiſtere non patientur, ſed eam vel in priſtinum aequilibrii ſitum cogent, vel in alium. Quodſi igitur nauis ex ſitu aequilibrii depulſa ab aquae viribus in eundem aequilibrii ſitum reſtituatur, tum iſte ſitus ſtabilitatem habere cenſetur: e contrario autem, ſi nauis in priſtinum aequilibrii ſitum non reſtituatur, ſed in alium aequilibrii ſitum compellatur, tunc ille aequilibrii ſitus non ſtabilis ſeu labilis vocatur, in quo nauis, niſi ſumma adſit quies, permanere non poteſt. Datur etiam tertius caſus, quo nauis ex ſitu aequilibrii depulſa in eodem ſtatu perſeuerat, neque reſtituitur neque ſubuertitur, cuiusmodi aequilibrii ſitum indifferentem appellari conuenit.

§. 194. Ad ſtabilitatis quantitatem aeſtimandam in ſuperiori libro nauem ex ſitu aequilibrii, cuius ſtabilitas quaeritur, aliquantillum ſeu angulo infinite paruo inclinari poſuimus, ac momentum virium definiuimus, quae ad reſtituendam nauem tendunt. Prodiit autem eiusmodi expreſſio, quae per angulum illum infinite paruum, quo nauem ex ſitu aequilibrii inclinatam fuiſſe aſſumſimus, erat multiplicata; atque hanc ob rem illam expreſſionem per hunc angulum diuiſam elegimus ad ſtabilitatis quantitatem exprimendam. Quando itaque ſtabilitas cuiuspiam aequilibri ſitus tali expreſſione definitur, conſtabit quantum virium inclinantium momentum requiratur, ad nauem ex ſitu aequilibrii ad datum angulum inclinandam. Expreſſio enim ſtabilitatis, ſi multiplicetur per angulum illum, ad quem inclinatio fieri debet, dabit virium momentum, quibus iſta inclinatio produci poteſt. Quoniam autem angulum hunc infinite paruum poſuimus, manifeſtum eſt angulos tantum valde exiguos aſſumi debere.

§. 195. Quicquid autem ſit, quoniam hic non de actuali inclinatione quaeſtio inſtituitur, ſed de poteſtate, qua nauis in ſitu aequilibrii conſtituta inclinationi reluctatur; expreſſio deſcripta congrue ad ſtabilitatem metiendam adhibetur. Perſpicuum enim eſt quo maior ſit iſta expreſſio, eo quoque fore maiorem ſtabilitatem, et quidem in eadem ratione; namque duorum aequilibrii ſtatuum ſtabilitates proportionales ſtatui conuenit viribus ſeu potius momentis virium, quibus aequalis inclinatio produci poteſt. Quodſi ergo expreſſio ſtabilitatis euaneſcat, id indicio erit, ſitum aequilibrii eſſe indifferentem, ſeu ita comparatum, vt facta minima inclinatione neque reſtitutio neque ſubverſio conſequatur. Sin autem expreſſio ſtabilitatis fiat negatiua, tum ſitus aequilibrii adeo erit inſtabilis ſeu labilis, atque vel minima facta inclinatione non ſolum non reſtituetur ſed etiam conuertetur, donec nauis in alium aequilibrii ſitum qui ſtabilitate praeditus ſit, fuerit reducta.

§. 196. Quoniam igitur ſtabilitas declarat, quantum datus aequilibrii ſtatus inclinationi reſiſtat, inclinatio autem infinitis modis fieri poteſt, palam eſt, ſtabilitatem abſolute definiri non poſſe, ſed directionem ſecundum quam inclinatio fieri concipitur, ſimul in computum duci debere. Pro ſingulis igitur plagis, in quas inclinatio ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, ſtabilitatem ſeorſim determinari oportet; atque ex ſtabilitate reſpectu datae plagae cognita innoteſcet quantum nauis inclinationi ſecundum eam plagam reſiſtat. Fieri enim omnino poteſt, vt corpus aquae innatans inclinationi verſus vnam plagam magis reſiſtat, quam verſus alias, atque adeo vt datus aequilibrii ſitus in alias plagas ſit ſtabilis, qui reſpectu aliarum plagarum eſt inſtabili-

ſtabilis ac labilis. Sic facile perſpicitur naues inclinationi verſus proram ſeu puppim magis reſiſtere, quam inclinationi verſus latera; ex quo cuiusque nauis ſtabilitas reſpectu prorae et puppis maior erit quam ſtabilitas reſpectu laterum. Quoties igitur quaeſtio de ſtabilitate cuiuspiam aequilibrii ſitus inueſtiganda inſtituitur ſimul plagam indicari oportet, reſpectu cuius ſtabilitas requiritur.

§. 197. Corpus autem aquae innatans de ſitu aequilibrii non declinatur, niſi quatenus circa axem horizontalem conuertitur. Quodſi enim corpus eiusmodi circa axem verticalem quemcunque conuertatur, neque portio aquae immerſa neque ſitus relatiuus centrorum grauitatis ac magnitudinis immutatur; vnde tali conuerſione ſtatus aequilibrii non turbatur. Contra vero corpus aquae inſidens circa axem horizontalem conuerti ſeu inclinari nequit, quin ſimul ſtatus aequilibrii perturbetur. Quam ob rem idea ſtabilitatis penitus figetur, ſi ſimul axis ille horizontalis indicetur, circa quem inclinationes fieri concipiantur, quibus ſtabilitas reſiſtit. Vt ergo ſtabilitas dati aequilibrii ſtatus perfecte cognoſcatur, omnes axes horizontales contemplari, et quanta ſit ſtabilitas reſpectu ſingulorum horum axium aſſignari oportebit: hoc enim pacto conſtabit, quantum nauis cuicunque inclinationi circa axem horizontalem aliquem oriundae reſiſtat.

§. 198. Si nunc hanc de ſtabilitate quaeſtionem ad naues accommodemus, inter infinitos axes horizontales, circa quos inclinatio nauis ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, duos habebimus principales, quorum alter a puppi ad proram porrigitur, alter ad hunc eſt normalis. Priorem illum axem, qui a puppi ad proram ducitur, vocemus

longitudinalem, posteriorem latitudinalem; ex quo pro quaque naui circa stabilitatem duae nascuntur quaestiones principales, quarum altera quaeritur, quanta sit stabilitas respectu axis longitudinalis, altera vero quanta sit stabilitas respectu axis latitudinalis. Priore scilicet quaestione definiri oportet, quantum nauis inclinationi circa axem longitudinalem, seu quae fit ad latera nauis, resistat, posteriori vero, quantum nauis inclinationi circa axem latitudinalem, seu quae versus proram puppimue fiat, reluctetur.

§. 199. Facile autem intelligitur, si cognita fuerit stabilitas nauis respectu vtriusque axis longitudinalis scilicet ac latitudinalis, tum ex eo satis prope colligi posse stabilitatem respectu alius cuiusuis axis horizontalis. Quodsi enim constiterit quanta vi nauis cum inclinationibus versus proram ac puppim, tum etiam versus latera resistat, non difficulter aestimabitur vis, qua inclinationi in quamcunque aliam plagam resistat. Interim tamen hic facilem trademus viam, cuius ope, si cognita fuerit stabilitas respectu duorum axium horizontalium inter se normalium, stabilitas respectu cuiusuis alius axis horizontalis determinari queat. Hancobrem praecipuum negotium nostrum in hoc versabitur, vt, quaque naui proposita, eius stabilitatem respectu binorum illorum axium principalium longitudinalis ac latitudinalis definiamus, quippe quae cognitio ad stabilitatem respectu omnium omnino axium horizontalium diiudicandam sufficit. Atque hoc pacto quaestio de stabilitate, quae initio ob axes infinitos visa est infinita, nunc ad quaestionem bipartitam est reducta.

§. 200. In superiori autem libro ostensum est, dati aequilibrii status stabilitatem respectu cuiusuis axis horizon-

talis

talis determinari ex ſequentibus quatuor rebus. Primo ſcilicet in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur pondus totius nauis, deinde diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, tertio volumen partis ſubmerſae, et quarto denique ſectio aquae. Harum quatuor rerum tres priores aequaliter ingrediuntur, quicunque axis, cuius reſpectu ſtabilitas deſideratur, conſideretur; atque huius axis ratio in ſola ſectione aquae habetur. Per centrum ſcilicet grauitatis ſectionis aquae duci debet recta illi axi horizontali, cuius reſpectu quaeritur ſtabilitas, parallela, atque vtrinque ad hunc axem applicatas orthogonales duci oportet, quarum omnium cuborum ſumma dabit illam quantitatem, quae in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur.

§. 201. Ponamus igitur AEBF eſſe ſectionem aquae per eiusque centrum grauitatis C ductam eſſe rectam AB parallelam illi axi cuius reſpectu ſtabilitas quaeritur; ad hanc itaquae rectam tanquam axem ducantur vtrinque applicatae normales PM, pm, PN, pn, quo facto quaeri debet per integrationem valor huius expreſſionis $\int(PM^3 + PN^3)Pp$, quo cognito ſtabilitas reſpectu axis AB facile determinabitur. Scilicet ſi ponatur pondus nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$ atque interuallum inter centrum grauitatis et centrum magnitudinis $= h$, erit ſtabilitas reſpectu axis $AB = M\left(\frac{\int(PM^3 + PN^3)Pp}{3V} \pm h\right)$, vbi ſignum $+$ ſumi debet ſi centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadat, contra vero ſignum $-$. Simili modo ſtabilitas reſpectu axis EF erit $= M\left(\frac{\int(Qm^3 + Ql^3)Qq}{3V} \pm h\right)$, prouti ſuperiori libro luculenter eſt oſtenſum. Tab. VIII. fig. 2.

§. 202. Quodſi iam in naturam harum formularum integralium diligentius inquiramus, deprehendemus formu-

lam $\int \frac{(PM^3 + PN^3)Pp}{3}$ omnino congruere cum ea, quae prodit, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum ab axe AB, haecque producta in vnam summam colligantur. Namque consideretur particula quaecunque Ww, quae posita $PW = w$ erit $= Pp.dw$, multiplicetur haec per quadratum distantiae suae PW ab axe AB hoc est per w^2, prodibit $Pp.w^2dw$, cuius integrale vsque in M sumtum est $\frac{PM^3.Pp}{3}$: ex quo manifestum est $\int \frac{(PM^3 + PN^3)Pp}{3}$ denotari aggregatum omnium productorum, quae oriuntur, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe AB.

§. 203. Eiusmodi autem aggregata productorum, quae oriuntur, si figurae cuiusuis singulae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum a recta quadam linea fixa, in praecedente libro appellare consueuimus momenta earum figurarum respectu lineae illius rectae fixae. Quodsi igitur sectionis aquae AEBF momentum respectu axis longitudinalis AB per centrum grauitatis C sectionis aquae ducti ponatur $= I$, atque eiusdem figurae momentum respectu axis latitudinalis $EF = K$, erit stabilitas navis respectu axis longitudinalis $= M\left(\frac{I}{V} \pm h\right)$, ac stabilitas eiusdem nauis respectu axis latitudinalis $EF = M\left(\frac{K}{V} \pm h\right)$. Vnde ope illius calculi, quo momenta quarumcunque figurarum definire supra docuimus, facile erit stabilitatem cuiusque nauis propositae tam pro axe longitudinali quam latitudinali determinare.

§. 204. Perspicuum igitur est, si sectionis aquae non solum denter momenta respectu axium binorum longitudinalis

dinalis AB et latitudinalis EF, ſed etiam reſpectu cuiuscunque alius axis per centrum grauitatis C ſectionis aquae ducti, tum pari modo ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem axis aſſignari poſſe. Quoniam vero inuentio momenti reſpectu iſtiusmodi axium obliquorum plerumque fit vehementer moleſta, methodum hic indicabimus, cuius ope ex datis momentis I et K reſpectu axium longitudinalis AB et latitudinalis EF, momentum reſpectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C ſectionis aquae citra calculum definiri queat: ita vt huius compendii beneficio ſufficiat tantum bina momenta ſectionis aquae reſpectu axium AB et EF determinaſſe, ad nauis ſtabilitatem reſpectu axis cuiuscunque definiendam.

§. 205. Ponatur anguli ACP, quem axis propoſitus PQ cum axe longitudinali AB conſtituit, ſinus $= m$, coſinus $= n$ exiſtente ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$. Iam conſideretur ſectionis aquae particula quaecunque w, ex qua cum ad axem AB tum ad PQ perpendiculares ducantur wp et wq, dicaturque $Cp = x$; $pw = y$; $Cq = t$; et $wq = u$, erit $tt + uu = xx + yy$; $\frac{xu + yt}{xx + yy} = m$; et $\frac{xt - yu}{xx + yy} = n$. Ex his reperitur $u = mx - ny$ et $t = nx + my$. Momentum igitur ſectionis aquae reſpectu axis PQ erit $= \int w.u^2 = \int w(mx - ny)^2 = m^2 \int xx.w + n^2 \int yy.w - 2mn \int xy.w$. Simul vero etiam obtinebitur eiusdem ſectionis aquae momentum reſpectu axis RS, normalis ad PQ quippe quod eſt $= \int w.t^2 = n^2 \int x^2.w + m^2 \int y^2.w + 2mn \int xy.w$. Tab. VIII. fig. 3.

§. 206. Quoniam vero momenta ſectionis aquae reſpectu axium longitudinalis ac latitudinalis dantur, erit $\int y^2.w = I$ et $\int x^2.w = K$. Vnde eiusdem ſectionis aquae

momentum respectu axis PQ erit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int xy.w$, momentum vero respectu axis ad hunc normalis RS erit $= m^2 I + n^2.K + 2mn\int yx.w$. Summa igitur binorum momentorum respectu duorum axium inter se normalium erit $= I + K$ ob $m^2 + n^2 = 1$. Quare pro eadem sectione aquae summa duorum momentorum respectu axium inter se normalium semper est constans, atque ea summa perpetuo aequalis aggregato omnium productorum, quae oriuntur si singulae superficiei particulae w. multiplicentur per quadrata distantiarum suarum wC a centro grauitatis C, per quod bini illi axes transeunt. Quodsi itaque habeatur istud aggregatum ac praeterea momentum respectu cuiusuis axis, statim inde innotescet momentum respectu axis ad illum normalis.

§. 207. Cum igitur momentum respectu axis PQ sit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int yx.w$, id ex datis momentis I et K assignari poterit, dummodo constaret valor formulae $\int yxw$. At quoniam omnis sectio aquae ita est comparata, vt axi longitudinali AB in duas portiones similes et aequales diuidatur, quatuor portionum ACE, ACF BCE et BCF, in quas sectio aquae binis axibus principalibus AB et EF diuiditur, tam binae priores ACE et ACF quam posteriores BCE et BCF inter se erunt similes et aequales. Hinc igitur valor ipsius $\int yx.w$, qui ex portione ACF oritur aequalis erit et negatiuus illius valoris, quem portio ACE praebet; ex quo $\int yx.w$ pro parte EAF euanescet; similique modo valor ipsius $\int yx.w$, qui respondet parti posteriori EBF erit $= 0$. Cum ergo totalis valor formulae $\int yx.w$ euanescat, erit momentum sectionis aquae respectu axis $PQ = n^2.I +$

$m^2.K$,

$m^2.K$, ac momentum respectu axis $RS = m^2.I + n^2.K$; ex quo datis momentis respectu axium principalium AB et EF, facili negotio sine calculo momentum respectu cuiuscunque axis, per centrum grauitatis C transeuntis, determinari poterit.

§. 208. Quia est $nn = 1 - mm$, erit momentum sectionis aquae respectu axis $PQ = l - m^2 (I - K)$, vbi m denotat sinum anguli ACP, quem axis PQ cum axe longitudinali AB constituit. Quod si ergo angulus ACP euanescat, seu axis PQ in AB incidat, prodibit momentum respectu eius $= I$ ob $m = o$, id quod est momentum respectu axis AB; at si axis PQ incidat in latitudinalem EF, ob $m = 1$, fiet momentum eius respectu $= K$. Ponamus autem angulum ACP esse semirectum, seu axem PQ medium interiacere inter axes principales AB et EF, erit $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atque momentum erit $= \frac{I+K}{2}$: quod ergo est medium arithmeticum inter momenta respecta axium principalium, ac propterea aequale momento respectu axis RS normalis ad axem PQ, id quod ipsa rei natura indicat, cum axis RS hoc casu similiter sit positus respectu axium principalium, ac axis PQ.

§. 209. Quoniam in omnibus sectionibus aquae, quae occurrere solent momentum respectu axis latitudinalis EF maius est, momento respectu axis longitudinalis AB seu $K > I$, erit momentum respectu axis obliqui $PQ = I + m^2 (K - I)$. Quare momentum respectu axis obliqui PQ maius est, quam momentum respectu axis longitudinalis AB; atque hoc momentum continuo crescet, quoad axis PQ in latitudinalem EF incidat. In omni igitur naui momentum sectionis aquae respectu axis longitudinalis

omnium eſt minimum, momentum vero reſpectu axis latitudinalis omnium maximum. Quodſi ergo nauis habeat ſtabilitatem reſpectu axium binorum principalium, ea reſpectu omnium omnino axium firmiter in ſitu aequilibrii perſiſtet, ex quo ſufficit ad ſtabilitatem nauibus conciliandam ad binos tantum axes principales attendere, eorumque reſpecta ſtabilitatem ſatis magnam efficere, quippe quo reliquis axibus omnibus ſimul erit conſultum.

§. 210. Si igitur momentum ſectionis aquae reſpectu axis latitudinalis aequale fuerit momento reſpectu axis longitudinalis, tum eidem momento aequalia erunt momenta reſpectu omnium axium obliquorum. Quare ſi nauis eius modi habeat figuram, vt reſpectu binorum axium principalium aeque ſit ſtabilis, tum eandem ſtabilitatem habebit reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis. Si ergo ſectio aquae fuerit quadratum AEBF, quia momenta eius reſpectu axium AB et EF inter ſe ſunt aequalia, momenta quoque reſpectu omnium omnino axium per C tranſeuntium erunt aequalia, hincque corpus aquae innatans, cuius ſectio aquae eſt quadratum, ſecundum omnes plagas aeque erit ſtabile, atque aequali vi inclinationibus reſiſtet. Eadem vero proprietas locum habebit ſi ſectio aquae fuerit quaecunque alia figura, dummodo ea ita ſit comparata, vt eius momenta reſpectu binorum axium principalium ſint inter ſe aequalia.

Tab. VIII. fig. 4.

§. 211. Cum igitur ad indicium de ſtabilitate cuiusque nauis reſpectu cuiuscunque axis horizontalis ferendum ſufficiat ſectionis aquae momenta cum reſpectu axis longitudinalis tum latitudinalis determinaſſe, ante omnia neceſſe erit figuras aliquot inſtar ſectionis aquae conſiderare,

pro

pro iisque momenta respectu axium principalium analytice definire. Quodsi enim plurium figurarum momenta fuerint cognita, ex iis aliarum quarumcunque figurarum, quae alias difficulter ad calculum reuocentur, momenta satis prope, id quod ad vsum practicum sufficit, colligi poterunt. Calculo quidem hic vtemur eodem, quo in superiori libro sumus vsi; scilicet sectionem aquae in quatuor portiones ACE, ACF, BCE, et BCF diuisam contemplabimur per axes principales AB et EF; calculumque pro singulis portionibus seorsim instituemus. Sic si pro quadrante ACE vocetur $CP = x$, $PM = y$, dabit $\frac{1}{3}\int y^3 dx$ momentum huius quadrantis respectu axis AB, ac $\int y x^2 dx$ momentum respectu axis EF. Tantum igitur opus est, vt hae expressiones pro singulis quadrantibus quaerantur atque in vnam summam colligantur; vbi quidem hoc compendium affert, quod momenta cum quadrantum ACE et ACF, tum quadrantum BCE et BCF sint aequalia, ex quo calculus duplo fit curtior. Tab. VIII. fig. 2.

§. 212. Sit igitur primum sectio aquae quadratum AEBF, per cuius centrum grauitatis C ducti sint axes principales longitudinalis AB et latitudinalis EF. ponaturque $AC = a$, erit positis $Cp = x$, $pm = y$, $y = a$ vnde $\int y^3 dx = a^4$ et $\frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{a^4}{3}$; atque $\int y x^2 dx = \frac{ax^3}{3} = \frac{a^4}{3}$. Quam ob rem momentum respectu axis AB erit $= \frac{4a^4}{3} = \frac{AB^4}{12}$, cui aequale est momentum respectu axis latitudinalis EF, et respectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C ducti. Quodsi ergo aream huius sectionis aquae ponamus $= 2D$, quam designationem semper ad aream cuiusuis sectionis aquae designandam adhibebimus, Tab. VIII. fig. 4.

erit $AB^2 = 2D$; hincque ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis per C tranſeuntis erit $= \frac{AB^2.D}{6} =$. Commodum autem erit in ſequentibus conſiderationem areae ſectionis aquae in expreſſionem momenti inducere, quo ea facilius per volumen partis ſubmerſae, quod pariter per aream ſectionis aquae in rectam quandam ductae exprimere conuenit, dividi queat.

Tab. VIII. fig. 5. §. 213. Sit nunc ſectio aquae parallelogrammum rectangulum AEBF, cuius axis longitudinalis ſit AB, latitudinalis EF. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area ſectionis aquae $2D = 4ab$. Poſito ergo $CP = x$ erit $PM = y = b$, atque $\int y^3 dx = b^3 x$; vnde momentum reſpectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{4ab^3}{3} = \frac{2D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{6}$. Pari vero ratione prodibit momentum reſpectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2.D}{6}$; ex quo momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis longitudinalis AB ſe habebit ad momentum axis latitudinalis EF inuerſe vt quadratum axis longitudinalis AB ad quadratum axis latitudinalis EF.

Tab. IX. fig. 1. §. 214. Sit porro ſectio aquae rhombus AEBF cuius diagonales AB et EF repraeſentent axes principales, illa AB ſcilicet longitudinalem haec EF latitudinalem. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area $2D = 2ab$. Quodſi ergo ponatur $AP = x$ et $PM = y$ erit $y = \frac{bx}{a}$ et $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3} \int x^3 dx = \frac{b^3 x^4}{4a^3}$. Poſito itaque $x = a$ prodibit momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = \frac{ab^3}{3} = \frac{D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{12}$; ex quo momentum reſpectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{AB^2 D}{12}$; quae expreſſiones a praecedentibus, quae pro parallelo-

grammo

grammo rectangulo prodierunt, hoc tantum differunt, quod ibi diuisum erat per 6, hic vero per 12. Manentibus igitur eadem longitudine ac latitudine, momenta parallelogrammi rectanguli duplo sunt maiora quam rhombi.

§. 215. Accipiatur pro sectione aquae trapezium Aeb Tab. IX. fig. 2. Bf constans ex duabus triangulis aequicruris eAf et eBf, quae figura hoc discrepat a rhombo, quod hic triangula eAf et eBf, sint inaequalia. Manebit igitur quidem AB axis longitudinalis, at ef, quia per centrum grauitatis figurae non transit, non erit axis latitudinalis. Ad veram igitur positionem axis latitudinalis EF inueniendam, determinari oportet centrum grauitatis figurae C; id quod ita reperietur. Natura centri grauitatis hanc praebet aequationem $AB.\,ce.\,Cb = Bc.\,ce.\,\frac{1}{3}Bc - Ac.\,ce.\,\frac{1}{3}Ac$, ex qua oritur $Cc = \frac{ce(Bc^2 - Ac^2)}{3\,AB.\,ce} = \frac{Bc - Ac}{3}$. Ducta itaque per punctum C recta EF parallela ipsi ef, erit verus axis latitudinalis cuius respectu momentum huius figurae definiri oportet.

§. 216. Quaeramus primum momentum huius trapezii respectu axis longitudinalis AB, ponaturque $Ac = a$; $ce = b$; et $Bc = c$. Dicta itaque $AP = x$ erit $PM = \frac{bx}{a} = y$, et $\int y^3 dx = \frac{ab^3}{4}$. Trianguli igitur Ace momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3}{12}$, trianguli vero $Bce = \frac{cb^3}{12}$, vnde totius figurae momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3 + cb^3}{6} = \frac{Dbb}{3} = \frac{ef^2.D}{12}$. Quod si vero momentum figurae respectu axis ef quaeratur, quia huius respectu momentum trianguli Ace est $= \frac{a^3b}{12}$, et trianguli $Bce = \frac{c^3b}{12}$, prodiret id $= \frac{a^3b + c^3b}{6} = \frac{D(aa - ac + cc)}{3}$, posito 2D pro area totius sectionis aquae.

Tab. IX. fig. 3. §. 217. Ex hac ipsa autem expressione momenti figurae respectu axis ef definiri poterit sine peculiari calculo momentum respectu axis latitudinalis veri EF. Namque si figurae cuiuscunque AEBF detur momentum respectu axis ef per eius centrum grauitatis non transeuntis, quod sit $= L$, ex eo definiri poterit momentum respectu axis EF illi axi ef paralleli ac per centrum grauitatis C transeuntis. Consideretur enim figurae particula quaecunque w, erit momentum figurae respectu axis ef quod datum ponitur scilicet $L = \int w.wn^2$; at momentum respectu axis EF quod quaeritur $= \int w.wN^2$. Est vero $\int w.wn^2 = \int w.wN^2 - 2Nn\int w.wN + Nn^2\int w$. Quoniam autem axis EF per centrum grauitatis figurae C transire ponitur, valor huius expressionis $\int w.wN$ vtrinque sese destruit fitque $= 0$, atque $\int w$ abit in aream figurae $= 2D$. Quocirca momentum figurae respectu axis EF erit $= L - 2D.Nn^2 = L - 2D.Cc^2$.

Tab. IX. fig. 2. §. 218. Cum igitur momentum sectionis aquae AeBf respectu axis ef inuentum sit $= \frac{D(aa-ac+cc)}{3}$, verus autem axis latitudinalis EF distet ab axe ef interuallo $Cb = \frac{c-a}{3}$; obtinebitur per regulam modo inuentam momentum figurae respectu axis EF $= \frac{D(aa-ac+cc)}{3} - \frac{2D(c-a)^2}{9} = \frac{D(aa+ac+cc)}{9} = \frac{D(a+c)^2}{12} + \frac{D(c-a)^2}{36} = \frac{D.AB^2}{12} + \frac{D.Cc^2}{4}$. Maius igitur est momentum huius figurae respectu axis latitudinalis EF, quam si esset Ac = Bc. In huiusmodi ergo figuris quadrilateris, quae eandem habent longitudinem AB eandemque latitudinem ef, momentum respectu axis latitudinalis eo erit maius, quo magis fuerint partes Ac et Bc inter se inaequales.

§. 219.

§. 219. Sit nunc sectio aquae ellipsis AEBF, cu ius axis maior AB axem longitudinalem, minor vero EF latitudinalem exhibeat. Sit $AC = BC = a$, $CE = CF = b$, $CP = x$ et $PM = y$, erit $y = b\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. Hinc itaque momentum quadrantis ACE respectu axis latitudinalis CE erit $= \int bxxdx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})} = \frac{a^2b}{4}\int dx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. At $b\int dx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$ exprimit aream quadrantis elliptici $ACE = \frac{D}{2}$, ex quo momentum quadrantis respectu axis EF erit $= \frac{a^2D}{8}$, totiusque ellipsis $= \frac{AB^2.D}{8}$. Hinc sine vlteriori calculo constat ellipsis momentum respectu axis longitudinalis AB fore $= \frac{EF^2.D}{8}$; quae formulae iterum similes sunt iis, quae pro parallelogrammo rectangulo ac rhombo prodierunt, excepto solo denominatore, qui pro parallelogrammo rectangulo erat 6, pro rhombo 12, nunc vero pro ellipsi, 8. Tab. IX. fig. 3.

§. 220. Quoniam supra circa figuras quadrilateras vidimus, eas quae partibus dissimilibus circa axem latitudinalem sint praeditae, maiora habere momenta, quam eas, quae constent partibus similibus, seu rhombos ceteris paribus; operae pretium erit hic inuestigare vtrum idem in figuris curuilineis euéniat. Sit igitur proposita pro sectione aquae figura AEBF, quae cum praecedente ellipsi communem habeat axem longitudinalem AB, et maximam latitudinem ef, itemque totam aream, sed in qua maxima latitudo ef axem AB non secet bifariam sed inaequaliter in c, existente O puncto axis longitudinalis medio. Huius ergo figurae centrum grauitatis cadet in punctum C, eritque EF axis latitudinalis cuius respectu momentum figurae determinari oportet. Ponatur ergo $AO = BO = a$; $ce = cf = b$, atque $Oc = c$. §. 221. Tab. IX. fig. 4.

§. 221. Huiusmodi autem curuae, quae aequalem habeant aream ellipsi, cuius axes sunt AB et ef innumerabiles exhiberi possunt; posito enim $AP = x$, $PM = y$, haec aequatio $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, vbi Y denotat functionem eiusmodi ipsius y, quae euanescat posito $y = 0$, infinitas curuas istius proprietatis praebebit. Posito namque $y = 0$, fit x vel $= 0$ vel $= 2a$, ex quo axis transuersus huius curuae erit $AB = 2a$. Deinde maxima huius curuae latitudo est $= b$, respondetque abscissae $x = a + Y$, posito in Y loco y valore b, ex quo maxima applicata ce non in punctum axis medium O cadet. Denique vero vt curua haec ad vtramque partem axis AB duas habeat partes AEB et AFB similes et aequales, necesse est vt Y sit functio par ipsius y. Hanc obrem ponamus $Y = \frac{-cyy}{bb}$, quo fiat interuallum $Oc = c$ vti assumsimus.

§. 222. Primum autem dico, quamcunque Y significet functionem ipsius y, dummodo non ambiguam cuiusmodi sunt eae quae signum radicale $\sqrt{}$ inuoluunt, aream huius curuae AEBF aequalem esse areae ellipsis, cuius axes sint $2a$ et $2b$. Cum enim sit $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, valor $x = a + Y - a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ valebit pro portione Ace, alter autem valor $x = a + Y + a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb}}$ pro portione Bce. Erit itaque portionis Ace area $= \int y dx = \int y dY + \frac{a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$, si post integrale ita acceptum, vt euanescat posito $y = 0$, ponatur $y = b$. Contra vero portionis Bce area erit $= \int y dY - \frac{a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$ si post integrale ita acceptum vt euanescat posito $y = b$ ponatur $y = 0$. Quamobrem area AEB erit $= \frac{2a}{b} \int \frac{yy dy}{\sqrt{(bb - yy)}} = D$, quippe quae expressio dat aream semiellipseos.

§. 223.

§. 223. Deinde dico huius figurae momentum respectu axis longitudinalis AB idem prodire, quicquid sit functio Y, seu aequale esse momento ellipsis respectu axis AB, posito enim $Y = 0$ curua nostra abit in ellipsin. Est enim momentum portionis A*ce* respectu axis $AB = \frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{1}{3}\int y^3 dY + \frac{a}{3b}\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrale ita sumtum vt euanescat posito $y = 0$, fiat $y = b$. Portionis vero B*ce* respectu eiusdem axis momentum est $= \frac{1}{3}\int y^3 dY - \frac{a}{3b}\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrationem institutam, vt fiat integrale $= 0$ posito $y = b$, ponatur $y = 0$. Areae igitur AEB momentum respectu axis AB erit $= \frac{2a}{3b}\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, in quo quantitas Y non inest. Erit igitur totius figurae plane vt ellipsis momentum respectu axis longitudinalis $= \frac{Dbb}{2} = \frac{ef^2 D}{8}$.

§. 224. Vt nunc etiam momentum huius figurae respectu axis latitudinalis EF definiamus, determinemus id prius respectu axis cuiusdam illi paralleli, puta respectu rectae *aa* in A ad AB normalis: cognito enim hoc momento facile erit momentum respectu axis EF assignare, dummodo distantia AC fuerit definita. Portionis quidem A*ce* momentum respectu axis A*a* est $= \int y\left(d.Y + \frac{aydy}{b\sqrt{(bb-yy)}}\right)(a+Y)^2 - \frac{2a(a+Y)}{b}\sqrt{(bb-yy)} + aa - \frac{aayy}{bb}) = \int y(a+Y)^2 dY - \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) + \frac{a}{b}\int \frac{yy.y(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb}\int yy\,dy(a+Y) + \frac{a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)}$, integralibus ita sumtis vt euanescant posito $y = 0$ tumque posito $y = b$. Portionis vero B*ce* momentum respectu axis A*a* est $= \int y(a+Y)^2 dY + \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) - \frac{a}{b}\int \frac{yydy(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb}\int yy\,dy(a+Y) - \frac{a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)}$ integralibus contrario modo acceptis.

§. 225. Ex his igitur orietur areae AEB momentum respectu axis $aAa = -\frac{4a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{2a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} + \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)^2\sqrt{(bb-yy} = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2dy\sqrt{(bb-yy)}$; propterea quod $y(a+Y)^2\sqrt{(bb-yy)}$ fit $=0$, tam si $y=0$, quam si $y=b$. Est vero posito $y=b$ post integrationem $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bb}{4}\int\frac{yydy}{\sqrt{(bb-yy)}} = \frac{b^3D}{8a}$ (§. 222.). Ex quo momentum areae AEB respectu axis aAa est $= \frac{aaD}{4} + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2dy\sqrt{(bb-yy)}$; atque respectu eiusdem axis momentum totius figurae $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2dy\sqrt{(bb-yy)}$, sumta parte AFB simili et aequali parti AEB.

§. 226. Ponamus nunc centrum grauitatis totius figurae cadere in C erit $DAC = \int yx\,dx$ integrali per totam aream AEB extenso. Quodsi ergo ista formula pro vtraque portione Ace et Bce seorsim exprimatur, prodibit $D.AC = \frac{2a}{b}\int\frac{y^2dy(a+Y)}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2a}{b}\int y\,dY\sqrt{(bb-yy)} = -\frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} = \frac{2a}{b}\int(a+Y)\,dy\sqrt{(bb-yy)}$, vnde obtinebitur $AC = \frac{2a}{bD}\int(a+Y)\,dy\sqrt{(bb-yy)}$. Consequenter, si per centrum grauitatis C axis latitudinalis EF ducatur, erit momentum totius figurae eius respectu $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{8aa}{bbD}\left(\int(a+Y)\,dy\sqrt{(bb-yy)}\right)^2$. Quoties nunc est Y functio par ipsius y, formulae hae integrales reduci poterunt ad hanc $\int\frac{yydy}{\sqrt{(bb-yy)}} = \frac{bD}{2a}$ seu hanc $\int yydy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^3D}{8a}$, siue etiam ad hanc $\int dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$.

§. 227. Ponamus esse $Y = \frac{-cyy}{bb}$, seu $x = a\frac{-cyy}{bb} \pm \frac{a}{b}\sqrt{(bb-yy)}$, ex qua fit $Oc = c$ vti assumsimus, erit

$\int(a$

$\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} = a^2\int dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{2ac}{bb}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} + \frac{cc}{b^4}\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)}$. Verum est $\int dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$; $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^3D}{8a}$; et $\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^5D}{16a}$; ideoque $\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{abD}{2} - \frac{bcD}{4} + \frac{bccD}{16a} = \frac{bD}{16a}(8aa-4ac+cc)$. Simili modo erit $\int(a+Y)\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2} - \frac{bcD}{8a} = \frac{bD}{8a}(4a-c)$, et $AC = a - \frac{c}{4}$ hincque tandem momentum totius figurae AEBF respectu axis $EF = \frac{aaD}{2} + \frac{ccD}{8} = \frac{AB^2.D}{8} + \frac{cc^2.D}{}$.

§. 228. Confirmatur igitur in his figuris, quod supra in trapeziis obseruauimus, scilicet momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis EF maius fieri, quo magis latitudo maxima ef a puncto axis AB medio C differt, ceteris paribus. Aequatio autem assumta $x = a - \frac{ccyy}{bb} \pm \frac{c}{b}\sqrt{(bb-yy)}$ non permittit, vt capiatur $c > \frac{1}{2}a$, alias enim curua vltra rectam aa excurreret, id quod non conuenit figuris, quae sectionis aquae vicem tenere debent. Quodsi autem ponatur $c = \frac{1}{2}a$ seu $Oc = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AB$, prodibit momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2.D}{8} + \frac{AB^2.D}{128}$. Tanta ergo maximae latitudinis ef remotione a medio puncto longitudinis O, momentum respectu axis latitudinalis sui parte decima sexta augetur.

§ 229. Consideremus nunc alias curuas latius patentes, in quibus praecedentes contineantur, sitque sectio aquae AEBF composita ex duabus partibus AEB et AFB similibus et aequalibus, siue eae curuam continuam constituant siue secus; deinde quaelibet semissis constet ex duabus portionibus applicata ef a se inuicem disiunctis, quae pariter, vtrum sint continuae an non, nihil interest. Manentibus scilicet $AO = Bo = a$, $ce = cf = b$, $AP = x$,

$PM = y$, exprimat portionis Ace naturam haec aequatio $x = a + Y - a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa = AP$, naturam vero portionis Bce haec aequatio $x = a + Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa = Ap$, erit ergo $Mm = 2a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, vnde area AEB prodibit $= 2a\int dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa = D$ integrali ita assumto vt euanescat posito $y = o$, tumque facto $y = b$. Area itaque manebit eadem, quaecunque functio pro Y substituatur.

§. 230. Momentum huius figurae respectu axis longitudinalis AB facile determinabitur, cum enim sit $Mm = 2a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, erit momentum respectu axis $AB = 2a\int yy\,dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, quod pariter a valore functionis Y non pendet. Ad momentum autem huius figurae respectu axis latitudinalis EF, qui per centrum grauitatis figurae C est ductus determinandum, quaeratur primum momentum respectu axis normalis ad AB et per eius punctum medium O ducti. Quia nunc est $PO = -Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$ et $pO = Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, erit momentum respectu huius axis $= \frac{2n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa - 1} + 2a\int Y^2 dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, ex quo totius figurae momentum respectu axis ipsi EF paralleli et per O ducti erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa - 1} + 4a\int Y^2 dy\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$.

§. 231.

§. 231. Oportebit iam locum centri grauitatis huius figurae C definire, pro quo natura centri grauitatis praebebit hanc aequationem $D.CO = 2a\int y\,dY\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{2n\varkappa a}{b^n}\int y^n Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa-1} = -2a\int Y dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ ex qua fit $CO = \frac{-2a\int Y dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}}{D}$. Quocirca momentum totius figurae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + 4a\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{8aa\left(\int Y dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}\right)^2}{D}$.

Quod si nunc pro Y accipiatur eiusmodi functio ipsius y, vt sit $Y = \alpha y^n + \beta y^{2n} + \gamma y^{3n} +$ etc. et $\varkappa$ denotet vel numerum integrum vel fractum, cuius denominator sit 2, integratio singularum harum formularum reduci poterit ad eam qua area exprimitur, scilicet $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{D}{2a}$.

§. 232. Sit primum antequam pro $\varkappa$ valores definitos accipiamus, $Y = \frac{-cy^n}{b^n}$, vt fiat $Ac = a-c$ et $Oc = c$, erit $\int Y dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = -\frac{c}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-c}{n(\varkappa+1)+1}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-cD}{2a(n(\varkappa+1)+1)}$, atque $\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{cc}{b^{2n}}\int y^{2n} dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)cc}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)ccD}{2a(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}$. Quocirca momentum figurae propositae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} +$

$$\frac{2(n+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)} - \frac{2ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2} = \frac{4n\varkappa a^2}{b^n}$$

$$\int y^n dy \left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$$: vnde iterum intelligitur hoc momentum maius esse, quo maius fuerit interuallum c inter punctum axis longitudinalis medium O et latitudinem maximam ef.

§. 233. Quoniam vero est $\frac{\int y^n dy}{b^n}\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = \frac{1}{1+3n\varkappa}$ $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1}$, ponatur $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = N\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ $= \frac{ND}{2a}$ erit momentum respectu axis EF $= \frac{2n\varkappa a^2 ND}{1+3n\varkappa}$ $+ \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$. Valores autem ipsius N pro variis ipsius $\varkappa$ valoribus ita se habent

$\varkappa=\frac{1}{2}$	$N=1$
$\varkappa=1$	$N=\frac{4n}{2+4n}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$N=\frac{5n\cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)}$
$\varkappa=2$	$N=\frac{6n\cdot 8n\cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10)}$
$\varkappa=\frac{5}{2}$	$N=\frac{7n\cdot 9n\cdot 11n\cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)}$
$\varkappa=3$	$N=\frac{8n\cdot 10n\cdot 12n\cdot 14n\cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)}$

etc.

§. 234. Ponamus esse $c=0$, quia si hoc casu momentum respectu axis EF fuerit cognitum, ex eo idem momentum pro valore quocunque ipsius c inueniri potest. Erit autem momentum hoc pro variis ipsius $\varkappa$ valoribus ita comparatum vt tabula apposita indicat.

si	Momentum respectu axis EF
$\varkappa=\frac{1}{2}$	$2a^2D.\frac{n}{2+3n}$
$\varkappa=1$	$2a^2D.\frac{2n\cdot 4n}{(2+4n)(2+6n)}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$2a^2D.\frac{3n\cdot 5n\cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)(2+9n)}$
$\varkappa=2$	$2a^2D.\frac{4n\cdot 6n\cdot 8n\cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)(2+12n)}$
$\varkappa=\frac{5}{2}$	$2a^2D.\frac{5n\cdot 7n\cdot 9n\cdot 11n\cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)(2+15n)}$
$\varkappa=3$	$2a^2D.\frac{6n\cdot 8n\cdot 10n\cdot 12n\cdot 14n\cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)(2+18n)}$

§. 235.

§. 235. Si pro his curuis ponatur $n = 1$, tum anguli, quos curua in A et B cum axe AB constituit erunt obliqui, sin autem $n < 1$ tum hi anguli euanescent, hisque igitur casibus curua puncta habebit flexus contrarii, ideoque ad sectionem aquae repraesentandam non erit idonea. Minimus igitur valor, qui litterae n tribui poterit erit vnitas, hocque casu capacitas ceteris paribus erit minima: crescente autem littera n, crescet capacitas figurae, donec, si fiat n infinitum, figura abeat in parallelogrammum rectangulum, cuius momentum respectu axis latitudinalis erit $= \frac{2a^2D}{3} = \frac{AB^2D}{6}$; id quod accidit, quicunque numerus loco $\varkappa$ substituatur, dummodo sit affirmatiuus; negatiuos enim valores substituere non licet, eo quod curvae tum non claudantur, sed in infinitum extendantur.

§. 236. Deinde etiam ad praesens institutum $\varkappa$ vnitate maius accipi non potest; posito enim $\varkappa > 1$ tum curua in e et f habebit cuspides ac tangentes ad AB normales, cuiusmodi figurae nauibus non conueniunt. Quodsi autem sit $\varkappa = 1$ anguli ad e et f erunt acuti, hocque casu continetur figura rectilinea quadrilatera quam §. 215. consideraui mus. At si ponatur $\varkappa < 1$ tum curuae in e et f habebunt tangentes axi AB parallelas, cuiusmodi figurae sectioni aquae optime conueniunt. Ponamus igitur $\varkappa = 1$, et $n = 1$ prodibit momentum respectu axis EF $= \frac{2a^2D}{6} = \frac{AB^2.D}{12}$, qui est casus rhombi: sin $n = 2$ fit hoc momentum $= \frac{16a^2D}{35} = \frac{4AB^2.D}{35}$, id quod iam multo maius est quam illud. Positis vero $\varkappa = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ fit hoc momentum $= \frac{2a^2D}{5} = \frac{AB^2D}{10}$, at si $n = 2$ fit id $= \frac{a^2D}{2} = \frac{AB^2.D}{8}$, qui est casus pro ellipsi.

§. 237.

§. 237. Exempla haec sufficere possunt ad momenta cuiusuis sectionis aquae propositae proxime aestimanda. Si enim vt hactenus AB designet axem longitudinalem EF latitudinalem, et D semissem areae sectionis aquae, erit momentum respectu axis longitudinalis $AB = \frac{EF^2 . D}{\mu}$, ac momentum respectu axis latitudinalis $EF = \frac{AB^2 . D}{\mu}$, vbi μ est numerus inter limites 6 et 12 contentus. Valorem autem ipsum numeri μ ex hoc aestimari licebit, quod, si sectio aquae sit rectangulum, fiat $\mu = 6$, sin rhombus, $\mu = 12$; qui sunt casus extremi: deinde etiam constat si sectio aquae fuerit ellipsis fore $\mu = 8$; et, si ea fuerit parabola axem in axe latitudinali positum habens, erit pro momento respectu axis longitudinalis $\mu = \frac{35}{4}$ at respectu axis latitudinalis erit $\mu = 10$. Provt igitur figura proposita ad aliquem horum quatuor casuum proxime accedit, ita valorem litterae μ vero proxime definire licebit. Denique si sectionis aquae semisses proram puppimque spectantes inter se fuerint inaequales, hac ipsa inaequalitate momentum respectu axis latitudinalis augebitur.

§. 238. Expositis igitur his, quae ad sectionem aquae eiusque momenta respectu quorumque axium horizontalium per eius centrum grauitatis ductorum spectant, reuertamur ad stabilitatem, qua naues in situ aequilibrii per-
Tab IX. fig. 5. stant, diligentius inuestigandam. Repraesentet ergo figura A*ab*B carinam nauis seu partem aquae immersam, cuius suprema superficies seu sectio aquae sit AEBF, atque A prora, B vero puppis. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen partis submersae $= V$, quod ita pendet ab M, vt pondus massae aquae cuius volumen est $= V$ aequale

sit

ſit ponderi nauis $= M$, ſit porro centrum grauitatis totius nauis ſitum in G, centrum magnitudinis partis ſubmerſae vero in O, ita vt O infra G cadat, vt fere in omnibus nauibus fieri ſolet. Denique ſit area ſectionis aquae $= 2D$, eiusque momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = I = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, at reſpectu axis latitudinalis $= K = \frac{AB^2 \cdot D}{\nu}$, vbi μ et ν numeros deſignant medios inter 6 et 12 diverſas autem litteras μ et ν aſſumſimus quia non ſemper aequales valores habent.

§. 239. Ex his itaque obtinebitur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = M\left(\frac{EF^2 \cdot D}{\mu V} - OG\right)$ atque momentum reſpectu axis latitudinalis $= M\left(\frac{AB^2 \cdot D}{\nu V} - OG\right)$. Sin autem centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O caderet, tum loco $-OG$ ſcribi deberet $+OG$; hocque caſu nauis ſemper haberet ſtabilitatem affirmativam atque in ſitu ſuo aequilibrii firmiter perſiſteret. Stabilitas porro hoc caſu eo erit maior, quo profundius centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O cadet. Ratione autem ſectionis aquae ſtabilitas augebitur quo amplior ea accipiatur; tum enim non ſolum area eius $2D$ eo fiet maior, ſed etiam eius longitudo AB et latitudo EF, ex quo ſtabilitas duplicem ob rationem augebitur.

§. 240. Quod ſi igitur naues ita confici poſſent vt earum centrum grauitatis infra centrum magnitudinis caderet, tum nulla admodum cura eſſet adhibenda ad ſtabilitatem nauibus conciliandam, quoniam ſponte haberent ſatis magnam. At haec conditio in plerisque nauibus nullo modo adimpleri poteſt, ſi enim tota nauis moles per carinam aequabiliter diſtribuatur, tum centrum grauitatis in ipſum centrum magnitudinis caderet, ex quo per-

ſpicuum eſt ob partem extra aquam eminentem centrum grauitatis altius eſſe poſitum. Quamuis enim maxime ponderoſis oneribus in imum carinae collocandis centrum gravitatis deorſum et quidem infra centrum magnitudinis deduci poſſet; ſi ſpatium carinae ſuppetat; tamen in pleriſque nauibus praeſertim bellicis tanta onerum copia neceſſario ſupra ſuperficiem aquae debet eſſe conſtituta, vt memorata onerum impoſitione centrum grauitatis vix ac ne vix quidem infra aquae ſuperficiem deprimi queat.

§. 241. Cum igitur, ſi praeſentem theoriam ad naues accommodare velimus, centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere ponendum ſit, ſumma cura in conſtructione nauium erit adhibenda, vt naues ſtabilitatem ſufficientem obtineant. Hoc autem in negotio ſufficiet, ſi nauibus ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſatis magna concilietur, quae eſt $= M\left(\frac{EF^2.D}{\nu V} - OG\right)$; cum enim fuerit $\frac{EF^2.D}{\nu V} > OG$ multo magis erit $\frac{AB^2.D}{\mu V} > OG$, quia in omnibus nauibus longitudo AB multo maior eſt quam latitudo EF. Vulgo namque longitudo AB quadrupla ſtatuitur latitudinis EF, ex quo $\frac{AB^2.D}{\mu V}$ circiter decies et ſexies maius ſit quam $\frac{EF^2.D}{\nu V}$, quia numeri μ et ν nullo caſu a ſe inuicem multum diſcrepant. Quanquam enim ſtabilitas nauium reſpectu axis latitudinalis multo maior eſſe debet, quam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, tamen ea ſatis fiet ingens, ſi modo ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſit aliqua. Quamobrem ſufficiet ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis tantam effeciſſe, quantam circumſtantiae requirunt.

§. 242. Cum autem nullum ſit dubium, quin nauis, quo maiorem habeat ſtabilitatem, eo ſit perfectior cen-

ſen-

ſenda, tum enim non ſolum aduerſitates tempeſtatum minore periculo ſubit, ſed etiam maiores vires ſuſtinere valet; hanc obrem conueniet naues ita fabricari vt exceſſus quantitatis $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ ſupra OG ſit quam fieri poteſt maximus. Poſſet quidem iſte exceſſus ad lubitum multiplicari augenda area ſectionis aquae, ſed quia hinc alia naſcuntur incommoda, modus quidam eſt ponendus, quem transgredi non liceat. Definietur autem iſte modus cum vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, tum etiam aliis nauium non minus neceſſariis proprietatibus, quae non nimis amplam aquae ſectionem admittunt; interim tamen id nunc maxime eſt neceſſarium, vt quantitas $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ notabiliter intervallum OG ſuperet, alioquin enim nauis nequidem aquae committi poſſet.

§. 243. Videamus igitur ante omnia quantum valorem haec quantitas $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ circiter praebeat. Ac primo quidem conſtat volumen partis aquae ſubmerſae V maius eſſe pyramide baſin habente ſectionem aquae 2D et altitudinem $= CD$, ſeu eſſe $V > \frac{2}{3} D.CD$; contra vero minus eſt V quam priſma eiusdem baſis 2D eiusdemque altitudinis CD, ſeu erit $V < 2D.CD$. Videtur autem ſatis prope accipi poſſe $V = D.CD$, tantum enim foret volumen carinae, ſi ea terminaretur rectis a ſingulis circumferentiae ſectionis aquae punctis ad ſpinam *ab* normaliter ductis. Quanquam enim naues circa medium gibboſiores eſſe ſolent, quam in tali figura, tamen ad proram ac puppim tantundem fere deficit, quantum gibboſitas addit: hancque ob rem aſſumamus $V = D.CD$ vnde ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis prodit $= M\left(\frac{EF^2}{\gamma CD} - OG\right)$.