perietur, ſi area ſectionis aquae ducatur in diſtantiam centri grauitatis g, ſemiſſis eiusdem ſectiones aquae ab axe AB, ac productum multiplicetur per $\frac{\pi}{2}$.

§ 50. Tertia nauium ſpecies eas ſub ſe complectitur Tab. III. fig. 2. figuras, in quibus omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt ſimiles. Huiusmodi nauem ſeu potius carinam repraeſentet figura AEDFB, in qua ſit ADB planum diametrale, ac RQS ſectio verticalis eidem parallela, quae ideo ipſi plano diametrali erit ſimilis; idque ex utraque ſectionis ampliſſimae EDF parte. Hanc ob rem erit $AC:CD = RQ:PQ$, atque $BC:CD = SP:PQ$, ex quibus analogiis patet in iſtis figuris ſectionem aquae et ſectionem ampliſſimam a ſe inuicem ita pendere, vt areae ACE, DCE et BCE inter ſe ſint affines communem baſin CE habentes.

§. 51. In his itaque figuris ſectio aquae ita determinatur, vt eius partes AEF et BEF proram et puppim ſpectantes debeant eſſe affines: ſeu PR ad PS eandem debeat tenere rationem quam AC ad BC. Hanc obrem ponamus praeter plani diametralis figuram ADB datam eſſe figuram ſectionis ampliſſimae CEDF: his enim duabus ſectionibus datis totius carinae figura innoteſcet. Hunc in finem poſitis $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$, ſint pro plano diametrali abſciſſa $CT = p$ et applicata $TV = q$: itemque pro ſectione ampliſſima ſit abſciſſa $CP = r$ et applicata $PQ = s$: atque ob has figuras datas dabitur q per p, ſimiliterque s per r. Propter ſimilitudinem vero erit $CD\,(c) : CA\,(a) = PQ\,(s) : PR$ vnde fit $PR = \frac{as}{c}$, quae eſt applicata anterioris partis ſectionis aquae reſpondens abſciſſae $CP = r$. Pro parte autem poſteriori erit $PS = \frac{\alpha s}{c}$ poſito $CB = \alpha$.

§. 52. Sumatur nunc pro ſectione RQS abſciſſa PY, quae ſit ad CT, p vt RQ s ad CD, c ſeu $PY = \frac{ps}{c}$ erit applicata reſpondens $YZ = \frac{qs}{c}$. Quamobrem cum punctum Z ſit in ſuperficie carinae, ſi tres variabiles, quibus locus puncti Z determinatur, ponantur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $CX = x = \frac{ps}{c}$, $XY = y = r$ et $YZ = z = \frac{qs}{c}$. Quoniam vero datur s per r, dabitur quoque s per y, ob $r = y$, ſitque $s = Y$, exiſtente Y functione ipſius y. Deinde aequatio $\frac{x}{z} = \frac{p}{q}$, quia q datur per p praebebit $p =$ functioni nullius dimenſionis ipſarum x et z; ex quo fiet $s = Y = \frac{cx}{p} =$ functioni vnius dimenſionis ipſarum x et z. Haecque eſt proprietas eſſentialis figurarum ad tertiam ſpeciem relatarum.

§. 53. Ad ſoliditatem huiusmodi figurarum inueniendam, ponatur area plani diametralis $ADB = E$, erit area $RQS = \frac{Ess}{cc}$; atque volumen ſpatii $ARQSB = \frac{E}{cc} \int ss\,dr$. Si ergo poſt integrationem ponatur $r = b$, prodibit volumen ſemiſſis carinae AEBD, ex quo volumen totius carinae erit $= \frac{2E}{cc} \int ss\,dr$. Ponatur area ſectionis ampliſſimae EDF $= F$, atque eius ſemiſſis CDE, centrum grauitatis in g, ex quo ad EF ducatur verticalis gG. His factis erit F $2\int s\,dr$. atque $Gg = \frac{\int ss\,dr}{2\int s\,dr}$, vnde habebitur $\int ss\,dr = F.Gg$: ſi quidem integralia, vti decet fuerint accepta. Hinc itaque pro ſoliditate totius carinae emerget ſequens expreſſio $\frac{2E.F.Gg}{c^2} = \frac{2E.F.Gg}{CD^2}$; cuius valor ex datis plano diametrali et ſectione ampliſſima pro operatione practica non difficulter inuenitur.

§. 54. Tres istae priores species hoc inter se conueniunt atque a sequentibus tribus discrepant, quod habeant sectiones viii principalium parallelas inter se similes, cum in sequentibus tantum sint affines. Quoniam autem figurae similes in affinibus continentur, etiam hae tres species priores in sequentibus tribus comprehenduntur. Interim tamen idoneum visum est ex similitudine peculiares species constituere, cum calculus pro iis fiat admodum facilis; ac figurae nauium, quae ad has species pertinent, a reliquis distingui mereantur. Praeterea in his iam expositis tribus speciebus duae sectiones principales sufficiunt ad totam figuram determinandam, atque tertia ex iis sponte definitur: at in sequentibus speciebus omnes tres sectiones principales pro lubitu assumere licet, ex quo earum latissima extensio colligi potest.

§. 55. In sequentibus igitur speciebus omnes tres sectiones principales nobis erunt datae, ex iisque nauium figura triplici modo determinabitur: primo scilicet eas figuras considerabimus, in quibus omnes sectiones horizontales cum inter se tum sectioni aquae sint affines; secundo sectiones verticales sectioni amplissimae parallelae eidem affines ponentur: tertio denique affinitas statuetur inter sectiones verticales plano diametrali parallelas; haeque tres species constituent nobis species quartam, quintam et sextam. Qui autem haec attentius perpendet facile agnoscet, vix dari aut excogitari posse carinae figuram, quae si non ad aliquam trium priorum specierum pertineat, ad quandam posteriorum referri nequeat. Atque hanc ob rem perfectissimam nauium figuram, quam quaerimus, in his sex speciebus contineri, sine vlla haesitatione tuto assumimus.

§. 56. Cum igitur in posterioribus his tribus speciebus tres sectiones principales a se inuicem non pendeant, singulaeque pro arbitrio accipi queant, dummodo in punctis E, D, et F conueniant, singulas peculiaribus aequationibus exprimemus inter binas coordinatas orthogonales, quarum alterius abscissae scilicet a puncto medio C computentur. Ita pro sectione aquae p denotabit abscissam in axe CA sumtam ac q applicatam respondentem. Porro r denotabit abscissam sectionis amplissimae in axe CE sumtam atque s applicatam respondentem. Denique pro plano diametrali t erit abscissa in axe CD sumta, et u eius applicata. Ob tres igitur sectiones principales vel datas vel tanquam datas considerandas, cognitae erunt aequationes cum inter p et q, tum inter r et s tum etiam inter t et u.

§. 57. Quod denique ad longitudinem, latitudinem et profunditatem cuiusque carinae in genere attinet, a nobis semper denotabit longitudinem prorae CA, puppis autem longitudo CB designabitur littera α. Maximae autem latitudinis EF semissis, hoc est vel CE vel CF erit nobis constanter $= b$. Profunditatem vero CD exprimat littera c. Deinde cum harum trium sectionum principalium areae in calculum sint ingressurae, ponemus aream sectionis aquae AEBF $= 2$ D, quia ex duabus portionibus similibus et aequalibus AEB, AFB quarum vtraque erit $=$ D, constat. Semissis vero sectionis amplissimae sit $=$ E ita vt sit area EDF $= 2$ E. Area tandem plani diametralis ADB, quia non constat duabus portionibus aequalibus et similibus exponatur littera F.

§. 58.

§. 58. Examini ergo ſubiiciamus nauium ſpeciem quartam, in qua omnes ſectiones horizontales ſeu ſectioni aquae parallelae eidem ſint affines. Sit igitur AEDBF eiusmodi figura pro cuius ſectione aquae ponatur abſciſſa CI $= p$; applicata IK $= q$: pro ſectione vero ampliſſima ſit abſciſſa CH $= r$, applicata HQ $= s$; ac pro plano diametrali ſit abſciſſa CP $= t$, et applicata PS $= u$. Ex figura autem intelligitur eſſe CP $=$ HQ ſeu $s = t$; quare cum r per s et u per t detur, erunt r et u functiones vel ipſius t vel ipſius s. Concipiatur nunc per punctum P facta ſectio horizontalis SQTR, quae ita erit comparata, vt tam portio SQR affinis ſit portioni ſectionis aquae AEF, quam portio TQR portioni EBF. Tab. II. fig. 2.

§. 59. In hac igitur ſectione ſi capiatur abſciſſa PO quae ſit ad CI (p) vt PS (u) ad CS (a), ſeu PO $= \frac{pu}{a}$, erit ex natura figurarum affinium applicata OZ : IK (q) $=$ PQ (r) : CE (b) ſiue OZ $= \frac{qr}{b}$. Si nunc ex puncto Z, quod in ſuperficie figurae eſt ſitum, ducatur ad ſectionem aquae normalis ZY, et ex Y ad axem AC normalis YX, erunt CX $= x$; XY $=$; et YZ $= z$ tres coordinatae, quibus natura huius ſuperficiei exprimetur. Erit autem $x =$ PO $= \frac{pu}{a}$; $y =$ OZ $= \frac{qr}{b}$, atque $z =$ CP $=$ HQ $= t = s$: hinc ergo z loco t et s ſubſtituendo fiet tam u quam r functiones ipſius z. Priores vero aequationes praebent $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$, vnde ex aequatione inter p et q data, elicietur aequatio inter x, y et z, qua natura ſuperficiei continebitur.

§. 60. Si aequationum $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$ altera per alteram diuidatur, habebitur $\frac{p}{q} = \frac{arx}{buy}$ vbi $\frac{ar}{bu}$ erit functio quaepiam ipſius z. Quoniam autem q per p datur, definiri poterit valor ipſius p ex iſta aequatione per x, y et z, qui valor ita erit comparatus, vt ſi ſolae quantitates x et y dimenſiones conſtituere cenſeantur, fiat $p =$ functioni ipſarum x et y nullius dimenſionis, in qua tamen z quoque inſit. Quare cum ſit $u = \frac{ax}{p}$ aequatio localis pro huius generis figuris hanc habebit proprietatem, vt functio quaedam ipſius z aequetur functioni ipſarum x, y et z, in qua variabiles x et y coniunctim vtique vnam dimenſionem obtineant. Ex aequatione autem locali hoc modo inuenta omnes ſectiones huiusmodi figurarum innoteſcent.

§. 61. Ad ſoliditatem vero huius figurae definiendam notare conuenit aream ſectionis SQTR ſe habere ad aream ſectionis aquae AEBF vt ru ad ab. Quare cum ſectionis aquae area poſita ſit $= 2\,D$, erit area ſectionis SQTR $= \frac{2Dru}{ab}$; in qua expreſſione quantitates r et u dantur per $s = t = z$; ita vt poſito CP $= z$ futurae ſint ambae quantitates r et u functiones ipſius z. Ex his obtinebitur volumen totius carinae propoſitae $= \frac{2D}{ab}\int rudz$, ſi quidem poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, ponatur $z = c$. Atque hoc pacto volumen figurae ex datis tribus ſectionibus principalibus non difficulter definietur.

Tab. III fig. 1. §. 62. Sequitur nauium ſpecies quinta ad quam omnes figuras retulimus, quae ſectiones verticales ampliſſimae parallelas eidem affines habent. Eiusmodi ergo figura ſit AEBFD, cuius ſectio aquae AEBF data ſit per aequationem inter abſciſſam CX $= p$ et applicatam XR $= q$:

pro

pro ſectione autem ampliſſima CDF data ſit aequatio inter abſciſſam $CP = r$ et applicatam $PM = s$. Denique plani diametralis natura expreſſa ſit aequatione inter abſciſſam $CQ = t$ et applicatam $QV = u$. Quoniam autem haec figura ad propoſitum caſum eſt accommodata, erit $CX = QV$ ſeu $p = u$; quare cum q per p et t per u dentur erunt q et t functiones eiusdem quantitatis ſiue p ſiue u.

§. 63. Per punctum axis X concipiatur facta ſectio verticalis RVS ſectioni ampliſſimae parallela quae cum eidem ſit affinis, capiatur in ea abſciſſa XY eandem tenens rationem ad abſciſſam CP quam tenet XR ad CE, vnde erit $XY = \frac{qr}{b}$; applicata autem reſpondens YZ ita erit comparata, vt ſit $YZ : PM\ (s) = XV\ (t) : CD\ (c)$, ſeu $YZ = \frac{st}{c}$. Ponatur iam $CX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, erit $x = p = u$; $y = \frac{qr}{b}$ et $z = \frac{st}{c}$: vnde q et t erunt functiones ipſius x: reliquae aequationes praebent $\frac{y}{z} = \frac{cqr}{bst}$, vnde ob s per r datum reperietur $r =$ functioni ipſarum x, y, z, in qua y et z vbique numerum dimenſionum nullum conſtituant. Quamobrem ob $q = \frac{by}{r}$, functio quaepiam ipſius x aequabitur functioni cuidam ipſarum x, y, et z in qua variabiles y et z ſolae conſideratae vnicam dimenſionem conſtituant.

64. Quod ad volumen huius figurae attinet, id ex area ſectionis RVS, quae cognitam tenet relationem ad aream ſectionis ampliſſimae, definietur: cum enim ſit area $EDF = 2E$, erit area $RVS = \frac{2Eqt}{bc}$ atque quantitates q et t, erunt functiones eiusdem variabilis p vel u propter $p = u$. Quare ſi retineatur abſciſſae CX denominatio

x, erunt q et t functiones ipsius x, quae deriuabuntur ex aequationibus inter q et p atque inter t et u datis, scribendo x loco p et u. Hinc itaque $\frac{2E}{bc}\int qt\,dx$, integrali ita sumto vt euanescat posito $x=0$, dabit volumen portionis EDFSVR; ac facto post integrationem $x=a$ proueniet soliditas seu volumen prorae AEDF, si ergo simili modo quaeratur volumen puppis, horum voluminum aggregatum dabit totius figurae propositae volumen.

Tab. III. fig. 2. §. 65. Peruenimus denique ad nauium speciem sextam, in qua omnes sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt affines; huiusmodi figura sit AEDBF. Ponatur igitur pro sectione aquae abscissa $CK=p$, applicata $KR=q$. Pro sectione amplissima vero sit abscissa $CP=r$ applicata $PQ=s$: ac pro plano diametrali sit abscissa $CN=t$, applicata $NV=u$: eritque $q=r$: ita vt futurae sint p et s functiones eiusdem quantitatis variabilis q vel r. Hic quidem vt in praecedentibus speciebus notandum est non necessario esse $q=r$, sed potius q et r sunt quantitates a se inuicem non pendentes. Quoniam vero figura ad casum praesentem accommodari debet, is facillime euoluetur, si perpetuo r ipsi q aequale capiatur.

§. 66. Per punctum P fiat sectio RQS plano diametrali parallela, quae ob $CP=KR$ simul per punctum R transibit: erit ergo eius profunditas $PQ=s$, et longitudo versus proram $PR=CK=p$. Ducto nunc ex V in plano diametrali perpendiculo VT, erit $CT=u$, et $TV=t$; quo facto in sectione RQS capiatur $PY:PR=CT:CA$ seu $PY=\frac{pu}{a}$, erit ob affinitatem $YZ:PQ=TV:CD$ seu $YZ=\frac{st}{c}$. Iam per Y ducta applicata

MYX

MYX dicantur $CX = x$; $XY = y$, et $YZ = z$ eritque $y = r = q$; $x = \frac{pu}{a}$ et $z = \frac{st}{c}$; ex quibus tandem haec iſtiusmodi figurarum proprietas eſſentialis deducitur, vt functio quaepiam ipſius y aequalis ſit functioni ipſarum x, y et z in qua variabiles x et z ſolae conſideratae vbique vnam dimenſionem conſtituant.

§. 67. Volumen denique huius figurae pariter ac praecedentium ex natura figurarum affinium determinabitur. Cum enim plani diametralis ADB area poſita ſit $= F$, erit area ſectionis RQS illi affinis $= \frac{Fps}{ac}$, atque ob p et s per q et r datas, et propter $y = r = q$, erunt p et s functiones eiusdem variabilis $y = CP$. Quamobrem $\frac{F}{ac}\int ps\,dy$ dabit ſoliditatem portionis ARQSB integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $y = o$. Quare ſi poſt integrationem ponatur $y = b$, prodibit ſoliditas ſemiſſis figurae propoſitae, ex quo totius figurae ſeu carinae propoſitae volumen erit $= \frac{2F}{ac}\int ps\,dy$, integratione debito modo peracta.

§. 68. Quoniam figurae ſimiles in figuris affinibus continentur harumque quaſi ſpeciem conſtituunt, ita tres poſteriores ſpecies in ſe priores comprehendunt; ex quo fit, vt quae figura ad ſpeciem primam pertinet, eadem quoque ſub ſpecie quarta contineatur; ſimilique modo ſecunda ſpecies ſub quinta, et tertia ſub ſexta ſit contenta. Hoc igitur modo tres adhuc ſimpliciores ſpecies conſtitui poſſunt, in quibus ſectiones vni principalium parallelae eidem non ſolum ſimiles ſed etiam aequales ſint, cuiusmodi figurae paſſim in minoribus nauigiis reperiuntur. Omnium autem ſimpliciſſima figura erit parallelepipedum, in qua nullae ſectiones curuilineae locum inueniunt; talem autem figuram arca Noae habuiſſe fertur.

§ 69. Quod ergo ad figuram carinae externam attinet, eius commodiſſime decem ſpecies ſtatuuntur; quarum etiam in ſequentibus rationem habebimus. Prima nimirum ſpecies conſtabit parallelepipedo; ſecunda eiusmodi figuris, quae habent omnes ſectiones horizontales inter ſe aequales et ſimiles. In figuris tertiae ſpeciei erunt omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae inter ſe ſimiles et aequales. Figurae autem quartae ſpeciei habebunt omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelas inter ſe ſimiles et aequales. Has deinde ſpecies ſequentur eae ſex, quas ante iam ſumus contemplati, quarum tres priores ex ſimilitudine ſectionum vni principalium parallelarum, poſteriores vero ex affinitate ſunt deſumtae. Quatuor autem ſpecies nunc demum ſuperadditae tractatu tam ſunt faciles, vt hic non ſit opus eas ad aequationes redigere earumque ſoliditatem determinare.

§. 70. Cum igitur in hoc libro nobis ſit propoſitum imprimis in conuenientiſſimam carinae figuram inquirere, ad quamque circumſtantiam, quae ad determinationem figurae nauium quicquam confert, ſingulas recenſitas decem ſpecies euoluemus, ac quo pacto requiſitis conditionibus maxime ſatisfiat, inueſtigabimus. Quodſi ergo hac methodo progrediamur facile intelligetur, quantum quaeque ſpecies capax ſit perfectionis, quibusque impedimentis ſit obnoxia: ex quibus omnibus coniunctio haud difficulter colligetur, ex quanam ſpecie optima nauium figura ſit deſumenda. In hac autem disquiſitione ad vſum, cui naues deſtinari ſolent, potiſſimum eſt reſpiciendum.

§. 71. Quoniam autem, ſi tres poſtremae ſpecies ſpectentur, tres figurae indeterminatae et arbitrariae ſcilicet tres ſectiones principales in calculum ingrediuntur, ne tractatio nimis ſit vaga, iuuabit has ſectiones aequationibus, ſatis late patentibus, includi, quae ita ſint comparatae, vt propemodum omnes figuras, quae in earum locum ſubſtitui poſſunt, ſub ſe comprehendant. Hinc enim id conſequemur commodi, vt pro his ſectionibus definitas habeamus aequationes, quae non ſolum facilius tractari poſſunt, quam prorſus indefinitae, ſed etiam ad determinationes recipiendas magis ſunt accommodatae: conuenit enim ſtatim omnes eas figuras excludi, quae ad ſtructuram ſunt inutiles, atque ad nauium formam formandam ineptae. Hoc vero ſubſidio tum ſolum vtemur, quando circumſtantiae non ita ſunt comparatae, vt figuram alicuius ſectionis omnimode determinent.

§. 72. Maneant igitur conſtanter a longitudo prorae α longitudo puppis, b ſemiſſis amplitudinis maximae, et c maxima altidudo carinae, atque conſideremus ſectionem aquae ſeorſim, quae ſit AEBF, eiusque diameter recta AB a prora A ad puppim B protenſa. Huius figurae Tab. IV.
ſit EF maxima latitudo, diuidens ſectionem aquae in duas fig. 1.
partes, quarum altera verſus proram altera verſus puppim eſt ſita. Quoniam autem ambae partes, ex vtraque diametri AB parte ſitae, ſunt inter ſe ſimiles et aequales, ſufficiet alteram medietatem determinaſſe. Hunc in finem poſita abſciſſa $CP = p$ et applicata $PQ = q$, aequatio inter p et q ita debebit eſſe comparata, vt generalibus quibusdam conditionibus, ad nauium conſtructionem et figuram determinandam neceſſariis, ſatisfaciat.

§. 73. Quoniam igitur eſt CA $= a$; CB $= \alpha$; CE $=$ CF $= b$, aequatio inter p et q ante omnia ita debet eſſe comparata, vt poſito $p = o$, fiat $q = b$: quare ſi P talis fuerit functio ipſius p, quae abeat in B, poſito $p = o$, debebit eſſe $q = \frac{bP}{B}$. Deinde niſi figura ſectionis aquae tum verſus proram tum verſus puppim ſit aperta, id quod quibusdam caſibus euenire poteſt, quos in hoc negotio non ſpectemus, aequatio inter p et q ita debet eſſe comparata, vt poſito vel $p = a$ vel $p = -\alpha$, euaneſcat q. His ambabus conditionibus ſatisfiet ſi pro aequatione, naturam ſectionis aquae exprimente, aſſumatur eiusmodi forma $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.})$ denotantibus m et n numeros nihilo maiores. Si enim eſſet vel $m = o$ vel $n = o$, tum ſectio aquae vel in prora vel in puppi non foret clauſa, ſed ad caſus modo commemoratos pertineret, ad quos ergo haec aequatio etſi eos excluſimus, tamen eſt accommodata.

§. 74. Praeterea maxime requiritur vt curuae huius tangens in puncto E ſit axi AB parallela, primo enim in praxi anguli ad latera nauis tolerari non ſolent; deinde vero hoc ipſo, quod applicata CE omnium maxima eſſe debet, neceſſe eſt, vt tangens ad E ſit axi AB parallela. Huic conditioni vt ſatisfiat, oportet vt q nullum incrementum decrementumue capiat, ſi loco $p = o$ ponatur p infinite paruum. Impleta autem hac conditione reperietur eſſe debere $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, reliquae vero coefficientes adhuc manent indeterminatae, vnde ampliſſima habetur aequatio pro omnis generis ſectionibus aquae ad praxin idoneis, quae erit haec $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \frac{(m\alpha - na)}{a\alpha} p + \eta p^2 + \theta p^3 + \iota p^4 + \text{etc.})$

§. 75.

§. 75. Quoniam porro naues per satis notabile intervallum eandem fere latitudinem conseruare solent, curvatura in puncto E vehementer exigua esse debet, insuperque radium curuedinis in E versus axem AB directum, seu curuam in E concauam versus hanc regionem esse oportet. Fit autem posito p infinite paruo $q = b\left(1 - \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2 - 2a^2\alpha^2\eta}{2a^2\alpha^2}\right)p^2$ curua ergo in E concaua erit versus axem AB si fuerit $\eta < \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$. At si fuerit $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$ tum curuatura in E penitus euanescet, atque curua hoc loco cum linea recta confundetur, quae conditio ad plerasque naues perquam idonea videtur.

§. 76. Si ergo ponatur $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, atque $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2} - \frac{\gamma}{a\alpha}$, denotante γ quantitatem affirmatiuam, aequatio $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m\alpha^n}(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + i p^4 +$ etc. praebebit figuram conuenientem pro sectione aquae cuius curuatura in E eo erit minor, quo minor fuerit quantitas γ, atque si γ omnino euanescat, fiet radius curuedinis in E infinitus. Vt autem applicatae q crescentibus abscissis p continuo decrescant, oportet coefficientibus θ et i etc. idoneos tribui valores; nam σ et η hoc modo determinata iam praebent differentialia ipsius q negatiua. Hoc vero satis tuto obtinebitur, si curua in punctis A et B in axem incidat.

§. 77. Si exponentes m et n fuerint nihilo maiores, tum curua in vtroque puncto A et B cum axe concurrit: at per exponentes m et n effici potest, vt concursus curvae cum axe in punctis A et B fiat datus. Scilicet si

$m < 1$

$m < 1$ tum angulus QAP erit rectus, tangens autem in A in ipſum axem incidet, ſi fuerit $m > 1$: at angulus QAP euadet acutus vel obtuſus ſi $m = 1$. vt autem hic angulus ſit acutus inſuper oportet eſſe $1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.} > 0$ poſito $p = a$, quod quidem ſponte patet, alias applicata q fieret alicubi negatiua. Simili modo poſito $p = -\alpha$ debet eſſe $1 - \varsigma\alpha + \eta\alpha^2 - \theta\alpha^3 + \text{etc.} > 0$. angulus vero ad B pendebit ab exponente n, qui ſi fuerit vnitate maior, euaneſcet angulus EBC, rectus autem erit ſi $n < 1$, at acutus ſi $n = 1$.

§. 78. Neque vero abſolute eſt neceſſarium, vt partes AE et BE vnam eandemque curuam continuam conſtituant, ſed ad vſum practicum ſufficit, ſi ambae hae partes in E ita conueniant, vt ibi communem habeant tangentem axi AB parallelam. Praeſtabit autem hoc modo ſectionem aquae concipere, cum inuentio areae et centri grauitatis multo fiat facilior atque adeo algebraice expediri queat. Conſideremus itaque primo portionem prorae ACE cuius abſciſſa CP poſita $= p$ et applicata PQ $= q$, iſta aequatio $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m}\left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)}{2a^2}p^2 + \frac{\sigma p^3}{a^3} + \frac{\eta p^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$ conditionibus ſupra allatis ſatisfaciet, ſi quidem γ ſignificet numerum affirmatiuum.

§. 79. Simili modo ſi pro parte poſteriore BCE ponatur abſciſſa $Cp = p$ et applicata $pq = q$, ſequens aequatio conditionibus memoratis maxime ſatisfaciet $q = \frac{b(\alpha-p)^n}{\alpha^n}\left(1 + \frac{np}{\alpha} + \frac{(n(n+1)-\delta)}{2\alpha^2}p^2 + \frac{\theta p^3}{\alpha^3} + \frac{ip^4}{\alpha^4} + \text{etc.}\right)$. Ambae enim iſtae curuae non ſolum conuenient in puncto E, ſed etiam hoc loco tangentem habebunt communem axi AB parallelam. Praeterea vero hae curuae in A et B

cum

cum axe conuenient, si quidem exponentes m et n fuerint nihilo maiores. Denique hae aequationes, etiamsi innumerabiles termini adiici possint, tamen satis late patere videntur, si tantum termini vsque ad potestatem tertiam retineantur, reliqui vero reiiciantur, cum coefficientes duo γ, et σ item δ et θ abunde sufficiant, ad omnis generis curuas comprehendendas.

§. 80. Vt autem integrationes, quae tam ad aream quam centrum grauitatis inueniendum institui debent, facilius absoluantur, ponamus istam aequationem latissime patentem $y = (a-x)^m \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \frac{Ex^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$, pro qua quaeratur valor ipsius $\int y\,dx$, si post integrationem ponatur $x = a$; reperietur autem calculo finito $\int y\,dx = a^{m+1} \left(\frac{A}{m+1} + \frac{1B}{(m+1)(m+2)} + \frac{1 \cdot 2C}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \right.$ etc. vel generatim post integrationem posito $x = a$ erit $\int (a-x)^m dx \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \text{etc.}\right) = \frac{a^{m+1}}{m+1} \left(A + \frac{1B}{m+2} + \frac{1 \cdot 2\,C}{(m+2)(m+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3\,D}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{etc.}\right)$ quae integratio generalis in praesentibus integrationibus ingentem praestabit vtilitatem.

§. 81. Quodsi nunc hac regula vtamur ad aream sectionis aquae propositae AEB inueniendam, reperietur primo area $ACE = \frac{ah}{m+1} \left(1 + \frac{m}{m+2} + \frac{m(m+1)-\gamma}{(m+2)(m+3)} + \frac{6\sigma}{(m+2)(m+3)(m+4)}\right)$, existente aequatione pro portione ACE, $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)p^2}{2a^2} + \frac{\sigma p^3}{a^3}\right)$. Pro parte autem posteriore BCE, si fuerit aequatio $q = \frac{b(a-p)^n}{a^n} \left(1 + \frac{np}{a} + \frac{(n(n+1)-\delta)p^2}{2a^2} + \frac{\theta p^3}{a^3}\right)$ erit area $BCE = \frac{ab}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n+2} + \frac{n(n+1)-\delta}{(n+2)(n+3)} + \frac{6\theta}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)$, quarum

rum expressionum summa bis sumta dabit aream totius sectionis aquae AEBF.

§. 82. Contemplemur nunc sectionem amplissimam Tab. IV. fig. 2. EDF, cuius latitudo in superficie aquae est $EF = 2b$, et profunditas $CD = c$; constat autem haec sectio ex duabus partibus ECD et FCD inter se aequalibus et similibus; quare alteram medietatem determinasse sufficiet. Si ergo pro semisse ECD ponatur abscissa $CR = r$, et applicata $RS = s$, aequatio inter r et s ita debet esse comparata, vt posito $r = 0$, fiat $s = c$, atque vt quo maior capiatur abscissa r applicatae s continuo decrescant, donec tandem si fiat $r = CE = b$, applicata s euanescat, siquidem curuatura a D vsque ad E fuerit continua. Interim tamen aequatio generalis inter r et s ita concinnari potest, vt etiam pro iis casibus, quibus curua non est continua, valeat; quod euenit si spatium quodpiam linea recta claudatur.

§. 83. His duabus commemoratis conditionibus satis fiet, si pro curua ESD ista accipiatur aequatio $s = \frac{c(b-r)^{\varkappa}}{b^{\varkappa}}\left(1 + \frac{\beta r}{b} + \frac{\varepsilon r^2}{b^2} + \frac{i r^3}{b^3} + \text{etc.}\right)$ cuius seriei sufficit quatuor priores terminos hic exhibitos assumere. Si enim sit exponens $\varkappa$ affirmatiuus, negatiuus enim nullo modo esse potest; posito $r = 0$ fit $s = c$, facto autem $r = b$, prodit $s = 0$. At si $\varkappa = 0$ aequatio ad eos casus accommodata erit, quibus sectio haec ad E linea recta verticali terminatur, vti si haec sectio fuerit parallelogrammum rectangulum. Sin r capiatur infinite paruum, prodit $s = c\left(1 - \frac{(\varkappa-\beta)r}{b} + \frac{(\varkappa^2 - \varkappa - 2\beta\varkappa + 2\varepsilon)r^2}{2b^2}\right)$ quae ergo expressio maior esse non debet quam c, quoniam CD est maxima applicata.

§. 84. Niſi ergo ſit $\beta = \varkappa$, quo caſu tangens ad D fiet horizontalis, atque angulus CDE rectus, oportet eſſe $\beta < \varkappa$; atque a defectu $\varkappa - \beta$ pendebit quantitas anguli CDE, ita vt per coefficientem β angulus CDE ad arbitrium formari poſſit, erit enim anguli CDE tangens $= \frac{b}{(\varkappa-\beta)c}$. At ſi angulus hic CDE capiatur rectus, quo caſu erit $\beta = \varkappa$, neceſſe eſt vt ſit $\varkappa(\varkappa+1) - 2\varepsilon > 0$, quo curuatura ad D fiat concaua verſus ſuperficiem aquae EF. Quod denique ad angulum, quem curua in E cum axe CE conficit, attinet, is erit rectus ſi fuerit $\varkappa < 1$, nullus ſi $\varkappa > 1$ at arbitrariam quantitatem habebit, ſi ſumatur $\varkappa = 1$. Ceterum area huius ſectionis ampliſſimae ex aſſumta aequatione algebraice poterit definiri.

§. 85. Quae ante de figura ſectionis aquae monuimus, eadem locum habent in plano diametrali ADB; haec enim figura ita quoque eſſe debet comparata, vt poſitis coordinatis $CV = u$ et $VT = t$, fiat $t = CD = c$ facto $u = 0$; atque vt curua in punctis A et B in axem AB incidat. Hanc ob rem vel vna curua continua pro ſectione ADB poterit aſſumi, vel duae diuerſae, quae in D concurrant, ibique tangentem habeant communem horizontalem. Quo circa pro portione CDA accipi poterit haec aequatio $t = \frac{c(a-u)^{\mu}}{a^{\mu}}\left(1 + \frac{\mu u}{a} + \frac{(\mu(\mu+1)-g)u^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{a^3}\right)$ pro parte autem poſteriore exiſtente $Cv = u$ et $vt = t$, haec aequatio $t = \frac{c(\alpha-u)^{\nu}}{\alpha^{\nu}}\left(1 + \frac{\nu u}{\alpha} + \frac{(\nu(\nu+\cdot)-d)u^2}{2\alpha^2} + \frac{hu^3}{\alpha^3}\right)$, de quibus aequationibus eadem omnino ſunt tenenda, quae ſupra de ſectione aquae annotauimus. Tab. IV. fig. 3.

§. 86. Cum in hoc capite conſtituiſſem naues in genere contemplari, atque omnes varietates, quae quidem in nauibus locum habere poſſunt, perpendere, vt mox intelligatur, quibusnam rebus determinandis nauibus ſumma perfectio inducatur; conueniebat praecipuas nauium diuiſiones commemorari. Primam itaque diſtinctionem deſumſi ex quantitate vel pondere nauium, qua eae ſecundum onera, quibus gerendis pares ſunt, diſtingui ſolent. Secunda diuiſio petita eſt a figura partis aquae immerſae ſeu carinae, huiusque varietates, quamuis ſint innumerabiles, ad decem ſpecies reuocaui, in quibus omnes omnino nauium formae, quaecunque excogitari queunt, comprehendi poſſe videntur. Reliquum igitur eſt, vt ad ceteras varietates nauium attendamus, quae cum ex vſu tum ex modo eas mouendi originem trahunt.

§. 87. Quod quidem ad vſum, cui naues deſtinari ſolent, ſpectat, ingens deprehenditur diſcrimen; aliae enim naues ad onera vehenda, aliae ad homines ſunt accommodatae, aliae autem ad bellum gerendum, quae bellicae vocantur, ſunt inſtructae, cuius diuerſitatis vtique in conſtructione nauium ratio haberi debet, vt aptae reddantur ad ſcopum intentum conſequendum. Sed haec varietas ad noſtrum inſtitutum non admodum pertinet, cum hic non tam ad nauium ſtructuram internam, quam externam reſpiciamus, a qua potiſſimum curſus et gubernatio pendet. Interim tamen hanc diſtinctionem notaſſe iuuat, cum a varietate onerationis non ſolum locus centri grauitatis, ſed etiam momenta nauium afficiantur, quarum rerum cognitio maxime eſt neceſſaria.

§. 88. Vltimam ac principalem fere nauium diuiſionem ſuppeditat varietas virium, quibus naues in aqua propelli

pelli ſolent. Cum enim naues non ideo fabricari ſoleant, vt in aqua quieſcant, ſed vt de loco in locum promoueantur, viribus ad hoc eſt opus quibuscunque, quarum ingens datur multiplicitas. Aliae enim naues a curſu fluminis abripiuntur, aliae vel a hominibus vel pecudibus ad ripam protrahuntur, aliae remis propelli ſolent, aliae denique ope venti in vela irruentis promouentur. Ac praeter has vires complures aliae excogitari atque in vſum transferri poſſent. Praecipue autem a nobis notari merentur duo tantum virium genera cum a remis tum a vento petita, non ſolum quod haec maxime ſunt in vſu, ſed etiam quod nauium conſtructio ad ea potiſſimum ſit accommodanda.

§. 89. Cum igitur, quae ad ſitum nauium aequilibrium atque ad firmitatem itemque ad reſiſtentiam attinent, et quae praeterea res omnibus nauibus ſunt communes expoſuero, reliqua tractatio erit bipartita, quarum altera circa naues remis propulſas, altera autem circa eas, quae vento promouentur, erit occupata. Neque vero hinc reliquae vires, quae ad naues propellendas adhiberi poſſunt, prorſus excluduntur, ſed quo quaeque vis cum altera harum duarum maiorem habebit affinitatem, ex iis, quae tradentur colligere licebit, quaenam ſtructura, quaeque gubernandi ratio ad eiusmodi naues maxime ſit idonea. Deinde quoque ſi naues coniunctim remis et vento promoueantur, iudicare licebit, quomodo iſtius modi naues comparatas eſſe oporteat. Earum ſcilicet ſtructura medium tenere debebit, inter eam, quae remis conuenit, atque inter eam, quam vela requirunt: eoque magis ad alteram rationem accedere debebit, quo magis altera vis alteri praevalebit; qua de re iudicium ex vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, erit petendum.

§. 90. Antequam autem, quae ſtructura nauibus remis propellendis conueniat, inueſtigari queat, effectus, qui ab actione remorum proficiſcitur, determinari debet: quae inquiſitio, cum a nemine adhuc ſatis ſit euoluta, diligentius ex principiis motus erit pertractanda. Eo igitur loco non ſolum erit definiendum, quantum remi ad nauem propellendam efficiant, ſi data vi agitentur, ſed etiam, quod praecipuum eſt, forma remorum maxime idonea et virium remigum applicatio maxime lucroſa determinari debebit. Plurimum enim in hoc negotio intereſt, effectum per easdem vires maximum lucrari, ne remigum numerus praeter neceſſitatem nimium ſit multiplicandus, quae cautio, ſi ventus adhibeatur, non tantopere eſt attendenda, cum vis a vento excipienda ſine ingentibus ſumtibus multiplicari queat, remigum numerus autem non item.

§. 91. Cum ergo in nauibus, quae remis ſunt inſtruendae, potiſſimum requiratur, vt eiusdem vis ope maximus effectus obtineatur, ſtructura nauium in hunc finem aptiſſima definiri debet. Reſiſtentia igitur, quam naues in aqua progredientia patiuntur, quantum fieri poteſt, diminui debebit, cum reſiſtentia aquae ſolum ſit obſtaculum, quod viribus promouentibus eſt ſuperandum. Quo circa pro huius generis nauibus diligentiſſime in eam nauium figuram erit inquirendum, quae in aqua promota minimam perpetiatur reſiſtentiam. Atque in hoc negotio ad ſolum curſum directum reſpici oportet, cum nulla ſit ratio, ob quam nauis vnquam ad curſum obliquum dirigatur: remorum enim ratio ad omnes plagas aequaliter eſt comparata.

§. 92.

§. 92. Longe aliter res ſe habet in nauibus, quae a vi venti ad motum cientur, quoniam enim mali et vela citra notabiles ſumtus pro lubitu augeri poſſunt, non tantam curam ad vim diminuendam adhiberi conuenit. Quin potius in hoc eſt incumbendum, vt naues maximam vim ſuſtinere queant: hunc enim naues plerumque habere ſolent defectum, vt vi, quae a vento excipitur, nimium acuta, ſitum erectum retinere nequeant, ſed ſubuerſioni ſint obnoxiae. Quocirca non ſolum idonea velorum applicatio, ſed etiam aptiſſima nauium forma erit inveſtiganda, quae a venti vi quantumuis magna minimam inclinationem producat; hocque pacto plures nauium defectus maximi momenti tollentur.

§. 93. Priusquam autem hoc examen ſuſcipiatur, vis venti generatim atque effectus quem in vela expanſa vtcunque impingens exerit, conſiderari debent; quo loco ſi vela non ſint maxime extenſa, curuatura, quam ventus velis inducit, erit determinanda, quoniam ſine ea media directio vis venti in vela exerta cognoſci nequit. Definita autem cum quantitate tum directione virium a vento exceptarum, inueſtigari oportebit, non ſolum quantum motus progreſſiuus augeatur, ſed etiam quanta nauis inclinatio inde oriatur. Hoc enim cognito diſpicere licebit, quomodo inclinatio vel omnino impediatur, vel quantum fieri poteſt diminuatur; quo in negotio primo firmitas maxime erit ſpectanda, tum vero etiam reſiſtentia, quippe quae ita poteſt eſſe comparata, vt niſu contrario vim ſubuerſionem adeo minantem penitus deſtruere poſſit.

§. 94. Ex his iam ſatis liquet, in conſtructione nauium velis inſtruendarum non tam ad minimam reſiſtentiam eſſe reſpiciendum quam ad firmitatem, qua omni inclinationi reluctatur. Parum enim lucri accederet, ſi quidem nauis minimam pateretur reſiſtentiam, ſimul vero eſſet tam debilis, vt vim venti ſuſtinere non poſſet. Interim tamen dubium non eſt, quin, ſi ſimul et ſumma reſiſtentiae diminutio, et maxima firmitas obtineri poſſent, id plurimam ſit allaturum vtilitatem, ſed plerumque hae conditiones, ita ſolent eſſe comparatae, vt ſi vni ſatis fiat, alteri detrahatnr: accedent autem praeter reſiſtentiam et firmitatem plures aliae circumſtantiae, quarum ratio quoque eſt habenda, vnde adhuc maior colliſio regularum naſcitur: de quibus ſuo loco fuſius explicabitur.

§. 95. In nauibus autem huius generis motus ſeu curſus obliquus maxime habet locum, qui inſtituitur, ſi directio venti nimis a curſu deſtinato diſcrepat, vt curſui directo nullus relinquatur locus. Hanc ob cauſam operam adhiberi oportet, vt quantum fieri poteſt, curſus contra directionem venti dirigi queat, quo in negotio praeter diſpoſitionem velorum figura carinae plurimum valet. Atque ideo multo magis eſt efficiendum, vt naues ope curſus obliqui aduerſus ventum moueri poſſint, quam vt reſiſtentia in curſu directo diminuatur. Ex hisque abunde intelligitur, quantum ratione ſtructurae tantum interſit inter naues, quae remis, easque, quae vento propelluntur, adeo vt haec diſtinctio maxime ſit neceſſaria, ad hanc tractationem abſoluendam.

Cap.