# Caput XI.
# DE CVRSV NAVIVM OBLIQVO.

§. 896.

In capite praecedente vidimus, quemadmodum cum malos conſtitui, tum proram inſtrui oporteat, vt nauis curſum directum tenens ſine periculo quam celerrime progredi queat. Quoniam vero curſum directum tenere non licet, niſi venti directio congruat, ventus autem non ab arbitrio noſtro pendet in nauibus vento propellendis imprimis ad curſum obliquum erit attendendum, vt quicunque fuerit ventus, nauis maxime curſum propoſitum ſequatur. In ſuperiori quidem libro figuram nauium ad curſum obliquum inſtituendum aptiſſimam inueſtigauimus, vt deuiatio a curſu propoſito eſſet minima. Hoc igitur loco tantum ſupereſt, vt in conſtitutionem malorum ad hunc ſcopum maxime accommodatam inquiramus, quo nauis ſine periculo cum maxima celeritate ac minima deuiatione ſecundum directionem axis longitudinalis progrediatur. Hic autem vt in curſu directo nouae ſeſe manifeſtabunt regulae, quas in conformatione prorae atque totius nauis obſeruare conueniet, quibus conſtructio nauium magis perficietur.

§. 897. Quemadmodum curſus directus abſoluitur, cum media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali eſt parallela, quod euenit ſi vela ita extendantur, vt iſte axis ad eorum ſuperficiem ſit normalis, ita nauis curſu obliquo feretur, ſi media directio vis a vento exceptae cum axe longitudinali angulum conſtituat obliquum. His ergo caſibus nauis non in directione vis venti promoueri poterit, propter resistentiam aquae, cuius directio aequalis atque contraria vi propellenti esse non potest. Sequetur ergo nauis in cursu obliquo directionem quandam mediam inter ipsam suam directionem seu axem longitudinalem et inter directionem vis propellentis, angulus autem, quem directio cursus cum axe nauis longitudinali constituit, deuiatio seu declinatio cursus vocatur. Pendet autem haec cursus declinatio potissimum a figura nauis atque eo minor existit, quo magis nauis longitudo latitudinem superauerit. Cum igitur deuiatio quam minima desideretur, ad cursum obliquum imprimis requiritur, vt longitudo nauium quantum fieri queat, prae latitudine augeatur, cuius quidem rei ratio iam supra vberius est exposita.

§. 898. Quanquam varietas inclinationis superficiei velorum ad axem longitudinalem nauis potest esse infinita in praxi tamen ad duos fere casus reduci solet. Designet enim AB nauem seu eius axem longitudinalem, sitque A prora et B puppis. Ac primo quidem si vela in situm EF ad AB normalem disponantur, nauis cursu directo promouebitur, vti vidimus, hocque casu nauis pleno vento vehi dicitur. Deinde si vela in situm $ef$ expandantur, vt angulus $e$CA fiat circiter semirectus, cursus nascetur obliquus prioris speciei, qui cum vento dimidio instituti dicitur, propterea quod haec velorum dispositio ad eum potissimum ventum est accommodata, qui in directione EC ad nauem AB normali venit. Sin autem ventus in directione $e$C irruat, vela in situm $\varepsilon\sigma$ extenduntur, ita vt angulus $\varepsilon$ C A quasi quartam partem recti seu $22\frac{1}{2}^{\circ}$ adaequet; qui cursus propterea aduersus ventum institui dicitur. Sunt adeo duae cursus Tab. XXVI. fig. 4.

 obli-

obliqui ſpecies, quarum altera ad ventum dimidium, altera ad ventum contrarium eſt accommodata.

§. 899. Scilicet cum ventus vel a puppi B venit, vel non vltra 60 aut $56\frac{1}{4}$ gradus, qui angulus 5 rhumbos facit, diſcedit, curſus directus tenetur; hoc eſt ſumto in circulo centro C deſcripto, arcu $BM = 56\frac{1}{4}°$, ſi venti directio intra B et M cadat, vela ad ſitum EF diſponuntur. Sin autem ventus ex plaga MEN iterum quinque rhumbos ſeu angulum $56\frac{1}{4}°$ continente veniat, ita vt ſit EN $22\frac{1}{2}°$, dimidio vento nauis propelli cenſetur, atque vela in ſitum $eCf$ diriguntur. Sin autem directio venti vltra N verſus A nempe in ſpatium N$e$ duos rhumbos continens incidat, curſus nauis contra ventum inſtitui dicitur ac vela in ſitum $\varepsilon C \sigma$ diſponuntur. Quodſi vero ventus ex plaga $e$A veniat, tum nullam memoratorum curſuum tenere licebit, his ergo caſibus ipſa nauis directio AB ita ad $a$ declinatur, vt curſum tertium aduerſus ventum tenere liceat; nauis ergo non ſecundum directionem propoſitam BA procedet, verum tamen, dum alternatim ad dextram ac ſiniſtram deflectitur in regionem propoſitam appropinquabit.

§. 900. Quamuis autem theoria pro quauis venti directione velorum diſpoſitionem aptiſſimam monſtret, tamen in praxi haec infinita varietas non commode obſeruari poteſt, propterea quod nautae theoriae expertes non ita ad lubitum inſtrui poſſunt, vt vela ad praeceptam obliquitatem accurate diſponant. In horum igitur gratiam expedit aliquot velorum diſpoſitiones tantum relictis reliquis ad vſum adhibere, atque pro vna quaque ipſis certas notas monſtrare, quas ſequentes vela vel ad plenum ventum

tum vel ad dimidium vel ad contrarium inſtar machinarum diſponere poſſint. Hoc modo etiam gubernator facilius curſus deuiationem aeſtimabit, cum duplicem tantum curſum obliquum habeat diiudicandum; ſi enim ipſi pro vtroque ſemel innotuerit, quanta ſit deuiatio, haec breuis cognitio ſufficiet ad curſum aeſtimandum. Etſi autem vndarum motus et impetus deuiationem non mediocriter immutare ſolet, tamen non tam facile in iudicio ſuo falletur, quam ſi infinita velorum obliquitas ipſi inſuper eſſet perpendenda.

§. 901. Quod nunc primum ad numerum locumque malorum attinet, quoniam in his rebus nullam mutationem, quoties curſus obliquus inſtituitur, ſuſcipere licet, tam numero quam loco malorum eodem vti oportet, qui ſemel fuerit conſtitutus. Quamuis enim alium requireret malorum cum numerum tum locum curſus directus, alium vero obliquus, tamen ob immutabilitatem, malorum vtrique ſatisfieri non poſſet; ſed contentos non eſſe oportebit malos ita conſtituiſſe, vt cum ad neutrum curſum ſint perfecte accommodati, tamen in vtroque quam fieri poteſt maximum effectum praeſtent. Poterit interim cum velorum latitudo augeri diminuiue, tum in aliis locis praeter malos vela expandi, ſicque eadem mutatio, quae per malorum tranſpoſitionem intendi poſſet, obtineri, cuiusmodi adminicula ſaepenumero in ſubſidium vocari ſolent; verum antequam huiusmodi adminicula diiudicare liceat, examinari conueniet, quantum iam ante conſtitutus malorum cum locus tum numerus motui obliquo faueat vel obſtet.

Tab. XXVI. fig. 5. §. 902. Pro curſu autem directo malorum loca ex velorum latitudine ita determinauimus, vt ſi directio venti a puppi 60 declinet, tum ventus in omnia vela irruat. Sint igitur D et L loca duorum malorum contiguorum, ac velorum ad illum expanſorum latitudo ſit EF $= 2a$, ad hunc vero ſit MN $= 2b$; interuallum autem malorum ſit DL $= c$. Quoniam igitur haec vela EF et MN ad curſum directum ſunt extenſa, erit ducta recta EN angulus BOE $= 60°$; ideoque $\frac{a+b}{c} = \sqrt{3}$ ſeu $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$. Si ergo ventus flet in directione EON, tum omnia vela inflabuntur, atque adeo curſus directus bono cum ſucceſſu inſtituetur; ſin autem venti directio magis a puppi B declinet, angulusque BOE maior 60° fiat, tum quidem niſi ad 90° aſcendat, ſingula vela EF et MN tota perſtringet, ſed nimis oblique, atque etiam portio venti inutiliter inter vela tranſibit. Quamobrem expediet velis poſitionem quandam obliquam $ef$ et $mn$ tribuere, quo cum ventus magis directe in ea incurrat: tum etiam nulla eius pars inutiliter pereat.

§. 903. Ponamus vela in ſitum $ef$ et $mn$ ita extendi vt ſit anguli AD$e$ ſeu AL$m$ ſinus $= m$, coſinus $= n$. Ducatur recta $en$, atque manifeſtum eſt, ſi ventus in directione hac $en$ veniat, vtrumque velum totum a vento impulſum iri; ſin autem venti obliquitas fuerit minor angulo BO$e$, tum partem tantum veli $mn$ incitari, at ſi obliquitas venti maior fuerit angulo BO$e$ tum quidem ventum totum velum $mn$ perſtringere, at aliquam venti portionem a velis non exceptam perire. Determinemus ergo ex angulo $e$DA ſeu $m$LA aſſumto angulum BO$e$, quo pateat ad quemnam ventum haec velorum diſpoſitio

ſit

ſit maxime accommodata. Dubium enim eſt nullum quin ventus in hac directione veniens maximam vim exerat; namque perſpicuum eſt, ſi obliquitas venti eſſet maior eius vim ob minorem angulum incidentiae minorem eſſe futuram; ſin autem obliquitas venti eſſet minor tum maior quidem foret angulus incidentiae, at ſimul non totum velum $mn$ perſtringeretur, quo ipſo vis minor euadat neceſſe eſt.

§. 904. Ex L in velum $ef$ demittatur normalis LK, ob anguli LDK ſinum $= m$, coſinum $= n$, et $DL = c$; erit $LK = mc$ et $DK = nc$. Deinde ex $e$ ad $mn$ normalis ducatur $ek$ erit $Lk = Ke = a - nc$, et $ek = LK = mc$, ideoque fiet $nk = a + b - nc$. Hinc anguli $enk$ erit tang. $= \frac{ek}{nk} = \frac{mc}{a+b-nc}$; quo angulo $enk$ inuento erit angulus $BOe = 180° - enk - BLn$. Cum igitur ſit tang. $enk = \frac{mc}{a+b-nc}$; et tang. $BLn = \frac{m}{n}$ erit tang. $(enk + BLn) = \frac{m(a+b)}{n(a+b)-c}$ ob $mm + nn = 1$; ideoque tang. $BOe = \frac{m(a+b)}{c-n(a+b)}$. Supra autem vidimus eſſe $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$ ex quo habetur tang. $BOe = \frac{m\sqrt{3}}{1-n\sqrt{3}}$. Cum igitur latitudo velorum ex calculo egrediatur, manifeſtum eſt ex ſolo angulo inclinationis velorum $ADe$, definiri directionem venti $eOn$ ſeu angulum $BOe$, cui haec velorum diſpoſitio maxime conueniat; in quae ergo ventus incidet ſub angulo $enk$, cuius tangens eſt $= \frac{mc}{a+b-nc} = \frac{m}{\sqrt{3}-n}$; et ſinus $= \frac{m}{\sqrt{(4-2n\sqrt{3})}}$.

§. 905. Haec ita ſe habent, ſi ponamus malos ita conſtitui vt vento a puppi ad 60° vsque declinante adhuc curſus directus teneri debeat; quoniam vero a nauigantibus anguli non per gradus ſed per rhumbos, quorum vnus 11° 15′′ continet, menſurari ſolent, angulusque 60° nimis magnus videtur, expediet pro eo angulum 5 rhumborum ſeu 56° 15′ aſſumi, vel quia hic angulus non commode per ſinus et tangentes repraeſentari poteſt, in eius locum ſubſtituamus angulum 54° 44′ cuius tangens eſt $= \sqrt{2}$ ita vt ſit $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Vbique ergo $\sqrt{2}$ loco $\sqrt{3}$ ſubſtituto, ſi anguli AD*e* ſeu AL*m* quem vela cum axe conſtituunt, ſinus ſit $= m$, et coſ. $= n$; erit obliquitas venti ſeu anguli BO*e* tangens $= \frac{m\sqrt{2}}{1 - n\sqrt{2}}$. Hinc ſi fuerit angulus BO*e* rectus, ſeu ſi venti directio cum directione nauis faciat angulum rectum, erit $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque hoc caſu vela ita commodiſſime diſponentur, vt cum directione nauis AB angulum ſemirectum conſtituant, ſicque curſus obliquus cum vento dimidio talis accurate inſtituetur, qualem ſupra deſcripſimus.

§. 906. Quo autem hinc facilius intelligatur, quaenam velorum diſpoſitio ad quamlibet venti obliquitatem ſit maxime accommodata, tabellam ſupputari conueniet, quae pro quauis velorum obliquitate ſeu angulo AD*e* directionem venti ſeu angulum BO*e* vna cum angulo incidentiae venti in vela exhibeat, cuiusmodi tabellam ad denos gradus conſtruxiſſe ſufficiet.

Ang.

| Ang. ADe quem vela cum longitudine nauis AB faciunt | Ang. BOe quem directio venti cum BA constituit | Ang. enm sub quo ventus in vela incidit. |
|---|---|---|
| 90° | 54°, 44′ | 35°, 16′ |
| 80 | 61°, 33′ | 38, 27 |
| 70 | 68, 46 | 41, 14 |
| 60 | 76, 33 | 43, 27 |
| 50 | 85, 12 | 44, 48 |
| 45 | 90, 0 | 45, 0 |
| 40 | 95, 15 | 44, 45 |
| 30 | 107, 38 | 42, 22 |
| 20 | 124, 13 | 35, 47 |
| 10 | 147, 59 | 22, 1 |

vbi eiusmodi malorum constitutionem assumsimus, vt esset $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

§. 907. Ex hac tabula patet in cursu obliquo, siquidem ventus omnia vela per totam superficiem stringat, maximum incidentiae angulum esse 45°; qui locum habet si directio venti ad nauis directionem AB fuerit normalis, atque vela ad angulum semirectum AD*e* extendantur. Hoc ergo casu vis venti in vela erit maxima, nauisque celerrime promouebitur, nisi quatenus eius motus ob cursus obliquitatem retardatur. Eo maius autem hoc erit lucrum quo pluribus malis nauis fuerit instructa; atque adeo fieri potest vt nauis pluribus malis instructa a vento dimidio seu ad AB normali celerius propellatur, quam a vento pleno, qui a puppi spirat; quia hic tantum in vela postrema incurrit, ille autem ventus lateralis omnia

omnia prorſus vela idque ſub maximo angulo 45°, quem obliquitas permittit, perſtringit, cuius quidem venti commodum nautis ſatis eſt notum.

Tab. XXVI. fig. 6. §. 908. Ad haec explicanda incipiamus a curſu maxime obliquo, quo vela ita diſponi ſolent, vt cum axe nauis AB angulum EDA ſeu $edA = 22°, 30'$ conſtituant. Plerumque enim hunc angulum minorem accipere non licet, quia obliquitas hincque deuiatio nauis fieret tanta, vt curſus potius impediretur quam promoueretur. Per praecedentem ergo regulam iſta velorum diſpoſitio maxime erit accommodata ad venti directionem VE$f$, quae cum axe AB angulum faciat $BOV = 119°, 32'$, ſeu $VOA = 60°, 28'$, eritque angulus incidentiae $Vfe = 37°, 58'$. Viciſſim autem ſi angulus VOA fuerit $60°, 28'$, a ſtructura nauis maxime pendet vtrum expediat angulum $edA = 22°, 30'$ relinqui an maiorem accipi; ſi enim maior accipiatur, angulus incidentiae quidem $Vfe$ ac proinde vis propellens diminueretur quidem contra autem obliquitas curſus fieret minor, quo ipſo prius detrimentum compenſari poſſet. Minor autem angulus $edA$ ſtatui prorſus nequit, quia tum et obliquitas augeretur, et ventus non amplius totam velorum ſuperficiem inflaret.

§. 909 Si ergo ventus magis oblique in vela hoc modo extenſa incidat, quoniam velorum obliquitatem augere non licet, venti quaedam portio peribit; et cum inſuper angulus incidentiae diminuatur, vis propellens ſine dubio vehementer diminuetur; ſaepenumero autem vrgente neceſſitate, quando ventus curſui eſt contrarius, angulus $Vfe$ ad $22°, 30'$ diminui ſolet. Quo igitur iſta

vis

vis propellentis diminutio compenſetur, velorum latitudo commode augeri poterit, vtrinque appendices adiungendo. Quanquam enim latitudo velorum EF, *ef* latitudinem navis ſuperat, tamen in iſto ſitu obliquo tota intra parietes nauis cadent, ex quo maior latitudo tractationem non impediet; hoc itaque modo venti portio alias peritura intercipietur, atque ad vſum impendetur. Poſſunt etiam in idoneis nauis locis noua vela extendi, quo magis vis a vento excipienda augeatur: hocque omnino fieri ſolet ſi ventus ſpiret lenior, ſin autem fuerit vehemens eiusmodi ſubſidia omitti debent, ne nauis a tanta vi obliqua nimiam patiatur inclinationem.

§. 910. Quamdiu ergo venti directio ita eſt comparata vt angulus VOA non fiat maior quam 60°, 28′, vela in ſtatu deſcripto maxime obliquo ſeruare conueniet, quando vero angulus VOA excedet 60°, 28′ tum iſta velorum diſpoſitio non commode retineri poterit. Quamvis enim angulus incidentiae augeatur, tamen ventus non amplius totam velorum ſuperficiem perſtringet, ex quo vis venti eo magis diminuetur, quo plures mali in naui fuerint conſtituti. Tum vero ipſa velorum obliquitas in cauſa eſt, quod celeritas nauis progreſſiua non fiat tanta, quanta ab eodem vento per aptiorem velorum diſpoſitionem impetrari poſſet. Quare ſi angulus VOA fiat maior quam 60°, 28′ conueniet ſimul vela ita diſponi, vt angulus EDA fiat maior; quo tota velorum ſuperficies a vento infletur; hinc enim non ſolum vis a vento excepta fiet maior, ſed quia media directio quae ad velorum ſuperficiem eſt normalis, propius ad nauis directionem BA adducitur, ipſa nauis celeritas intendetur, atque deviatio diminuetur.

§. 911. Perſpicitur hinc etiam non ſtatim atque angulus VOA fiat maior quam 60°, 28′ vela in priorem obliquitatis ſitum conſtitui conuenire, in quo angulus ADE ſit 45°, ſed perpetuo dari quendam angulum, ex quo nauis maximam obtineat velocitatem. Quamobrem, ſi commoditatis gratia duae tantum obliquitatis velorum diſpoſitiones admittantur, plerumque naui non tantus motus inducetur, quantus ab eodem vento, ſi vela aliter diſponerentur, produci poſſet. Hinc expertus atque attentus gubernator, dum a vulgari velorum diſpoſitione recedit, ſatis notabiliter curſum nauis accelerare poterit. Nam ſi vel experientia vel theoria edoctus animaduertat, cum vela in altero obliquitatis ſitu iam fuerint collocata, curſum nauis celeriorem eſſe futurum, ſi obliquitas velorum aliquantum vel diminuatur vel augeatur, iubebit velorum extremitates E et F in vna parte magis adduci, in altera remitti, quo magis apta obliquitas obtineatur. Atque hoc modo non ſine admiratione in longinquis itineribus obſeruari ſolet, celeritatem nauis plurimum pendere a dexteritate gubernatorum, ita vt nauis ſub directione vnius celerius promoueatur, quam ſub directione reliquorum, etiamſi omnes circumſtantiae prorſus eaedem videantur.

§. 912. Quod igitur ad numerum malorum attinet, ex dictis patet nullam eſſe rationem, quae mutationem ſuadeat, niſi forte, cum nauis aduerſus ventum annititur, videantur plures mali vim propellentem augere. Quoniam autem per appendices iſte defectus compenſari poteſt, atque in curſu tantopere obliquo vis propellens nimis magna naui periculum minatur, etiam haec ratio numeri malorum multiplicandi ceſſat, quoniam ſi ventus contrarius

parum-

parumper fortis exiſtit, ne quidem his velis, quae mali ſuppeditant, vti licet. Praeterea vero rationi minime conſentaneum foret nauem vno pluribusue malis onerari, quae nunquam vſui eſſent, niſi in curſu aduerſus ventum inſtituendo, quando ſimul ventus leniſſime ſpiraret. Seruato ergo eo malorum numero, quem in capite praecedente pro curſu directo definiuimus, iisdem in omni curſu obliquo ſatis vtiliter frui licebit, dummodo vela ita diſponantur, vt nauis motum celerrimum conſequatur. Quo autem velorum diſpoſitio maxime idonea inueniri poſſit, ipſum nauis motum, qui a quouis vento et velorum ſitu quolibet producitur, inueſtigari oportet, vt hinc per methodum maximorum et minimorum velorum ſitus aptiſſimus quouis caſu aſſignari poſſit.

§. 913. Quia in ſitu velorum obliquo, nauis non curſu directo ſed obliquo fertur, ex ſola prorae figura eiusque reſiſtentia celeritas nauis definiri nequit, ſed etiam deuiationem curſus ab directo noſſe, et quantam nauis in hoc curſu obliquo patiatur reſiſtentiam, cognitum eſſe oportet. Pendet autem iſta inquiſitio tantopere ab vniuerſa nauis figura, vt niſi haec exactiſſime ſit cognita, atque ſimul ad calculum reuocari queat, nihil accurate definiri poſſit, quemadmodum in libro ſuperiori fuſius eſt oſtenſum. Interim tamen, quia in praeſenti negotio ſcientiam exquiſitiſſimam non requirimus, atque eius modi cognitio, quae a veritate ſaltem non nimis abhorret, ſufficiens cenſetur, a veritate aliquantum diſcedere licebit, vt calculus non ſolum tractabilior reddatur, ſed etiam commode ad vſum transferri poſſit. Hunc in finem neglectis reliquis momentis omnibus, quae a figura nauis pendent, tantum duplicem nauis reſiſten-

 tiam

tiam in computum trahi conueniet, alteram quam nauis in cursu directo patitur, et alteram quam pateretur, si ad latus in directione normali seu secundum axem latitudinalem moueretur.

Tab. XXVII. fig. 1. §. 914. Sit igitur $ff$ resistentia nauis absoluta, si cursu directo secundum axis longitudinem promoueatur, et sit $bb$ resistentia nauis lateralis absoluta, si secundum axem latitudinalem procederet; vtroque scilicet casu resistentia absoluta indicatur per superficiem planam, quae in aqua directe pari celeritate, qua nauis progreditur, mota etiam eandem, quam nauis resistentiam patiatur. Non igitur in determinatione motus nauis cuiuscunque vehementer a veritate aberrabimus, si loco verae nauis mente substituamus parallelepipedum rectangulum $a\alpha\beta b$, cuius facies anterior $a\alpha$ sit $= ff$, et facies lateralis $\alpha\beta$ seu $ab = bb$; ita vt huius nauis fictae prora sit $a\alpha$, puppis $b\beta$, axis longitudinalis AB, et latitudinalis EF. Si enim ista navis ficta cursu directo feratur eandem patietur resistentiam, quam nauis vera, eademque insuper erit vtriusque nauis resistentia, si vtraque ad latus secundum directionem CE vel CF progrediatur; vnde intelligitur discrimen sensibile intercedere non posse, si motus fiat oblique secundum directionem quamcunque CM. Quantus autem futurus sit dissensus ex libro superiori colligi poterit, vnde quidem is vix sensibilis deprehendetur.

§. 915. Substituta igitur hac naui ficta in locum verae, sit VC directio venti, eiusque celeritas debita altitudini $c$; vela autem ita sint disposita secundum $eCf$ vt angulus $eCA$ sit $= p$; et tota velorum superficies sit $= gg$. Sit porro angulus $VCe = q$, sub quo ventus in vela incidit; erit ergo si ventus totam velorum superficiem

ciem perstringat, vis venti aequalis ponderi voluminis aerei $= cgg\,(\sin. q)^2$, seu aequalis ponderi voluminis aquei $= \frac{1}{800} cgg\,(\sin. q)^2$; huiusque vis directio erit recta CP ad velorum superficiem $ef$ normalis, ita vt sit angulus $ACP = 90^\circ - ACe = 90^\circ - p$. Nunc dum nauis ista vi secundum directionem CP impellitur, quaeritur directio et celeritas, qua nauis sit progressura. Sit CM directio nauis quaesita, et angulus $ACM = s$, qui erit deuiatio cursus, seu cursus obliquitas; celeritas autem nauis, qua in hac directione progredietur debita sit altitudini $v$, ita vt ipsa celeritas nauis futura sit vt $\sqrt{v}$.

§ 916. Quoniam ponitur angulus $ACM = s$ erit vis quam facies anterior $aa = ff$ ab aqua perpetietur $= ffv\,(\cos. s)^2$, expressa in volumine aquae, huiusque vis directio erit recta AB, vis autem quam facies lateralis $\alpha\beta$ sustinebit erit $= bbv\,(\sin. s)^2$ cuius directio erit in recta FE. Dum igitur nauis secundum directionem CP vi $= \frac{1}{800} cgg\,(\sin. q)^2$ vrgetur, a resistentia duplicem patietur vim, alteram $= ffv\,(\cos. s)^2$ in directione CB, alteram $= bbv\,(\sin. s)^2$ in directione CE. Vis ergo his binis ex resistentia aquae ortis aequiualens, quae sit CR, primum ratione directionis vi CP contraria, tum vero eidem aequalis esse debet. Quia vero CR est media directio virium CB et CE, erit tang $BCR = \frac{bbv(\sin. s)^2}{ffv(\cos. s)^2} = \frac{bb}{ff}\,(\text{tang.}\, s)^2$. Quare cum angulus BCR aequalis esse debeat angulo $ACP = 90 - p$ erit tang. $BCR = \cot p = \frac{bb}{ff}\,(\text{tang.}\, s)^2$; vnde statim reperitur deuiatio nauis seu angulus $ACM = s$ ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{bb}} \cot p = \sqrt{\frac{ff}{bb}}$ cotang. $ACe$. Ex velorum ergo dispositione $ef$, et vtraque nauis resistentia absoluta $ff$ et $bb$ reperitur deuiatio nauis seu declinatio a cursu directo ACM.

 §. 917.

§. 917. Cum porro sit $BCR = 90 - p$, erit vis aequiualens $CR = \frac{vi\ CB}{cof \cdot BCR} = \frac{ffv(cof.s)^2}{fin \cdot p}$. Quia vero est tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{bb}} \cot p$, erit fec. $s = \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$ et cof. $s = 1 : \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$, vnde fit vis $CR = \frac{ff\,v}{fin.p + \frac{ff}{bb} cof.p}$; quae cum aequalis esse debeat vi propellenti $\frac{1}{800} cgg\,(fin.q)^2$, fiet $v = \frac{1}{800} cgg\,(\frac{fin\,p}{ff} + \frac{cof.\,p}{bb})(fin.q)^2$, ex qua aequatione celeritas nauis innotescit. Ad quam commodius exprimendam ducantur diagonales $a\beta$ et $b\alpha$, erit angulorum $bCB$, $aCA$ tangens $= \frac{ff}{bb}$; sinus $= \frac{ff}{\sqrt{(f^4 + b^4)}}$, et cosinus $= \frac{bb}{\sqrt{(f^4+b^4)}}$. Sit angulus $ACa = BCb = e$, erit $v = \frac{1}{800}(cof.\,e\,fin.\,p + fin.\,e\,cof.\,p)(fin.\,q)^2 \frac{cgg\sqrt{(f^4+b^4)}}{ff\,bb} = \frac{1}{800}$ fin. $(p+e)(fin.\,q)^2 . \frac{cgg}{bb\,fin.\,e} = \frac{1}{800}$ fin. $(p+e)(fin.\,q)^2 . \frac{cgg}{ff\,cof.e}$. Erit vero $p + e =$ ang. $eC\alpha$, et $q =$ ang. $VCe$, vnde fiet primo tang. $ACM = \sqrt{}$ tang. $AC\alpha$ . cotang. $ACe$ et $v = \frac{cgg}{800 ff\,cof \cdot AC\alpha}$ fin. $eC\alpha\,(fin.\,VCe)^2$.

§. 918. Possunt hinc plura problemata excogitari et resolui, quae ad praxin non paruum subsidium afferunt. Sic si ponamus directionem nauis AB vna cum directione venti VC esse datam aptissima velorum dispositio determinari poterit, qua nauis celerrime promoueatur. Quia nimirum directio nauis datur, simul positio rectae $C\alpha$ dabitur, ponatur ergo angulus datus $VC\alpha = a$ et angulus $VCe = q$, erit ang. $eC\alpha = a - q$. Hinc cum sit $v = \frac{cgg}{800\,ff\,cof \cdot AC\alpha}$ fin. $(a-q)(fin.\,q)^2$, maximum esse debebit haec expressio fin. $(a-q)(fin.\,q)^2$, vnde fit cof. $(a-q)(fin.\,q)^2 = 2$ fin. $(a-q)$ fin. $q$ cof. $q$, et per cof. $(a-q)$ fin. $q$ cof. $q$ vtrinque diuidendo habebitur tang. $q = 2$ tang $(a-q)$.

Quam-

Quamobrem angulum datum $VC\alpha$ ita in duas partes per rectam $Ce$ ſecari oportet, vt anguli $VCe$ tangens duplo ſit maior quam tangens anguli $eC\alpha$. Ad angulum ergo $VCe = q$ inueniendum ſit tang. $a = \alpha$ et tang. $q = \theta$ erit $\theta = \frac{2\alpha - 2\theta}{1 + \alpha\theta}$ ſeu $3\theta + \alpha\theta\theta = 2\alpha$, vnde $\theta = \frac{-3 + \surd(9 + 8\alpha\alpha)}{2\alpha}$. Vel ſi ponatur ſin. $\alpha CV = m$, et coſ. $\alpha CV = n$ erit $\theta = \frac{-3n + \surd(9nn + 8mm)}{2m}$ ſeu $\theta = \text{tang}\, q = \frac{-3n + \surd(9 - mm}{2m} = \frac{\surd(9 - mm) - \surd(9 - 9mm)}{2m}$.

§. 919. Semper ergo maior eſſe debet angulus $VCe$ quam angulus $eC\alpha$, quia illius tangens aequatur duplae tangenti huius, niſi caſu quo venti directio $VC$ cadit in $Cb$, hic enim poſitio velorum $ef$ ad lineam $bC\alpha$ erit normalis. Quando autem angulus $VC\alpha$ fit valde acutus, tum angulus $eC\alpha$ duplo minor erit angulo $VCe$ hoc ergo caſu angulum $VC\alpha$ in tres partes aequales ſecari oportebit, vnamque partem angulo $\alpha Ce$ tribui Sin angulus $VC\alpha$ fiat rectus, erit angulus $eC\alpha = 35°, 15'$, et ang. $VCe = 54°, 45'$. Quoniam vero deuiatio navis ſeu angulus $ACM$ ita definitur, poſito $AC\alpha = e$ vt ſit tang. $ACM = V$ tang. $e$ cot $(a - q - e)$ ob cot $(a - q - e) = \frac{1 + \text{tang.}(a-q)\text{tang.}\, e}{\text{tang}\,(a-q) - \text{tang.}\, e} = \frac{2 + \text{tang.}\, q \cdot \text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, q - 2\,\text{tang.}\, e}$, erit tang. $ACM = V \frac{2\,\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, q\,(\text{tang.}\, e)^2}{\text{tang.}\, q - 2\,\text{tang.}\, e}$. Hinc declinatio nauis euaneſcet, ſi fiat tang. $q = -2.$ cot. $e$; ſi exempli gratia ſit $e = AC\alpha = 5°$ erit $q = VCe = 92°, 31'$, et $eC\alpha = 95°$, quo ergo caſu habetur curſus directus.

§. 920. Ceterum ex formulis quas (917) tam pro declinatione nauis $ACM$ quam pro celeritate nauis, quae a dato vento et data velorum diſpoſitione oritur, inuenimus, faciles regulae deriuari poſſunt ad motum nauis determinandum. Cum enim ſit tang. $ACM = V$ tang. $AC\alpha$.

cot

cot $ACe$, quia angulus $eCP$ eſt rectus erit tang. $ACM = \sqrt{}$ tang. $AC\alpha$. tang. $ACP$. Producta ergo $a\alpha$ donec rectas CM et CP ſecet in $\mu$ et P, et ſumta AC pro ſinu toto, erit $A\mu =$ tang. ACM; $A\alpha =$ tang. $AC\alpha$; et $AP =$ tang. ACP; hincque fit $A\mu = \sqrt{} A\alpha . Ap$; ex quo erit $A\mu$ media proportionalis inter $A\alpha$ et AP. Sumta ergo $A\mu$ media proportionali inter $A\alpha$ et AP recta $C\mu M$ dabit directionem in qua nauis promouebitur. Quoniam deinde eſt $a\alpha = ff$, ſi ex $a$ in $b\alpha$ demittatur perpendiculum $a\gamma$, erit $a\gamma = ff$ coſ. $AC\alpha = ff$ coſ. $e$. Hinc ergo erit $v = \frac{cgg}{800\, a\gamma}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$. Sumatur ergo $C\delta$, quae ſe habeat ad $a\alpha$ vt ſuperficies velorum $gg$ ad reſiſtentiam prorae abſolutam $ff$, erit $v = \frac{c . C\delta}{800 . a\gamma}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$; vnde erit celeritas venti apparens $\sqrt{c}$ ad celeritatem nauis $\sqrt{v}$ vt 1 ad ſin. $VCe$. $\sqrt{\frac{C\delta}{800\, a\gamma}}$ ſin. $eC\alpha$.

§. 921. Cum ergo ſit celeritas nauis $\sqrt{v} =$ ſin. $VCe$ $\sqrt{\frac{c . C\delta}{800\, a\gamma}}$ ſin. $eC\alpha$, erit celeritas nauis perpetuo in ratione compoſita ex ſimplici celeritatis venti $\sqrt{c}$, et ſinus anguli incidentiae $VCe$, atque ex ſub duplicata ratione ſuperficiei velorum $C\delta$ et ſinus anguli $eC\alpha$. Manente ergo celeritate venti et ſuperficie velorum eadem nauis celerrime promouebitur, ſi vterque angulus $VCe$ et $eC\alpha$ fuerit rectus; quo itaque naui celerrimus motus imprimatur, nauis ita eſt dirigenda vt directio venti in diagonalem $bC$ incidat, atque vela ita ſunt diſponenda, vt $ef$ ſit ad eandem diagonalem $b\alpha$ normalis. Eiusmodi ergo curſum inſtitui conueniet, ſi hoſtem nos a tergo perſequentem effugere velimus. Quoniam vero ſi nauis pluribus malis eſt inſtructa, ventus non omnia vela in hoc curſu perſtringere valet; his

his caſibus expediet curſum magis obliquum eligere, quo maior velorum portio vel integra ſuperficies a vento infletur, in quo negotio pariter maximum definire licebit.

§. 922. Quando autem curſus nauis verſus determinatam plagam dirigi debet, parum refert celerrime proceſſiſſe, niſi ſimul nauis in propoſita directione promoueatur. Quamobrem hic quaeſtio in praxi vtiliſſima naſcitur, quemadmodum pro data venti directione non ſolum vela diſponi, ſed etiam ipſam nauem dirigi oporteat, vt in data directione CM celerrime progrediatur. Sit igitur VC directio venti, et CM curſus a naui deſcribendus; ac ponatur angulus VCM$=a$. Sit autem ACB poſitio nauis aptiſſima, quae quaeritur, ac ponatur, angulus ACM$=s$; qui deſignat declinationem curſus, erit ob ang. AC$\alpha=e$, angulus $\alpha$CM$=s-e$; et ang. VCA$=a-s$. Deinde ſit $ef$ velorum diſpoſitio maxime idonea ponaturque angulus $e$CA$=p$; et angulus incidentiae VC$e=q$; erit $p+q=a-s$. Primum ergo ex formula pro deuiatione inuenta erit tang. $s=\sqrt{}$ tang. $e$ cot. $p=\sqrt{\frac{tang.\, e}{tang.\, p}}$; ideoque tang. $p=\frac{tang.\, e}{(tang.\, s)^2}$, vnde ex angulo ACM ſtatim inuenitur velorum diſpoſitio ſeu angulus $e$CA$=p$.

§. 923. Poſitis porro celeritate venti $=\sqrt{c}$ et celeritate nauis $=\sqrt{v}$, erit $v=\frac{cgg}{800ff\, coſ.\, e}$ ſin. $e$C$\alpha$ (ſin. VC$e$)$^2$. Eſt vero $e$C$\alpha=p+e$; et VC$e=q=a-s-p$; vnde erit $v=\frac{cgg}{800ff\, coſ.\, e}$ ſin. $(e+p)($ſin. $q)^2$; ac propterea maximum effici debet ſin. $(e+p)($ſin. $q)^2$, ex quo naſcitur iſta aequatio $dp$ coſ. $(e+p)($ſin. $q)^2+2dq$ ſin. $(e+p)$ ſin $q$ coſ. $q=0$, ſeu $0=dp$ tang. $q+2dq$ tang. $(e+p)$. Cum vero ſit tang. $p=\frac{tang.\, e}{(tang.\, s)^2}$ erit $dp=\frac{-2ds\, tang.\, e\, (coſ.\, p)^2}{tang.\, s\, (ſin.\, s)^2}$;

et ob $q = a - s - p$, erit $dq = -ds + \frac{2ds\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2}{\text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2}$, quibus valoribus fubftitutis et per $ds$ diuifo habebitur $\frac{2\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2\, \text{tang.}\, q}{\text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2} = \frac{4\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2\, \text{tang.}\, (e+p)}{\text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2} - 2\, \text{tang.}\, (e+p)$. Seu $\text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2\, \text{tang.}\, q + \text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2\, \text{tang.}\, (e+p) = 2\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2\, \text{tang}\, (e+p)$.

§. 924. Sit $\text{tang.}\, e = \delta$; $\text{tang.}\, p = x$; et $\text{tang.}\, a = \alpha$; erit $\text{tang.}\, s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$; et $\text{fin.}\, s = \sqrt{\frac{\delta}{\delta+x}}$; deinde ob $q = a - s - p$ erit $\text{tang.}\, q = \frac{\text{tang.}\, (a-p) - \text{tang.}\, s}{1 + \text{tang.}\, (a-p)\, \text{tang.}\, s} = \frac{\alpha - x - (1+\alpha x)\, \text{tang.}\, s}{1 + \alpha x + (\alpha - x)\, \text{tang.}\, s} = \frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1+\alpha x)\sqrt{\delta}}{(1+\alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}}$; et $\text{tang.}\, (e+p) = \frac{\delta + x}{1 - \delta x}$; quibus fubftitutis ob $\text{cof.}\, p = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\frac{1}{(\text{cof.}\, p)^2} = 1 + xx$, erit $\frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1+\alpha x)\sqrt{\delta}}{(1+\alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}} + \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1-\delta x)\sqrt{x}} = \frac{2(\delta + x)}{1 - \delta x}$. Si haec aequatio a fractionibus liberetur diuifibilis erit per $\delta + x$, atque diuifione peracta prodibit $\alpha - 3x - 2\alpha xx = (2\alpha - 3x - \alpha xx)\sqrt{\delta x}$. Haec autem aequatio euoluta fit quinque dimenfionum ita vt hinc in genere nihil ad nauis velorumue difpofitionem concludi queat. Quoniam vero angulus $e$ plerumque valde eft exiguus, fi eum prorfus euanefcentem ponamus vt fit $\delta = 0$, erit $\alpha - 3x = 2\alpha xx$ hincque $x = \frac{-3 + \sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{4\alpha}$, quae quidem folutio ob deuiationem euanefcentem congruit cum fupra (919) inuenta.

§. 925. Quanquam ergo angulus $e$ non pro euanefcente haberi poteft, tamen quia eft valde paruus, ifte pro $x$ inuentus valor non multum a vero aberrabit. Sit itaque verus valor $x = \frac{-3 + \sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{4\alpha} + z\sqrt{\delta}$ fiet $-3z + \frac{(3-\sqrt{(9+8\alpha\alpha)})^2}{\;} z = -z\sqrt{(9+8\alpha\alpha)} = \frac{12\alpha\alpha + 9 - 3\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{8\alpha} \sqrt{\frac{-3+\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$. hincque $z = \frac{-9 - 12\alpha\alpha + 3\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{8\alpha\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}} \sqrt{\frac{-3+\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$, Vel fi ponatur $\frac{-3+\sqrt{(9+8\alpha\alpha)}}{4\alpha} = \beta$ vt fit $\alpha = \frac{3\beta}{1-2\beta\beta}$ reperieperietur $z = \frac{-\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^3}{1+2\mathfrak{E}\mathfrak{E}} \sqrt{\mathfrak{E}}$, vnde fit $x = \mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{E}(1+\mathfrak{E}\mathfrak{E})\sqrt{\mathfrak{E}\delta}}{1+2\mathfrak{E}\mathfrak{E}}$, qui valor facile loco veri ſubſtituetur. Hoc igitur modo definitur $x =$ tang. $p$ ideoque velorum diſpoſitio in naui ſeu angulus $e$CA: quo cognito ſtatim prodibit angulus ACM $= s$, cum ſit tang. $s \sqrt{\frac{\delta}{x}}$, vnde directio nauis AB innoteſcit; ſicque tam nauis ita dirigetur, atque vela ita diſponentur, vt nauis ſecundum directionem CM celerrime promoueatur.

§ 926. Quemadmodum autem in quouis caſu tam nauis dirigi quam vela diſponi debeant, commodiſſime ex tabella perſpicietur, in qua pro pluribus diuerſis angulis VCM et nauis et velorum diſpoſitio maxime idonea exhibeatur Ad eiusmodi vero tabellam conficiendam valor $x$ pro cognito aſſumi ex eoque valor ipſius $\alpha$ definiri poterit, id quod facile praeſtatur ex hac aequatione $\alpha = \frac{x(1-\sqrt{\delta x})}{1-2\sqrt{\delta x}-xx+xx\sqrt{\delta x}}$. Oportet autem pro $\delta$ valorem conuenientem aſſumi, quia igitur eſt $\delta =$ tang. $e = \frac{ff}{bb}$, ac reſiſtentia lateralis $bb$ multum ſuperat reſiſtentiam prorae $ff$, ponamus $bb = 9ff$; quae hypotheſis in plerisque nauibus non multum a veritate abhorrebit. Cum enim naues quadruplo ſoleant eſſe longiores quam latae, hinc iam foret $bb = 4ff$, ſi formam heberent parallelepipedi, at per prorae elongationem eius reſiſtentia circiter duplo redditur minor, vnde fere fit $bb = 9ff$ et $\delta = \frac{1}{9}$, vnde ang. AC$\alpha = 6°, 21'$, hancobrem habebitur $\alpha =$ tang. VCM $= \frac{3x(1-\sqrt{x})}{3-2\sqrt{x}-6xx+2xx\sqrt{x}}$ exiſtente tang. $e$CA $= x$; et tang. $s =$ tang. ACM $= \frac{1}{3\sqrt{x}}$ et VC$e$ = VCM − ACM − $e$CA.

§. 927. At vero tentanti patebit non licere pro $x$ nimis paruos valores accipi, quia alias angulus ACM fie-

 ret

ret maior quam totus angulus VCM, hisque adeo casibus nauis retro in directione MC moueretur contra institutum. Si enim ponatur angulus $eCA = 10°$, prodibit $VCM = 34°, 29'$ et $ACM = 38°, 27'$. Quo igitur casus ad propositum pertinentes obtineamus, manifestum est motum, qualem desideramus, oriri non posse, nisi sit angulus VCM maior quam $eCM = p + s$; quare debebit esse $\alpha > \frac{1 + 1x\sqrt{x}}{3\sqrt{x} - x}$, substituto autem loco $\alpha$ valore invento, sublatisque fractionibus, diuidi poterit per $1 + xx$, atque ex quoto cognoscetur esse debere $2\sqrt{x} + 18x\sqrt{x} > 3 + 3xx$. Hinc per approximationem reperitur esse debere $x > 0,24559$; ideoque necesse est vt angulus $eCA$ maior statuatur quam $13°, 48'$, vnde ab hoc angulo ascendendo valores pro $eCA$ accipi debebunt, sumto enim $eCA = 13°, 48'$ nauis nullum motum in directione proposita accipere poterit sed quiescet.

Tab. XXVII. fig. 2. §. 928. En igitur eiusmodi tabellam, quae pro variis anguli VCM valoribus exhibet angulos $eCA$, VCA, ACM, $eC\alpha$, et $VCe$, vt nauis celerrime in directione CM promoueatur.

VC

| V C M | e C A | V C A | A C M | e C α | V C e |
|---|---|---|---|---|---|
| 47°, 44′ | 13°, 48′ | 13°, 48′ | 33°, 56′ | 20°, 9′ | 0°, 0′ |
| 51, 47 | 15, 0 | 19, 0 | 32, 47 | 21, 21 | 4, 0 |
| 67, 36 | 20, 0 | 38, 41 | 28, 55 | 26, 21 | 18, 41 |
| 81, 37 | 25, 0 | 55, 36 | 26, 1 | 31, 21 | 30, 36 |
| 93, 56 | 30, 0 | 70, 15 | 23, 41 | 36, 21 | 40, 15 |
| 104, 51 | 35, 0 | 83, 8 | 21, 43 | 41, 21 | 48, 8 |
| 114, 41 | 40, 0 | 94, 41 | 20, 0 | 46, 21 | 54, 41 |
| 123, 41 | 45, 0 | 105, 20 | 18, 21 | 51, 21 | 60, 20 |
| 132, 6 | 50, 0 | 115, 7 | 16, 59 | 56, 21 | 65, 7 |
| 139, 55 | 55, 0 | 124, 20 | 15, 35 | 61, 21 | 69, 20 |
| 147, 24 | 60, 0 | 133, 12 | 14, 12 | 66, 21 | 73, 12 |
| 154, 38 | 65, 0 | 141, 49 | 12, 49 | 71, 21 | 76, 49 |
| 161, 31 | 70, 0 | 150, 9 | 11, 22 | 76, 21 | 80, 9 |
| 168, 16 | 75, 0 | 158, 29 | 9, 47 | 81, 21 | 83, 29 |
| 174, 55 | 80, 0 | 166, 57 | 7, 58 | 86, 21 | 86, 57 |
| 182, 9 | 85, 0 | 176, 31 | 5, 38 | 91, 21 | 91, 31 |
| 180, 0 | 90, 0 | 180, 0 | 0, 0 | 96, 21 | 90, 0 |

§. 929. Ex hoc ergo tabula primum patet, nisi angulus VCM, quem directio venti VC cum via proposita CM constituit maior sit quam 47°, 44′, hunc cursum omnino teneri non posse. Pendet autem iste angulus 47°, 44′ ab angulo ACα quem 6°, 21′, assumsimus; qui si minor maiorue esset assumtus, etiam vltimus seu minimus angulus VCM minor maiorue prodiisset. Sin autem resistentia lateralis *bb* infinita esset respectu *ff*, ideoque angulus ACα euanesceret, tum quantusuis exiguus foret angulus VCM tamen cursum institui liceret. Pendet ergo haec diiudicatio cursus conuenientissimi a ratione inter

 resisten-

resistentiam prorae $ff$ et resistentiam lateralem $bb$, quae idcirco ante omnia cognita esse debet, id quod per vnicam obseruationem deuiationis nauis facile praestabitur. In cursu enim obliquo notetur primum angulus $e$CA qui sit $= p$; tum vero obseruetur deuiatio nauis seu angulus ACM qui sit $= s$; his cognitis erit tang. AC$\alpha$ $=$ tang. $p$ (tang $s$)$^2$. Quodsi ergo angulus AC$\alpha$ maior minorue prodeat quam 6°, 21′, alia tabula constitui debebit, ex qua cursus nauis aptissimus determinetur.

§. 930. Hunc in finem adiungam hic tabulam, in qua angulus AC$\alpha$ infinite paruus assumitur, quo facilius ex collatione huius cum praecedente casus medii, quibus angulus AC$\alpha$ minor deprehenditur quam 6°, 21′, dignosci queant.

| V C M | e C A | ɩ C A | A C M | e C α | V C e |
|---|---|---|---|---|---|
| 14°, 49′ | 5°, 0 | 14°, 49′ | 0°, 0′ | 5°, 0′ | 9°, 49′ |
| 29, 25 | 10, 0 | 29, 25 | 0, 0 | 10, 0 | 19, 25 |
| 44, 11 | 15, 0 | 44, 11 | 0, 0 | 15, 0 | 28, 11 |
| 56, 3 | 20, 0 | 56, 3 | 0, 0 | 20, 0 | 36, 3 |
| 68, 0 | 25, 0 | 68, 0 | 0, 0 | 25, 0 | 43, 0 |
| 79, 6 | 30, 0 | 79, 6 | 0, 0 | 30, 0 | 49, 6 |
| 89, 28 | 35, 0 | 89, 28 | 0, 0 | 35, 0 | 54, 28 |
| 99, 13 | 40, 0 | 99, 13 | 0, 0 | 40, 0 | 59, 13 |
| 108, 26 | 45, 0 | 108, 26 | 0, 0 | 45, 0 | 63, 26 |
| 117, 15 | 50, 0 | 117, 15 | 0, 0 | 50, 0 | 67, 15 |
| 125, 42 | 55, 0 | 125, 42 | 0, 0 | 55, 0 | 70, 42 |
| 133, 54 | 60, 0 | 133, 54 | 0, 0 | 60, 0 | 73, 54 |
| 141, 53 | 65, 0 | 141, 53 | 0, 0 | 65, 0 | 76. 53 |
| 149, 41 | 70, 0 | 149, 41 | 0, 0 | 70, 0 | 79, 41 |
| 157, 22 | 75, 0 | 157, 22 | 0, 0 | 75, 0 | 82, 22 |
| 164, 58 | 80, 0 | 164, 58 | 0, 0 | 80, 0 | 84, 58 |
| 172, 28 | 85, 0 | 172, 28 | 0, 0 | 85, 0 | 87, 28 |
| 180, 0 | 90, 0 | 180, 0 | 0, 0 | 90, 0 | 90, 0 |

§. 931. Ex his ergo duabus tabulis coniunctis, si angulus AC$\alpha$ minor deprehendatur quam 6°, 21′, pro quouis angulo VCM proposito satis exacte ad praxin tam nauis directio quam velorum dispositio definiri poterit, vt nauis in data via celerrime progrediatur. Sit enim angulus AC$\alpha$ = 3°, 10′, medium scilicet teneat inter 6°, 21′, et 0°, 0′; atque propositus sit angulus VCM = 90°. Pro velorum dispositione seu angulo $e$CA tabula prior dat 28°, 24′, posterior vero dat 35°, 16′, inter quos valores medius 31°, 50′ dabit valorem aptissimum

pro

pro angnlo $eCA$. Hinc erit ex regula generali tang. $ACM = \sqrt{\frac{\text{tang. } 3^\circ, 10'}{\text{tang. } 31^\circ, 50'}}$, ideoque declinatio nauis seu angulus $ACM = 16^\circ, 37'$. Quare ex his, si in naui quapiam fuerit angulus $AC\alpha = 3^\circ, 10'$, atque angulus fuerit propositus $VCM = 90^\circ$, sequenti modo nauis dirigi, velaque disponi conueniet, vt sit $eCA = 31^\circ, 50'$; $VCA = 73^\circ, 23'$, $ACM = 16^\circ, 37'$ et $eC\alpha = 35^\circ, 0'$ et $VCe = 41^\circ, 33'$.

§. 932. Quemadmodum autem hic, dum posuimus $\delta = \text{tang. } AC\alpha = \frac{1}{9}$, inuenimus cursum teneri non posse nisi sit angulus $VCM$ maior quam $47^\circ, 44'$, seu angulus $eCA$ maior quam $13^\circ, 48'$; simili modo quicunque alius valor ipsi $\delta$ tribuatur reperiri poterunt limites pro angulis $VCM$ et $eCA$, quos hi anguli superare debent. Cum enim esse debeat angulus $VCM$ maior quam $eCM = p + s$, si hi duo anguli aequales ponantur, prodibunt limites illi desiderati. At quia est tang. $p = x$ et tang. $s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$ erit tang. $(p + s) = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$, vnde fit tang. $VCM = \alpha = \frac{3x(1 - \sqrt{\delta}x)}{1 - 2\sqrt{\delta}x - 2xx + \lambda x\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$. Quae aequatio si a fractionibus liberetur, tumque per $1 + xx$ diuidatur, orietur $\sqrt{\delta} - 2\delta\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + xx\sqrt{\delta} = 0$ vnde cum $\delta$ sit quantitas valde parua, per approximationem oritur $x = \sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4}\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{6}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}}$. Dabit autem $x$ tangentem anguli $eCA$ et $\sqrt{\frac{\delta}{x}}$ tangentem anguli $ACM$ horumque angulorum summa praebebit angulum minimum $VCM$, erit vero $\sqrt{\frac{\delta}{x}} = 2\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} + \frac{\delta}{2} + \delta\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{3}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} = \text{tang } ACM$.

§. 933. Quoties igitur euenit, vt angulus VCM non excedat limitem ſic inuentum, curſus propoſitus teneri non poteſt; et cum neque quieſcere neque regredi conveniat, eiusmodi curſum inſtitui oportet, quem tenentes ad propoſitam metam etiamſi non directe accurramus, tamen appropinquemus. Maxime autem hoc ſubſidium vſu venit, quando ventus directe ex eadem regione in quam tendimus, venit. Quamuis enim plane impoſſibile ſit contra ventum progredi, tamen ita curſum inſtituere licet, vt nauis in recta CM, quae cum VM angulum acutum faciat, promoueatur, ſicque adeo plagam verſus, vnde ventus venit, appellatur. Praecipuum autem negotium in hoc verſatur, vt, cum infinitis modis aduerſus ventum luctari liceat, is imprimis curſus definiatur atque eligatur, quo nauis eodem tempore plurimum verſus plagam, vnde ventus venit, promoueatur.

§. 934. Si ventus veniat ex plaga VC, ponamus ACB eam eſſe nauis directionem, et $eCf$ velorum diſpoſitionem maxime idoneam, vt ex itinere maximum lucrum contra ventum obtineatur. Sit angulus $VCe = q$; $eCA = p$, et angulus ex indole nauis cognitus $AC\alpha = e$; tum vero ponatur angulus ACM ſeu declinatio nauis a curſu directo $= s$; erit vti vidimus $\text{tang.}\, s = \sqrt{\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, p}}$. Deinde vero eſt altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{cgg}{800ff \cos.\, e}$ $\sin.\, eC\alpha\, (\sin.\, VCe)^2$ hincque ipſa celeritas, qua nauis in directione CM procedet erit vt $\sin.\, q \sqrt{\sin\, (e + p)}$, quae ſi multiplicetur in coſinum anguli $VCM = p + q + s$ dabit celeritatem deriuatiuam, qua nauis adverſus ventum progreditur, quae ergo maxima eſt efficienda. Quocirca maxima fieri debet iſta expreſſio $\cos.\, (p + q + s)\, \sin.\, q$

 $\sqrt{}$ ſin.

$\sqrt{}$ ſin. $(e+p)$. At ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, p}}$ habetur $dp = \frac{-2\, ds\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2}{\text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2}$ ſeu $ds = \frac{-dp\, \text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2}{2\, \text{tang.}\, e\, (\text{cof.}\, p)^2} = \frac{-dp \sqrt{\text{tang.}\, e}}{2(\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, p)(\text{cof.}\, p)^2 \sqrt{\text{tang.}\, p}}$.

§. 935. Quoniam hic duae inſunt quantitates variabiles $p$ et $q$ a ſe inuicem non pendentes, vtramque ad maximum efficiendum definiri oportet, ex quo maximum maximorum elicietur. Habeat $p$ hincque etiam $s$ iam valorem, quem maximi natura poſtulat, et quaeratur valor anguli $q$; debebit ergo eſſe ſin. $q$ coſ. $(p+q+s)$, maximum, vnde oritur coſ. $q$ coſ. $(p+q+s) =$ ſin. $q$ ſin. $(p+q+s)$ ſeu cot. $q =$ tang. $(p+q+s)$. Fiet ergo $90° - q = p+q+s$; et $q = \frac{90° - p - s}{2}$. Quod ſi ergo iam inuenta ſit diſpoſitio velorum ſeu angulus $eCA$ ex quo ſimul habetur angulus $ACM = s$, nauis ipſa ita verſus ventum dirigi debet, vt ducta $CL$ ad $CM$ normali, angulus $LCe = 90 - p - s$ a venti directione $VC$ biſecetur. Intelligitur hinc etiam quaecunque velorum diſpoſitio habeatur, inter omnes nauis directiones hoc modo inueniri eam, quae motum celerrimum aduerſus ventum producat. Supereſt ergo vt velorum aptiſſimam diſpoſitionem ſeu angulum $q$ inueſtigemus, quo inuento promtiſſimus motus contra ventum obtineatur.

§. 936. Cum igitur ſit $q = \frac{90 - p - s}{2}$ et $p+q+s = \frac{90+p+s}{2} = 90 - q$, erit coſ. $(p+q+s) =$ ſin. $q =$ ſin. $\frac{90-p-s}{2}$; hincque iſta expreſſio fieri debet maximum $(\text{ſin.}\, q)^2 \sqrt{}$ ſin. $(e+p)$, vnde fit $2\, dq$ ſin. $q$ coſ. $q \sqrt{}$ ſin. $(e+p) + \frac{dp\, \text{cof.}\, (e+p)(\text{fin.}\, q)^2}{2\sqrt{\text{fin.}\, (e+p)}} = 0$ ſiue $4\, dq$ ſin. $q$ coſ. $q$ ſin. $(e+p) + dp\, (\text{ſin.}\, q)^2$ coſ. $(e+p) = 0$, ex qua naſcitur $4\, dq$ tang. $(e+p) + dp$ tang. $q = 0$. Eſt vero $dq = \frac{-dp - ds}{2}$

$= -$

$= -\frac{dp}{2} + \frac{dp\sqrt{\text{tang.}\, e}}{4(\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, p)(\text{cof.}\, p)^2\sqrt{\text{tang.}\, p}}$, quo ſubſtituto orietur tang. $q =$ tang. $\frac{90 - p - s}{2} = 2$ tang. $(e + p) - \frac{\sqrt{\text{tang.}\, e}}{(1 - \text{tang.}\, e\; \text{tang.}\, p)(\text{cof.}\, p)^2\sqrt{\text{tang.}\, p}}$. At eſt tang. $\frac{90 - p - s}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{ſin.}\,(p+s)}{1 + \text{ſin.}\,(p+s)}} = \frac{1 - \text{ſin.}\,(p+s)}{\text{cof.}\,(p+s)} = \frac{1 - \text{ſin.}\, p\, \text{cof.}\, s - \text{cof.}\, p\, \text{ſin.}\, s}{\text{cof.}\, p\, \text{cof.}\, s - \text{ſin.}\, p\, \text{ſin.}\, s} = \frac{2\,\text{tang.}\, e + 2\,\text{tang.}\, p.}{1 - \text{tang.}\, e\; \text{tang}\; p} - \frac{\sqrt{\text{tang.}\, e}}{(1 - \text{tang.}\, e\; \text{tang.}\, p)(\text{cof.}\, p)^2\sqrt{\text{tang.}\, p}}$. Cum iam ſit tang. $s = \sqrt{\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, p}}$ erit ſin. $s = \frac{\sqrt{\text{tang.}\, e}}{\sqrt{(\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, p)}}$ et coſ. $s = \frac{\sqrt{\text{tang.}\, p}}{\sqrt{(\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, p)}}$ fiet tang. $\frac{90 - p - s}{2} = \frac{\sqrt{(\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, p)} - \text{ſin.}\, p\sqrt{\text{tang.}\, p} - \text{cof.}\, p\sqrt{\text{tang.}\, e}}{\text{cof.}\, p\sqrt{\text{tang.}\, p} - \text{ſin.}\, p\sqrt{\text{tang.}\, e}}$.

§. 937. Ponatur tang. $e = \delta$ et tang. $p = x$, vt ſit ſin. $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et coſ. $p = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$; quibus ſubſtitutis habebitur $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} - x\sqrt{x} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}} = \frac{2\delta + 2x}{1 - \delta x} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1-\delta x)\sqrt{x}}$ quae multiplicata per $1 - \sqrt{\delta x}$ tranſibit in hanc: $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\delta + 2x}{1+\sqrt{\delta x}} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{x}}$. Multiplicetur per $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{x}$, et fiet $\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} + \sqrt{\delta x(\delta + x)(1 + xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x} - \delta\sqrt{x} - xx\sqrt{\delta} = 2\delta\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \sqrt{\delta} - xx\sqrt{\delta}$ ſeu $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} = 3(\delta + x)\sqrt{x}$; quae per $\sqrt{(\delta + x)}$ diuiſa dat $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(1 + xx)} = 3\sqrt{x(\delta + x)}$; et ſumtis quadratis $1 + xx + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x + \delta x^3 = 9\delta x + 9xx$. Hinc fit $1 + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 8\delta x + 8xx$. Ex qua primum patet ſi fuerit $\delta = 0$ ſeu angulus $AC\alpha$ infinite paruus, fore $8xx = 1$ et $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Hoc ergo caſu erit tang. $eCA = 0{,}3535534$, ideoque angulus $eCA = 19°, 28'$. et ob $ACM = 0$ erit $LCe = 70°, 32'$, ac propterea angulus $VCe = 35°, 16'$.

§. 938. Quanquam autem aequatio inuenta $1 + 2\sqrt{\delta x} - 8\delta x - 8xx + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 0$ commode reſolui