directio cum positione velorum ef constituit, secundo ab angulo rtL, quem directio velorum $e\ f$ cum directione motus GL facit, quorum angulorum differentia est obliquitas cursus AGL, qua directio resistentiae nRM seu angulus RnG determinatur. Prouti igitur in cursu hi anguli manent constantes, vel alteruter, vel vterque variabilis existit, nauis aliam viam describet aliamque in singulis locis habebit celeritatem. Maxime autem difficile erit motum definire si angulus obliquitatis cursus AGL fuerit variabilis, cum ab eius variatione non solum angulus RnG immutetur, sed etiam ipsa resistentiae quantitas absoluta quae per $u\ u$ exprimetur, quorum vtrumque difficile est assignare, quomodo mutata obliquitate cursus vel augeatur vel diminuatur. Ceterum intelligitur quantum expediat naues ita construere, vt centrum resistentiae pro quaque cursus obliquitate in rectam verticalem per centrum grauitatis transeuntem incidat, hoc enim si fuerit praestitum, atque insuper vela in malis ita disponantur, vt media directio vis, quam recipiunt in eandem verticalem cadat, non solum gubernaculi actio tantopere desiderabitur, sed etiam leui vi gubernaculum dirigetur, cum nunquam eiusmodi vis occurrat quae nauem conuertere conetur. Praeterea vero etiamsi accidat vt centra, tum resistentiae tum vis venti non praecise in eum locum cadant, tamen dummodo discrimen satis fuerit exiguum, ope gubernaculi cursus quicunque instituetur. Quanquam enim gubernaculum aliam vim sensibilem non exerit, praeter conuersionem nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, tamen ope gubernaculi directio motus vehementer immutatur. Dum enim ope gubernaculi cursus obliquitas

muta-

mutatur, ſimul media directio reſiſtentiae in aliam plagam conuertitur, quo fit vt ipſa motus directio mox declinetur. Ita actione gubernaculi non ſolum poſitio nauis ſeu axis eius longitudinalis a puppi ad proram ducti afficitur, ſed etiam ipſa directio motus in eam plagam, in quam prora dirigitur, deflectitur ſiquidem naues directe progredientes valde exiguam patiuntur reſiſtentiam reſpectu eius quam ſufferunt, ſi curſu obliquo feruntur. Hancob-cauſam gubernaculi actio maxime requiretur, ſi curſus quantum fieri poteſt, ſit contra directionem venti inſtituendus, ope gubernaculi enim efficiendum eſt, vt ea curſus obliquitas conſeruetur, cui maximus angulus RnG reſpondeat. Deinde vt motus nauis ſimul maxime acceleretur, atque aduerſus plagam ex qua ventus venit, inflectatur, vela ita ſunt continuo diſponenda, vt angulus $\underline{r}\,\underline{t}\,\underline{s}$ tantus conſeruetur, quantum reliquae circumſtantiae permittunt; quo maior enim eſt angulus $r\,t\,s$ eo maior erit eius ſinus η contraque eo minor eius coſinus θ, ex quo tum acceleratio maxima obtinebitur, tum etiam maxima curſus declinatio aduerſus ventum. At ſi curſus iam angulum acutum conſtituat cum directione venti, tum vtrique angulum $\underline{r}\,\underline{t}\,\underline{s}$ magis acutum eſſe oportebit, quoniam alioquin ventus vela non impelleret. Quo circa perpetuo efſici debebit, vt angulus Vre tam ſit acutus, quam quantitas vis venti permittit. Cum autem celeritas iam erit facta aequabilis, tum ea curſus directio inſtituenda eſt, quae ſupra pro motu aequabili eſt monſtrata.

PROPOSITIO 84.
Problema.

Tab.XXXVI fig. 1.

884. *Si nauis* AEBF *oblique moueatur in fluuio, cuius cursus sit* CGD, *ita vt axis nauis* AB *cum directione fluuii* CD *constituat angulum obliquum* AGC; *determinare motus mutationem a vi fluuii ortam.*

Solutio.

Sit fluuii celeritas debita altitudini k atque anguli AGC quem axis seu spina nauis AB cum cursu fluuii CD facit sinus $= \mu$ cosinus $= \nu$; habeat autem nauis iam motum quo eius centrum grauitatis G celeritate altitudini v debita progrediatur in directione GL quae cum cursu fluminis GD constituat angulum LGD cuius sinus sit $= m$ cosinus $= n$. Iam vt allisio aquae ad superficiem nauis reperiatur, concipiatur totum systema ex fluuio et naui compositum celeritate $\sqrt{v}$ promoueri in directionem ipsi GL contrariam, quo fiet vt fluuius in nauem quiescentem impingat. Sumta ergo $GC = \sqrt{k}$, et $GL = \sqrt{v}$, compleatur parallelogrammum GCKL, atque diagonalis GK repraesentabit tum directionem quam celeritatem, qua fluuius in nauem quiescentem allidere est concipiendus. In triangulo autem GCK datur angulus C, cuius sinus $= m$ et cosinus $= n$, atque ambo latera $CK = \sqrt{v}$ et $CG = \sqrt{k}$, ex quibus oritur celeritas fluuii in directione IG incurrentis $= \sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}$, atque anguli CGI sinus $= \frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{(k-2n\sqrt{kv}+v)}}$, eiusque cosinus $= \frac{\sqrt{k}-n\sqrt{v}}{\sqrt{(k-2n\sqrt{kv}+v)}}$, ex quibus angulus AGI innotescit; erit autem anguli AGI sinus $= \frac{\mu\sqrt{k}-(\mu n+\nu m)\sqrt{v}}{\sqrt{(k-2n\sqrt{kv}+v)}}$, eiusque cosinus $= \frac{\nu\sqrt{k}+(\mu m-\nu n)\sqrt{v}}{\sqrt{(k-2n\sqrt{kv}+v)}}$. Concipiatur

piatur nunc nauis in directione GI in aqua quiescente promoueri, ſit R centrum reſiſtentiae, et Rm media directio reſiſtentiae, atque reſiſtentia ipſa ſit tanta, quantam pateretur figura plana $\underline{u}$ $\underline{u}$ eadem celeritate contra aquam mota: His poſitis nauis ab allapſu fluuii vrgebitur in directione RM, vi, quae aequalis eſt ponderi voluminis aquae $= (k - 2n\sqrt{kv} + v)u^2$, ſeu poſito pondere nauis $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V erit vis fluuii allidentis $= \frac{M(k - 2n\sqrt{kv} + v)u^2}{V}$, qua vi nauis ſecundum directionem RM propelletur. Haec igitur vis reſoluta in binas, quarum altera in GL incidit, altera ad GL eſt normalis, dabit cum vim tangentialem, qua motus in directione GL accelerabitur, tum vim normalem, qua motus directio deflectetur aGL verſus GD. Denique niſi punctum R, quod eſt centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGI in G incidat nauis ſimul circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum conuertetur et quidem in plagam AEL ſi R inter A et G fuerit ſitum, in plagam contrariam vero ſi punctum R intra B et G cadat; ſi quidem angulus CGI fuerit minor angulo AGC; nam ſi angulus CGI maior foret angulo AGC haec omnia contra ſe haberent. Q. E. I.

Coroll. 1.

885. Si nauis vel quieſcat vel motum habeat ſecundum directionem fluminis GD tum angulus CGI euaneſcet, atque R erit centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGC. Vis conuertens, igitur tendet ad obliquitatem AGC augendam, ſi R intra puncta A et G cadat, contra vero axem AB ſecundum curſus fluminis directionem CD diſponet, ſi R intra G et B cadat.

Co-

Coroll. 2.

886. Si ergo nauis initio directe ſecundum curſus fluminis directionem CD fuerit diſpoſita, eaque aliquantillum declinetur, ſponte ſitum priſtinum recipiet, ſi centrum reſiſtentiae R intra puncta G et B cadat. Econtrario autem ſi R intra G et A fuerit ſitum, directio AB continuo magis a curſu fluminis CD declinabitur.

Coroll. 3.

887. Si igitur pars impulſui fluuii expoſita EAF fuerit ſatis ponderoſa, magnamque vim a fluuio patiatur, tum nauis ſeu corpus quodcunque per fluuium recta deſcendere poterit, quia hoc caſu punctum G ad A accedit, punctum R vero recedit.

Coroll. 4.

888. At ſi pars EAF fuerit perquam acuta et leuis, ita vt centrum reſiſtentiae R prope ad A collocetur, tum difficulter nauis directe per fluuium deſcendet, ſed a minima vi de directione CD depulſa, magis a ſitu directo elongabitur.

Coroll. 5.

889. Eodem vero caſu, quo motus nauis GL incidit in curſum fluuii CD, quoniam angulus GRM maior erit angulo AGC, nauis a ſua directione depelletur, atque ad ripam fluuii, in quam pro A declinat pelletur.

Coroll. 6.

890. Ponamus igitur nauem iam motum accepiſſe verſus ripam in directione GL, atque angulum AGC con-

conſeruari; accelerabitur iſte motus, ſiquidem angulus L rM fuerit acutus, ſimul vero de hac directione deflectetur, verſus GD, ſiquidem angulus LGD maior fuerit quam MRG.

Scholion.

891. Apparet igitur motum corporum a fluuio abreptorum maxime eſſe irregularem, etiamſi ea plano diametrali verticali ſint praedita atque duas partes ſimiles et aequales vtrinque habeant. Primo enim niſi axis AB in ipſam fluuii directionem incidat, corpus verſus eam ripam pellitur, in quam prora A vergit, (conuenit enim eam nauis partem, quae cum aqua confligatur proram appellari); Deinde variis modis corpus ab aqua circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum circumagetur, pro diuerſo ſitu centri reſiſtentiae R, quod durante rotatione continuo locum mutat, niſi pro omni obliquitate ſit fixum. Tertio ob vim normalem ad motus directionem GL a vi fluuii ortam, ipſa motus directio afficitur eaque vel magis declinatur a curſu fluminis vel ad eum reducetur, prout angulus MRG vel maior fuerit vel minor LGD. At vero etiamſi motus verſus fluuii curſum inflectatur, tamen eo recidere nequit, quia minuto angulo LGD eousque vt minor fieret quam MRG, deflexio orietur. Denique tametſi ſemel directio GL parallela foret directioni RM, quo caſu vis normalis euaneſceret, tamen ob corporis conuerſionem vel a vi aquae, vel ab alia leviſſima cauſa ortam, ſtatim alia media directio vis aquae aderit, quae motum turbabit. Interim tamen eiusmodi nauis, in qua centrum reſiſtentiae verſus puppim B cadit

directe a fluuio abripietur, si quidem cursu directo motum inceperit. Corpora autem irregularia, quae nequidem duabus partibus aequalibus et similibus gaudent motu maxime irregulari ferri oportet, ex quo mox ad ripam alterutram deuoluentur. Quod autem ad naues attinet, ope gubernaculi in B applicati motus regularis facile obtinebitur, atque cursus vel secundum flumen directe deorsum vel ad ripam institui poterit; semper autem motus descensus praeualebit, ex quo fluuius in directione, ad ipsius cursum normali traiici omnino non potest; sed nauis inter traiectum eo magis deorsum abripietur quo celerior fuerit fluminis cursus. Cum vi fluuii nunc alia vis sollicitans vel remorum vel venti coniungi posset, atque determinari, quomodo quisque intentus cursus quam commodissime sit instituendus, sed cum haec propius ad alterum librum respiciant, in quo nauigationem nauiumque dispositionem ex professo pertractare est constitutum, hic plura afferre de istiusmodi motibus non est visum, praesertim cum facile sit ex methodo tradita huiusmodi quaestiones, quae proponi queant, ad calculum reuocare atque resoluere. Superest igitur vt paucis exponamus motum nauium quae non sunt liberae, sed alicubi alligatae, quae doctrina in traiectu fluuiorum sine vi aliena praecipue est vtilis.

PROPOSITIO 85.

Problema.

Tab. XXXVI. fig. 2.

892. *Si nauis* AD *in fluuio secundum directionem* ZV *fluente, ope funis* IZ *puncto firmo* Z *ita fuerit alligata, vt perpetuo respectu funis* IZ *eandem positionem teneat, id* quod

quod factum concipiatur per funem BO, *punctum nauis* B *cum* O *connectentem; determinare motum, quem cursus fluminis isti naui imprimet.*

Solutio.

Ponemus ante omnia partem nauis aquae submersam esse parallelepipedum, quia alioquin vires quas fluuius in diversis positionibus exerit, difficulter inter se comparari possent. Sit itaque ABDC sectio aquae quae erit rectangulum, cuius latus AB sit $= a$, latus AC $= b$, et profunditas nauis in aqua $= c$, erit superficies in AB vim fluuii excipiens $= ac$, et superficies sub AC infra aquam versans $= bc$. Sit porro fluuii celeritas debita altitudini k atque longitudo funis ZI $= f$, quae vehementer magna sit respectu quantitatum a, b, et e; sitque anguli ZIA sinus $= m$ et cosinus $= n$. Quod nunc ad motum huius nauis attinet, intelligitur nauem alium motum habere non posse praeter gyratorium circa punctum Z, quo punctum I in arcu circulari PVQ, cuius centrum est Z; feretur. Ponamus autem nauem motum in P inchoasse, atque percurrendo arcum PVQ peruenisse in situm ABDC, in quo punctum I celeritatem habeat altitudini v debitam, qua conabitur per arcum IVQ progredi. Ponatur insuper anguli IZV, quem positio funis IZ cum directione fluuii ZV constituit, sinus $= x$ et cosinus $= y$. His praemissis consideremus vim fluuii, quam in nauem exercebit. Ac primo quidem irruet in latus AB cuius area est $= ac$ in directione ME sub angulo MEA $=$ ZIA $+$ IZV, cuius anguli igitur sinus erit $= my + nx$, cosinus vero $= ny - mx$ qui cosinus simul est sinus anguli NHI sub quo fluuius in latus

latus AC impingit. Iam si nauis quiesceret, vis fluuii sponte haberetur, at cum nauis iam motum habere ponatur, reperietur vis, quam fluuius in latus AB $= ac$ exeret, in directione EF normali ad AB in eius puncto medio E, $= ac((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2$: vis vero quam lateri AC imprimet in directione HG simili modo erit $= bc((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$. Posito autem pondere nauis $= M$ et volumine partis submersae $= V$, expressiones inuentae, si per $\frac{M}{V}$ multiplicentur, dabunt pondera his viribus aequiualentia. Hinc igitur orietur momentum harum duarum virium coniunctim ad nauem circa polum Z circumagendam in plagam IVQ $= \frac{Macnf}{V}((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcmf}{V}((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$, quod diuisum per momentum ipsius nauis respectu poli Z, quod ob longitudinem f maximam est $= Mff$ dabit vim gyratoriam. Ponamus ergo nauem per elementum arcus ds versus V progredi, erit $ds = \frac{-fdx}{y}$; atque interea ita motus accelerabitur vt sit $V\,dv = \frac{-nacdx}{y}((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2 + \frac{mbcdx}{y}((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$. Ad motum autem ipsum cognoscendum sufficit aduertisse conuersionem in plagam VQ continuare quamdiu fuerit $ank(my+nx)^2 > bmk(ny-mx)^2$ seu tangens ang. MEA $> \sqrt{\frac{bm}{an}}$; qui terminus oritur si ponatur $v = 0$. Nam si nauis habet motum in directione IV, eo progredietur siue accelerato siue retardato; sin autem alicubi quiescat, tum vi fluuii propelletur in eandem directionem a P ad Q. Si igitur vbique inter P et Q fuerit tang. MEA $> \sqrt{\frac{bm}{an}}$, tum nauis ex P egressa ad Q vsque pertinget, quae omnia abunde sufficiunt ad motum cognoscendum. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

893. Si nauis perueniat vltra V in situm $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}\ \bar{c}$ omnia manebunt vt ante, praeterquam quod anguli $\bar{V}Z\bar{i}$ sinus poni debeat $= -x$. Ita vis nauem in i vlterius versus Q vrgens erit vt $an((my-nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2-bm((ny+mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$.

Coroll. 2.

894. Motum ergo hunc vltra V versus Q continuabit, quoad fuerit $na(my-nx)^2 > mb(ny+mx)^2$ seu tang. $\underline{m}\ \underline{e}\ \underline{a} > \sqrt{\frac{mb}{na}}$. Sit angulus cuius tangens est $\sqrt{\frac{mb}{na}}$, $= \bar{\alpha}$, fiet $m\ \underline{e}\ \underline{a} > \alpha$ seu $ZIA - VZi > \alpha$. Quo igitur nauis ad Q vsque peruenire queat, oportet vt angulus VZQ non maior sit quam $ZIA - \alpha$.

Coroll. 3.

895. Si ponamus porro motum nauis circa polum Z in P inchoasse, quo eiusmodi motus per V ad Q vsque continuetur necesse est vt sit $PZV + ZIA > \alpha$, denotante $\underline{\alpha}$ angulum cuius tangens est $\sqrt{\frac{mb}{na}}$: nisi enim hoc fuerit, motus nequidem incipere poterit; hic autem omnes angulos ponimus acutos, alias tangentes accipere oportet.

Coroll. 4.

896. Si recta ZV per medium fluuium transeat, atque requiratur vt nauis ita a ripa P sponte ad ripam Q fluuium transeundo appellat, oportebit vt sit ang. VZQ $=$ ang. ZIA $-$ ang. α. Si enim ang. VZQ minor foret, tum nauis ad Q ingenti vi appelleret, quod est euitandum.

Coroll. 5.

897. Si ergo detur fluuii latitudo PQ, atque tam ipſa ſpecies nauis, quam angulus AIZ, ex illa aequalitate inuenta reperietur longitudo funis ZV ad traiectum requiſita, indeque punctum Z in medio flumine accipiendum cui nauis eſt alliganda.

Coroll. 6.

898. Si ponatur ſemiſſis latitudinis fluuii $PS = QS = b$: et interuallum $ZS = z$, angulique QZV ſinus x, coſinus y, erit $\frac{b}{z} = \frac{x}{y}$. cum igitur ſit $\surd\frac{mb}{na} = \frac{my - nx}{ny + mx}$; erit $mz\surd na - nb\surd na = nz\surd mb + mb\surd mb$, hincque $ZS = z = \frac{b(n\surd na + m\surd mb)}{m\surd na - n\surd mb}$; ac longitudo funis $ZV = f = \frac{b\surd(na + mb)}{m\surd na - n\surd mb}$.

Coroll. 7.

899. Perſpicuum autem eſt ante omnia eſſe debere $m\surd na > n\surd mb$, ſeu $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$ ſiue $\frac{b}{a} < \frac{m}{n}$. Ducta ergo in rectangulo ABDC diagonali BC angulus ZIA maior eſſe debebit quam angulus ABC. Ceterum perinde eſt in quonam puncto rectae AB funis alligetur.

Coroll. 8.

900. Quo nauis ceteris paribus celerrime a ripa P ad ripam Q pertingat, efficiendum eſt vt acceleratio in puncto medio V fiat maxima. At ſi nauis in V quieſceret, foret vis eam verſus Q pellens vt $m^2 na - mn^2 b$, quae quantitas ſit maxima ſi poſito $\frac{m}{n} = t$ fuerit $at^3 - 2bt^2 - 2at + b = 0$

Co-

Coroll. 9.

901. Quoniam autem longitudo nauis a multum excedit latitudinem b, erit circiter $t = \frac{m}{n} = \sqrt{2} + \frac{3b}{4a}$. Hancobrem expediet angulum AIZ accipere 60° circiter, si quidem propemodum latitudo b fuerit triens vel quadrans longitudinis a. Hocque ipso multum excedet angulus AIZ angulum ABC.

Coroll. 10.

902. Si figura nauis fuerit quadrata vt sit $b = a$, fiet $t = \frac{m}{n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ seu angulus AIZ erit 69°, 6′; vnde fit $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ et $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$. Hincque porro prodit longitudo funis $= f = b\sqrt{(15+6\sqrt{5})} = 5{,}331\,b$. angulusque VZQ fit 10°, 48′.

Coroll. 11.

903. Si angulus AIZ seu eius tangens t detur, reperietur commodissima ratio longitudinis nauis a ad latitudinem b, ex hac aequatione $\frac{b}{a} = \frac{t^3 - 2t}{2tt - 1}$: ex qua intelligitur necessario esse debere $tt > 2$ seu angulum AIZ maiorem quam 54°, 45′, fit autem sponte $t > \frac{b}{a}$ vti requiritur. Erit vero $f = \frac{b(1+tt)\sqrt{(tt-1)}}{t\sqrt{(2tt-1)} - t\sqrt{(tt-2)}}$.

Coroll. 12.

904. Si constituatur angulus AIZ sexaginta graduum seu $t = \sqrt{3}$, satis commoda figura nauis prodibit, orietur enim $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ seu b ad a vt 53 ad 153 proxime. Deinde longitudo funis ZV reperietur $= f = \frac{4b\sqrt{2}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$

=

$= \frac{b(\surd + 1)\surd 2}{\surd 3}$ ſeu proxime $f = 2,64222\,b$ ſiue $\frac{f}{b} = \frac{87}{14}$. Angulus vero PZQ erit $44^\circ, 28'$.

Scholion.

905. Modus hic fluuium ſine remis et velis traiiciendi admodum eſt commodus et ad vſum accommodatus, cum facile ſit eas conditiones adimplere, quibus traiectio non ſolum poſſibilis, ſed etiam celerrima reddatur. Imprimis autem commendandus eſt caſus in vltimo corollario erutus, pro quo funis non adeo longus requiritur atque proportio inter longitudinem nauis $AB = a$ et latitudinem $AC = b$, valde commode reperta eſt; fere ſcilicet longitudo tripla prodiit latitudinis. Facile autem perſpicitur cum traiectus a ripa P vsque ad ripam Q fuerit peractus, quomodo viciſſim a Q ad P curſus ſit inſtituendus; funes ſcilicet ZI et OB in altero latere CD affigendi. Verum quo haec transmutatio facilius fieri queat, expediet punctum I in ipſo puncto H aſſumere quo obtinebitur, vt in reditu non opus ſit hunc funem deligari alioque loco fimare; perinde enim eſt quo loco I capiatur. Deinde notandum eſt funem BO tam longum eſſe accipiendum, vt angulus quem directio funis ZI cum KH producta conſtituet ſit 60 graduum. Punctum O autem neque nimis propinquum puncto I neque nimis ab eo remotum accipi debet, ne minima funis OB elongatione angulus AIZ notabiliter diminuatur; minime autem angulus AIZ immutabitur ſi capiatur $OI = IB$. Denique etiamſi elongatione funis BO angulus AIZ quantitatem aſſignatam ammittat, tamen ſtatim remedium afferri poterit

dc

de quo non opus eſt plura monere. Progredior itaque ad motum nauium in fluuio determinandum, quae quidem vt ante circa punctum fixum ſunt mobiles, ſed poſitionem ſuam reſpectu funis non tenent conſtantem; ſcilicet mobiles eas ponam circa ambo puncta Z et I libere.

PROPOSITIO 86.

Problema.

906. *Si nauis* ABDC *in fluuio ope funis* IZ *ita puncto fixo* Z *ſit alligata, vt non ſolum circa punctum* Z *ſed etiam circa punctum* I *in quo funis naui eſt annexus, ſit mobilis; determinare motum huius nauis ab alliſione fluuii oriundum.* T.XXXVII. fig. 1.

Solutio.

Repraeſentet recta ZV directionem fluuii, ſitque celeritas fluuii debita altitudini k: naui vero iterum tribuamus figuram vt ante cuius ſectio quaeuis horizontalis ſit parallelogrammum rectangulum ABDC: Sitque longitudo AB $= a$, latitudo AC $= b$, et profunditas ſub aqua $= c$. Punctum I vero, in quo funis naui eſt affixus ſit in latere AB, ponaturque EI $= i$. Verſetur nunc nauis in ſitu ABDC, quo anguli AIZ ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$, hicque motum habeat progrediendi per arcum IVQ centro Z deſcriptum, cuius radius ſeu longitudo funis IZ ſit $= f$; angulique IZV, quem directio funis cum curſu fluminis conſtituit ſinus ſit $= x$, coſinusque $= y$, ac celeritas puncti I debita ſit altitudini v. His praemiſſis erit ex ſolutione praecedentis problematis vis quam fluuius lateri AB in directione EF imprimit $= \frac{ac((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2}{kkk}$ vis vero, quam

latus

latus AC in directione HK excipiet, erit $= bc((ny+mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Nunc cum nauis sit mobilis circa punctum I, nauis eiusmodi situm acceperit necesse est, quo momenta virium respectu puncti I sese destruant. Est vero momentum prioris vis respectu puncti I $= aci((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$, et momentum alterius contrarie agens $= \frac{bbc}{2}((ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Quamobrem habebitur ista aequatio $\frac{(my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v}}{(ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v}} = \frac{b}{\sqrt{2ai}}$, ex qua aequatione valor ipsarum m et n indeque angulus AIZ, ad quem nauis sponte se composuit. Momentum porro harum virium ad nauem circa polum Z conuertendam per arcum IVQ erit vt ante $= \frac{Macfn}{V}((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcfm}{V}((ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$ posito pondere nauis $= M$ et volumine partis submersae $= V$. Per priorem vero conditionem haec formula simplicior euadit, proditque ob $V = abc$ momentum conuersionis circa $Z = \frac{Mf}{bb}(bn-2im)((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$; quamdiu igitur erit $bn > 2im$ conuersio secudum IVQ accelerabitur. At prior aequatio euoluta dat $m = \frac{by\sqrt{k} - x\sqrt{2aik} + \sqrt{2aiv}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$ atque $n = \frac{-y\sqrt{2aik} + bx\sqrt{k} - b\sqrt{v}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$. Ex his fit $((my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 = \frac{bb(k-2x\sqrt{kv}+v)}{b^2+2ai}$; atque $bn-2im = \frac{(b^2+2i\sqrt{2ai})(x\sqrt{k}-\sqrt{v}) + by(\sqrt{2ai}-2i)\sqrt{k}}{\sqrt{(b^2+2ai)(k-2x\sqrt{kv}+v)}}$. Nauis igitur tamdiu in arcu IVQ progredi perget quoad fuerit $b^2x + 2ix\sqrt{2ai} + by\sqrt{2ai}\,2biy > 0$, id quod per se ita se habet, antequam nauis ad V pertingit. At cum vltra medium fluvii erit progressa, peerueneritque in situm $abdc$, anguli VZi sinus erit negatiuus; Quare si ponatur etiam anguli VZi sinus $= x$ et cosinus $= y$, nauis in arcu VQ eousque progredietur, quoad fuerit $by\sqrt{2ai} - 2biy > b^2x +$

$2ix$

$2ix\sqrt{2ai}$: Vltimus igitur terminus erit punctum Q, existente anguli QZV tangente $= \frac{b\sqrt{2ai} - 2bi}{b^2 + 2i\sqrt{2ai}}$: siue angulus QZV erit excessus duorum angulorum, quorum maioris tangens est $\frac{b}{2i}$ minoris vero tangens $= \frac{b}{\sqrt{2ai}}$; quae ad motum cognoscendum sufficiunt. Q. E. I.

Coroll. 1.

907. Si punctum I in ipso puncto A capiatur ita vt sit $i = \frac{a}{2}$, nauis e puncto P egressa non vltra punctum V pertinget; fiet enim hoc casu anguli QZV tangens $= 0$.

Coroll 2.

908. Simili modo nauis non vltra punctum V progredietur, si fuerit $i = 0$, seu si punctum I in quo funis alligatur in puncto medio lateris AB capiatur: ex quo manifestum est dari punctum I inter A et E e quo nauis funi alligata vltra V maxime progrediatur.

Coroll. 3.

909. Si autem quaeratur locus puncti I, quo angulus VZQ fiat maximus, reperitur ista aequatio $(bb + 4ii)\sqrt{a} = (2bb + 4ai)\sqrt{2i}$ seu haec $16ai^4 - 32a^2i^3 - 24ab^2i^2 - 8b^4i + ab^4 = 0$ quae dat $b^2 = \frac{12ai^2 \pm 4i(2i - a)\sqrt{2ai}}{a - 8i}$; debet igitur esse $a > 8i$ seu $EI < \frac{1}{8} AB$.

Coroll. 4.

910. Si sumatur $a = 18i$ fiet $b^2 = \frac{648}{10} i^2$ seu $b = \frac{18i}{\sqrt{5}} = 8,05i$ vnde fit $a : b = \sqrt{5} : 1$: et $EI = \frac{8}{9} AE$, hincque anguli VIQ prodit tangens $= \frac{3\sqrt{5}}{16}$, seu angulus VZQ erit $22°, 45$: vnde ex data fluuii latitudine longitudo funis determinabitur.

Coroll. 5.

911. Quo minor accipitur EI pars ipſius AB eo minor prodit latitudo nauis AC; atque ſi punctum I prorſus in E incidat, tum latitudo AC omnino euaneſcet. Omnia igitur puncta I quibus nauis vltra V progredi poterit, continentur inter E et punctum quoddam intra E et A ſitum cuius diſtantia ab E eſt octaua pars longitudinis AB.

Scholion.

912. Hoc igitur etiam modo ſine remis et veis traiectus per fluuium inſtitui poterit; at ingentem cautionem adhiberi oportet tam in figura nauis idonea eligenda quam in punctis Z et I inueniendis, in quibus funis ZI eſt firmandus. Ponamus enim eiusmodi nauem, eligi cuius longitudo AB ſe habeat ad latitudinem vt $\sqrt{5}$ ad 1, punctum I in quo funis alligari debet, ita aſſumendum erit, vt diſtet a puncto medio E longitudinis AB interuallo A $I = \frac{1}{18}$ AB. Deinde ſi ponatur latitudo fluuii $PQ = 2b$ haec latitudo biſecari debet in S vt ſit $PS = QS = b$; anchoraque in Z firmanda eſt, vt ZS ſit perpendicularis ad PQ, atque interuallum ZS tantum accipi oportet vt angulus SZP ſeu SZQ fiat $22°, 45'$. Erit igitur ZS $= b.2,3847 = \frac{31}{13}b$ proxime; atque longituto funis ZP $= b.2,5859 = \frac{75}{29}b$ proxime. Abſoluto autem tranſitu per fluuium ex P in Q contra ex Q in P peruenietur, alligando funem in lateris CD puncto e regione ſito inter C et F quod ab F diſtet interuallo $= \frac{1}{18}$ CD. Hicque modus praxi videtur eſſe conuenientiſſimus.