tum effectum praestarent, cum duabus conditionibus perfecte satisfieri debeat. Primo enim ea resistentiae vis destrui debet, quae nauem de cursu rectilineo declinare conatur, haecque est vis normalis ad semitam GL ex resolutione vis resistentiae orta; haec igitur vis infinitis modis per ventum destrui potest, dummodo vis normalis ad semitam GL ex resolutione vis venti orta illi sit aequalis et contraria, neque ad hoc refert, in quo loco axis AB ea sit applicata. Deinde vero vis resistentiae etiam quae tendit ad nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendam est destruenda, quare momentum vis venti respectu huius axis aequale et contrarium esse debebit momento vis resistentiae respectu eiusdem axis cui conditioni iterum innumeris modis satisfieri potest. At quo vtraque vis resistentiae destruatur vnicus datur modus, quem proin tentando deprehendere quouis casu vix est sperandum. Hancobcausam vtilissimum erit naues ita construere, vt centrum resistentiae in iis fixum teneat locum, atque adeo in centrum grauitatis incidat, tum enim, cum vis resistentiae nauem conuertens sit nulla, satis facile erit alteram vim destruere.

Scholion 2.

839. Posuimus in solutione huius problematis proram A in partem viae CL contrariam cadere ei, ex qua ventus V venit, similis autem euadet solutio, si prora in eandem plagam declinet a recta GL, cuiusmodi casus in figura hic allegata est repraesentatus. Si enim vt ante fuerit anguli declinationis cursus AGL sinus $= s$ cosinus $= r$, anguli

Tab. XXXIV. fig. 2.

vero

vero MRB, quem media directio resistentiae cum axe nauis constituit, sinus $= \sigma$ et cosinus $= \varrho$; vela $\underline{e}\ \underline{f}$ ita expandi debebunt vt sint normales ad RM. Sit porro vt ante planities velorum $= gg$, et venti celeritas $= \sqrt{c}$, atque anguli VvC quem directio venti cum via describenda CL constituit sinus $= \mu$, cosinusque $= v$; ac tandem superficies plana $\underline{u}\ \underline{u}$ exprimat vim resistentiae absolutam. Manifestum est priorem casum ad hunc reduci, si fiant s et σ negatiua, quoniam anguli AGL et MRB in contrarias partes cadunt. Hinc igitur prodibit celeritas, qua nauis vniformiter in directione GL progredi poterit, $= \frac{(\nu(s\sigma + r\varrho + \mu(r\sigma - s\varrho))g\sqrt{c}}{2bu + (s\sigma + r\varrho)g}$ quae eadem expressio prodiisset si tantum μ positum fuisset negatiuum. Si ergo anguli GnR qui est excessus anguli MRB supra AGL, sinus ponatur p et cosinus $= q$, erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, atque celeritas nauis ad motum vniformem in directum conseruandum prodibit $= \frac{(\nu q + \mu p)g\sqrt{c}}{2bu + qg}$, quae a superiore forma hoc tantum discrepat, quod sinus anguli VvC, qui est $= \mu$ negatiue sit sumtus.

Coroll. 1.

840. Quoniam sinus anguli VRf, qui est $= \nu q + \mu p$ semper debet esse affirmatiuus, debebit esse $\nu q + \mu p > 0$, at $\nu q + \mu p$ est cosinus differentiae angulorum VvC et RnC quare horum angulorum differentia debet esse recto minor.

Coroll. 2.

841. Angulus ergo VvC poterit esse recto maior, dummodo rectum minore angulo excedat, quam est an-

 gulus

poſitis erit $p = r\sigma - s\varrho = \frac{rs(b^2-f^2)}{\surd(s^2b^4+r^2f^4)}$ et $q = s\sigma + r\varrho = \frac{s^2b^2+r^2f^2}{\surd(s^2b^4+r^2f^4)}$, ex quibus reperitur celeritas huius nauis, qua vniformiter in directione GL incedere poterit ſeu $Vv = \frac{(v(s^2b^2+r^2f^2)-(urs(b^2-f^2))g\surd c}{28\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$. At ſi prora A dirigatur in eam regionem rectae CL ex qua ventus venit, tum manentibus omnibus vt ante, erit tantum μ in negatiuum transmutato celeritas nauis progreſſiua $= \frac{(v(s^2b^2+r^2f^2)+\mu rs(b^2-f^2))g\surd c}{28\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$. Tab. XXXIV. fig. 2.

Coroll. 1.

845. Maiorem igitur nauis obtinebit celeritatem, ſi vt in caſu poſteriore axis nauis AB ita inclinetur vt prora A in eam plagam collocetur, ex qua ventus venit, ceteris paribus ſcilicet manente eadem curſus obliquitate.

Coroll. 2.

846. Anteferendi igitur ſunt illi curſus in quibus prora A ſupra viam GL cadit, iis quibus prora A infra GL cadit: quia non ſolum iſtae obliquitates cum maiore celeritate ſunt connexae ſed etiam multo plures obliquitates locum inueniunt.

Coroll. 3.

847. Poſita autem obliquitate curſus deorſum ſpectante vt in priore caſu, limites omnium curſuum erunt $s = 0$ et haec aequatio $\nu s^2b^2 + \nu r^2f^2 = \mu rs(bb-ff)$ ex qua anguli obliquitatis curſus tangens fit $= \frac{\mu(b^2-f^2) \pm \surd(\mu^2(b^2-f^2)^2 - 4\nu^2f^2b^2)}{2\nu b^2}$ vnde bis angulus VRf euaneſcit.

Coroll. 4.

848. Caſu autem altero, quo prora A ſupra CL con-

conuertitur omnes obliquitatis curſus gradus continentur inter hos limites, quorum alterum conſtituit obliquitatis tangens $= 0$, alterum quo iſta tangens aequatur $- \frac{\mu(b^2 - f^2) \pm \sqrt{(\mu^2(b^2-f^2)^2 - 4\nu^2 f^2 b^2)}}{2\nu b^2}$ vbi ſignum $-$ limitem prioris caſus praebet; ita vt ſuperius ſignum $+$ tantum pro hoc caſu valeat.

Coroll. 5.

849. Quod autem manentibus ceteris ad directionem venti attinet, manifeſtum eſt generaliter eum ventum celerrime nauem propellere cuius directio ad planitiem velorum ſit normalis. Celeritas enim ceteris paribus eſt directe vt ſinus anguli, quem directio venti cum velis conſtituit.

Coroll. 6.

850. Si vela in infinitum augerentur tum prodiret celeritas nauis $= \nu \sqrt{c} \mp \frac{\mu r s(b^2 - f^2)}{s^2 b^2 + r^2 f^2} \sqrt{c}$ ex quo nauis maximam obtinebit celeritatem ſi anguli obliquitatis curſus fiat $= \frac{f}{b}$; niſi angulus VvC fuerit vehementer exiguus.

Coroll. 7.

851. Sin autem quaereretur curſus obliquitas, qua nauis a dato vento propulſa in data directione celerrime promoueatur, aequatio reperitur vehementer perplexa, vt nil inde concludi queat; quae autem facto g infinito praebet $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$. Ipſa autem aequatio generaliter determinans angulum AGL eſt ſequens pro caſu priore, prora ſupra CL ſita $\mu g(r^2 f^2 - s^2 b^2)\sqrt[4]{(s^2 b^4 + r^2 f^4)} = \begin{matrix} +\mu s^4 \\ +\mu r^2 s^2 \\ +\nu r s^3 \end{matrix} b^4 - 3\nu r s f^2 b^2 \begin{matrix} -2\mu r^4 \\ -\mu r^2 s^2 \\ +\nu r^3 s \end{matrix} f^4$.

Coroll. 8.

852. Si venti directio Vv congruat cum directione motus praescripta CL, erit $\mu = 0$, et $\nu = 1$ vnde prodit $rs(s^2b^4 - 3f^2b^2 + r^2f^4) = 0$; quae tres casus continet primo $s = 0$, quo cursus obliquitas euanescit motusque fit celerrimus, secundo $r = 0$, quo nauis in latus promouetur, motusque fit tardissimus, tertio denique fit $s^2 = \frac{ff(3bb-ff)}{b^4-f^4}$ et $s = \frac{f\sqrt{(3b^2-f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4)}}$ atque $r = \frac{b\sqrt{(b^2-3f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4}}$ quo casu fit celeritas $= \frac{g\sqrt{c}}{\frac{r(fs+rb)}{\sqrt{fb}}\sqrt[4]{27}+g}$, quae est omnium minima, si quidem sit $b^2 > 3ff$.

Exemplum 2.

853. Habeat nauis alteram proprietatem supra memoratam (832) vt centrum Resistentiae R in nauis centrum grauitatis G incidat, atque si vt ante resistentia prorae et lateris exprimatur figuris planis ff et bb, vt sit anguli MRB tangens $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$ seu $\sigma = \frac{s^2b^2}{\sqrt[2]{(s^4b^4+r^4f_4)}}$ et $\rho = \frac{r^2f^2}{\sqrt{s^4(b^4+r^4f^4)}}$, atque resistentia in hoc cursu seu uu sit $= \sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}$, vnde erit $u = \sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)}$. His positis habebitur $p = r\sigma - s\rho = \frac{sr(sb^2-rf^2)}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$, et $q = s\sigma + r\rho = \frac{s^3b^2+r^3f^2}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$: ex quibus reperitur celeritas nauis, qua in directione G L aequabiliter progredietur $= \frac{(\nu(s^3b^2+r^3f^2)-\mu(s^2rb^2-sr^2f^2))g\sqrt{c}}{2s\sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)^3}+(s^3b^2+r^3f^2)g}$. At si prora A dirigatur in alteram partem rectae CL, haec eadem expressio valebit praeterquam quod loco μ scribi debeat $-\mu$. Tab. XXXIV Fig. 1.

Scholion 3.

854. Insigne atque maxime vtile problema hic occurrit, quo ex datis directione venti VR et via a naui describenda CGL seu ex dato angulo CvV definienda est cursus obliquitas seu angulus AGL, quo fiat vt nauis celerrime promoueatur. Problema quidem hoc iam resoluimus pro exemplo secundo (851); verum ad eiusmodi aequationem pertigimus, ex qua obliquitas desiderata difficillime erui potest, neque etiam approximationibus vti licet cum aequatio ad rationalitatem reducta fiat sedecim dimensionum. Maior autem difficultas orire tur, si idem problema pro exemplo secundo tentare vellemus. Interim tamen rem generaliter considerando quodammodo cursus maxime lucrosus aestimari poterit. Cum enim celeritas inventa sit $= \frac{(\nu q + \mu p) g \sqrt{c}}{2 g u + q g}$ in qua expressione μ est sinus et ν cosinus anguli dati VvC, p vero et q sinus et cosinus anguli RnG qui ab angulo quaesito AGL pendet; uu autem exprimit resistentiam, quam nauis cursu obliquo perfert, quo adeo etiam a p et q pendet. Quamobrem cum nexus inter u et p non constat, per methodum maximorum et minimorum valor ipsius p vel q definiri non poterit, quo celeritas nauis fiat maxima. At quoniam numerator expressionis istius scilicet $\nu q + \mu p$ praebet sinum anguli VRf, quem directio venti VR cum planitie velorum ef constituit, manifestum est hunc numeratorem non mutari, si positio velorum ef ita immutetur vt angulus VRf fiat obtusus, deinceps posito angulo priori VRf, hoc est, si obliquitas cursus ita sumatur, vt media directio resistentiae RM intra angulum VvC cadat quem

Tab. XXXIV fig. 2.

casum

casum in figura citata expressimus in qua vt ante VR est directio venti, RM media directio resistentiae intra Vv et Cn posita. Cum igitur hoc casu sinus anguli VRf cum praecedente congruat, ideoque numerator fractionis velocitatem nauis exprimentis sit idem, denominator spectari debet, qui est $28u + qg$, de quo primum patet u minorem habere quantitatem quam casu praecedente, quoniam cursus hic minus est obliquus, atque resistentia augetur, quo magis obliquitas crescit. Altera vero denominatoris pars qg in qua q, est cosinus anguli GnR, vel crescere potest vel decrescere, vel etiam eadem manere. Si enim obliquitas est valde parua tum quidem angulus GnR fit perquam exiguus, ideoque q, fere sinui toti aequatur, at vero quoque, si obliquitas vehementer fit magna, tum pariter angulus GnR decrescit, obliquitate enim ad 90 gradus aucta, media directio resistentiae iterum in directionem cursus incidit. Quocirca ista cursus mutatione, cum q aeque augeri ac dimininui potuerit, ex altera parte $28u$, quae certe minor est facta concludendum est istam cursus dispositionem antecedenti esse praeferendam eaque nauem celerius promoueri. His igitur praenotatis videamus, quomodo per approximationem cursus maxime velox definiri queat, si quidem datae fuerint venti directio VR et via absoluenda GL seu angulus VvC cuius sinus est μ et cosinus ν. Tab. XXXIII fig. 2.

PROPOSITIO 81.

Problema.

855. *Si data fuerit venti directio* VR *atque itineris conficiendi via* GL, *determinare cursus obliquitatem* A GL, *qua navis maxima celeritate promoueatur.* Tab. XXXIII. fig. 2.

 Solutio

Solutio.

Sit anguli $V v C$, qui eſt datus, ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$, curſus autem obliquitatis AGL ſinus $= s$ et coſinus $= r$; quos definire oportet, vt prodeat celeritas nauis maxima. At celeritas nauis, quam ſub hac curſus obliquitate habebit eſt $= \frac{(\nu q + \mu p) g \sqrt{c}}{2 s u + q g}$; in qua expreſſione p et q ſunt ſinus et coſinus anguli $R n G$, qui eſt exceſſus anguli MRB ſuper angulum AGL. Primo autem notandum eſt hunc angulum $R n G$, ab initio creſcente obliquitate creſcere, at ad certum tantum terminum augeri, quem cum attigerit, ſi obliquitas curſus magis augeatur, iterum diminui, reſiſtentiam vero ſeu quantitatem u continuo augeri, quamdiu obliquitas creſcat. Ponamus igitur eum aſſumtum eſſe curſum obliquum AGL cui maximus angulus $R n G$ reſpondeat; manifeſtum eſt, ſi obliquitas aliquantillum vel augeatur vel diminuatur angulum $R n G$ quantitatem ſuam conſeruare, et proinde p et q non mutari. Hinc ergo perſpicuum eſt ſi angulus AGL magis augeatur, tum ob creſcentem u velocitatem nauis diminui, contra vero augeri, ſi obliquitas curſus AGL diminuatur. Ex quo ſatis luculenter ſequitur ad motum celerrimum obtinendum angulum AGL minorem accipi debere eo, cui angulus $R n G$ maximus reſpondet. Sit igitur hic angulus AGL minor ſeu talis, quo creſcente angulus $R n G$ creſcat; ponamusque angulum AGL aliquantillum augeri, ita vt eius ſinus s creſcat particula ds; augebitur igitur etiam anguli $R n G$ ſinus p aliqua particula, quae ſit $= m ds$; coſinus vero q decreſcet particula $\frac{m p ds}{q}$; reſiſtentia vero ita creſcat vt u augeatur particula $a ds$ eritque ideo $dp = m ds$; $dq = -\frac{m p ds}{q}$ et $d u =$

$u = nds$. Ex his autem prodibit celeritatis quae est $= \frac{(\nu q + \mu p) g\sqrt{c}}{28u + qg}$ augmentum $= \frac{(\mu g m + 28(nu(\mu q - \nu p) - 28 nq(\mu p + \nu q))g ds\sqrt{c}}{q(28u + qg)^2}$. Cuius fractionis numerator si fuerit affirmatiuus, tum nauis aucta obliquitate cursus vti posuimus reale accipiet augmentum, at si numerator fuerit negatiuus tum celeritas decrescet. At est $\mu q - \nu p$ sinus anguli VRM et $\mu p + \nu q$ eiusdem anguli cosinus. Quare si ponatur anguli V R M sinus $= x$ et cosinus $= y$, aucta cursus obliquitate nauis celerius progredietur si fuerit $\mu g m + 28 m u x - 28 n q y > 0$ tardius autem si fuerit $\mu g m + 28 m u x - 28 n q y < 0$. Hancobrem quo nauis celerrime progrediatur, oportet cursum ita institui, vt sit $\frac{\mu g m}{28} = nqy - mux$. Ex qua reperitur angulum VRM differentiam esse debere duorum angulorum, quorum maioris sinus sit $= \frac{nq}{\sqrt{(n^2q^2 + m^2u^2)}}$, minoris vero sinus $= \frac{\mu g m}{28\sqrt{(n^2q^2 + m^2u^2)}}$. Sunt autem omnes quantitates quae hic occurrunt, affirmatiuae, vnde non difficile erit obliquitatem cursus aestimare quouis casu oblato. At commodissime negotium conficietur, si pro quouis casu angulus quicunque inter limites assignatos accipiatur, atque inquiratur, vtrum eo aliquantillum aucto celeritas augeatur, an diminuatur, ex quo statim colligetur, vtrum obliquitas desiderata excedat assumtam, an ea sit minor Q. E. I.

Coroll. 1.

856. Si assumatur primum obliquitas nulla seu cursus ponatur directus, erit $p = 0$ et $q = 1$ atque $u = f$, siquidem planum ff exprimat resistentiam cursus directi; celeritasque corporis erit $= \frac{\nu g\sqrt{c}}{28f + g}$ si nunc obliquitas infinite

te parua conſtituatur erit $du = nds = 0$, atque manente $dp = mds$, erit celeritatis incrementum $= \frac{(\mu gm + 28\mu mf)gds\sqrt{c}}{(28f+g)^2}$.

Coroll. 2.

857. Apparet igitur niſi ſit $\mu = 0$ ſeu niſi ventus a puppi veniat, curſum directum non celerrimum producere motum, ſed curſum quendam obliquum eſſe praeferendum. Excepto tamen eo caſu quo $\frac{dp}{ds}$ in curſu directo euaneſcit, quippe quo curſus directus ſemper habet maximum minimumue ſed non ſemper eius modi quale hic deſideratur.

Coroll. 3.

858. Euaneſcat in curſu directo $\frac{dp}{ds}$, vt m et n ſint quantitates infinite paruae; atque curſus directus celerrimum motum producet, ſi fuerit $\mu gm + 28\mu mf < 28\nu n$, hoc enim caſu, minima obliquitate celeritas diminueretur.

Coroll. 4.

859. Si igitur euaneſcente s ſimul euaneſcet $\frac{dp}{ds}$ curſu directo nauis celerrime progredietur quamdiu anguli VvC tangens $\frac{\mu}{\nu}$ non excedit hunc limitem $\frac{28n}{m(28f+g)}$. At ſi $\frac{dp}{ds}$ non euaneſcat euaneſcenre s curſus obliquus ſemper eſt praeferendus, niſi ventus a puppi flet.

Coroll. 5.

860. Si ergo fuerit ſaltem pro obliquitatibus minimis $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$, et $u^2 = V(s^4b^4 + r^4f^4)$ erit ſi s minimum ſeu infinite paruum $\frac{dp}{ds} = -1 = m$, et $\frac{du}{ds} = 0$, vnde celeritas

leritas etiam maior prodibit ſi prora A in partem oppoſitam rectae GL declinetur. Hoc enim caſu euanſcente s fit $\frac{\sigma}{\rho} < \frac{s}{r}$.

Coroll. 6.

861. At caſu quo fit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sb^2}{rf^2}$, qui magis nauibus congruit erit $\frac{dp}{ds} = \frac{b^2-f^2}{f^2}$ euaneſcente s; Quare cum $b > f$ his caſibus curſus obliquus ſemper erit vſurpandus, niſi ventus directe in curſus directionem incidat.

Scholion.

862. Quanquam in caſu, quo ponitur $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$ in ipſo initio ſeu obliquitatibus minimis p negatiuum induit valorem, tamen quam primum fit $\frac{s}{r} > \frac{f}{b}$ eius valor fit affirmatiuus. Quamobrem etiam in hoc caſu, niſi angulus VvC ſit minimus, obliquitas curſus ad ſuperiorem partem rectae GL erit dirigenda, ſiquidem nauis celerrime debeat progredi. Neglectis igitur anomaliis iſtis, quae tantum in minimis obliquitatibus hoc ſolo caſu ſe offerunt, ad motum velociſſimum obtinendum obliquitas debebit dirigi in ſuperiorem partem lineae GL ita vt angulus AGL, eo modo quo rem ſumus contemplati fiat affirmatiuus. Deinde autem ex circumſtantiis allatis facile colligitur, quo maior ſit angulus VvC eo maiorem capi debere obliquitatem. At obliquitatem nunquam maiorem accipi conuenit quam eſt ea cui reſpondet angulus RnG maximus, ſi igitur iſte angulus obliquitatis AGL pro quo maxima eſt differentia inter angulos MRG et AGL ponatur α graduum, et angulus RnG β graduum, limites

intra

intra quos angulus obliquitatis curſus A G L contineri debet erunt 0° et α°, quorum limitum ille 0° locum habet ſi angulus V v C euaneſcat, alter autem ſolus in vſum vocari poteſt quando angulus V v C proxime erit $90 + \beta$ graduum, ſi enim angulus V v C maior fuerit quam $90 + \beta$ graduum tum nauis nequidem in directione data GL promoueri poteſt, ex quo cum angulo V v C $= 0$ grad. respondeat angulus A G L $= 0$ grad. atque angulo V v C $= 90 + \beta$ graduum reſpondeat angulus A G L $= \alpha$ graduum, ſatis prope pro angulis V v C intermediis conuenientes angulos A G L aſſignare licebit, idque eo facilius praeſtabitur ſi pro vno alteroue angulo V v C intermedio per methodum datam angulus AGL aptiſſimus definiatur ſola autem aeſtimatione ad veritatem ſatis prope accedetur, ſi pro angulo V v C continente $\underline{x}$ gradus capiatur curſus obliquitas AGL $= \frac{\alpha x}{90 + \beta}$ graduum vel forte $\frac{\alpha x^2}{(90 + \beta)^2}$ graduum, vel generalius $\frac{\alpha x^n}{(90 + \beta)^2}$ graduum; quae formula in vſum vocari poterit, ſi pro dato quodam angulo V v C angulus A G L maxime congruus actu fuerit determinatus, eo enim exponens $\underline{n}$ definietur. Anguli autem α et β ex data nauis proprietate facile determinabuntur; ſi enim fuerit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$ erit anguli R n G tangens $= \frac{sr(bb - ff)}{s^2 b^2 + r^2 f^2}$; qui ideo erit maximus ſi fuerit $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$; ſeu anguli A G L tangens $= \frac{f}{b}$ Tum autem erit anguli M R B tangens $= \frac{b}{f}$; atque differentiae R n G tangens $= \frac{bb - ff}{2fb}$; ſeu erit $\beta = 90^\circ - 2\alpha$ vnde pro varia relatione inter quantitates ff et bb, quae eam inter ſe rationem habent, quam habet reſiſtentia nauis in directione G A mota ad reſiſtentiam nauis in directione

GE

GE mota, anguli α et β cognoſcentur, quod quo facilius pateat ſequentem tabellam adiungere viſum eſt

$hh = ff$	$\alpha = 45°$	$\beta = 0°, 0'$
$hh = 2ff$	$\alpha = 35°, 16'$	$\beta = 19°, 28'$
$hh = 3ff$	$\alpha = 30°, 0'$	$\beta = 30°, 0'$
$hh = 4ff$	$\alpha = 26°, 34'$	$\beta = 36°, 52'$
$hh = 5ff$	$\alpha = 24°, 6'$	$\beta = 41°, 48'$
$hh = 6ff$	$\alpha = 22°, 12'$	$\beta = 45°, 36'$
$hh = 7ff$	$\alpha = 20°, 42'$	$\beta = 48°, 36'$
$hh = 8ff$	$\alpha = 19°, 28'$	$\beta = 51°, 4'$
$hh = 9ff$	$\alpha = 18°, 26'$	$\beta = 53°, 8'$
$hh = 10ff$	$\alpha = 17°, 33'$	$\beta = 54°, 54'$

Cum autem quo maior eſt angulus β, eo magis aduerſus ventum curſus inſtitui queat, liquet quo maior fuerit longitudo nauis reſpectu latitudinis eo magis aduerſus ventum nauigari poſſe; tenet enim ff ad hh proxime rationem latitudinis nauis maximae ad ipſius longitudinem. In nauibus autem vſu receptis proxime eſt $hh = 4ff$, ex quo eae aptae ſunt aduerſus ventum nauigare, ita vt angulus VvI fiat fere $53°, 8'$ ſeu angulus VvC, $126°, 52'$ id quod cum experientia egregie conuenit qua naues obſeruantur ad 11 Rhombos ſeu $123\frac{3}{4}$ gradus dirigi poſſe.

PROPOSITIO 82.

Problema.

863 *Definire curſum a naui inſtituendum, quo celerrime in regionem, ex qua ventus venit prouehatur.* Tab. XXXV. fig. 1.

Solutio.

Sumatur primo ad lubitum obliquitas nauis AGL cuius anguli ſinus ſit s, coſinus $= r$: veniatque ventus in directione Vv pariter data, et quaeratur poſitio lineae GL reſpectu Vv vt curſus in regionem ex qua ventus venit, maxime properetur. Qaeritur ergo angulus VvL cuius ſinus ſit $= \mu$ coſinus $= \nu$. Ex angulo autem obliquitatis curſus dato AGL, dabitur media directio reſiſtentiae RM quae cum directione curſus GL angulum faciat RnG cuius ſinus ſit $= p$ coſinus $= q$. Iam poſitis vt ante celeritate venti $= \sqrt{c}$, planitie velorum $= gg$, et plano reſiſtentiam exprimente $= uu$, erit celeritas qua nauis in directione GL ingredietur $= \frac{(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2bu + qg}$; vbi ν fecimus negatiuum, quia angulum VvL acutum ponimus. Cum igitur nauis incedat in directione GL angulum acutum cum directione venti Vv conſtituente, dum ſpatium vL percurrit, in regionem, ex qua ventus venit, acceſſit ſpatio Ll, ducta vl perpendiculari ad directionem venti Vv et Ll ipſi parallela. Hinc nauis hoc curſu ad uentum accedit celeritate $= \frac{\nu(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2bu + qg}$ quae maxima eſſe debet. Cum ergo obliquitas curſus AGL data ponatur, differentietur ea ponendis μ et ν variabilibus, atque differentiale ponatur $= 0$: prodibit autem ob $d\nu = -\frac{\mu d\mu}{\nu}$ iſta aequatio $(\mu^2 + \nu^2)p = 2 \mu \nu q$, ex qua oritur $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q+1}{p}$. Quare cum anguli L$v$V tangens ſit $= \frac{q+1}{p}$ erit angulus ipſe LvV $= 90° - \frac{1}{2}$Rng ſeu angulus Lvl aequabitur ſemiſſi anguli Rng. Naue itaque ad curſus obliquitatem datam AGL inſtructa, angulus RnG biſecetur recta np, nauisque vento ita obuertatur

tur vt directio venti Vv ad illam rectam np sit normalis. Quoniam vero est $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q+1}{p}$ erit $\mu = \frac{q+1}{\sqrt{(2+2q)}} = \sqrt{\frac{(q+1)}{2}}$, et $\nu = \sqrt{\frac{1-q}{2}}$; vnde celeritas qua nauis ad ventum accedit erit $= \frac{(1-q)g\sqrt{c}}{2(28u+qg)}$. Si nunc quaeratur angulus obliquitatis cursus AGL, qui reddat hanc expressionem $\frac{1-q}{28u+qg}$ maximam, tum habebitur ille nauis cursus, quo omnium celerrime nauis in regionem venti promouetur. Ante omnia autem intelligitur ex praecedentis problematis solutione cursus obliquitatem minorem accipi debere, quam est ea, cui angulus RnG maximus respondet. Ac si ponamus dum p crescit elemento dp, interea crescere u elemento ndp, prodibit anguli RnG tangens $\frac{p}{q} = \frac{28n}{28u+g}$: quae expressio cum maior fuerit, quam tangens anguli RnG, si est maximus, tum ipse angulus maximus seu proxime minor erit adhibendus. Quouis autem casu particulari oblato ista quaestionis pars, quae ad ipsius obliquitatis cursus determinationem spectat, facile resoluetur. Q.E.I.

Coroll. 1.

864. Cum angulus VRe, sub quo ventus in vela irruit sit complementum anguli nRv ad rectum, aequabitur quoque angulus VRe semissi anguli GnR eiusque ideo sinus erit $\sqrt{\frac{1-q}{2}}$.

Coroll. 2.

865. Deinde etiam notandum est angulum VvL quem directio venti cum via describenda GL constituit cum angulo VRe angulum rectum conficere.

Coroll. 3.

866. Cum celeritas qua nauis verſus ventum appropinquat ſit $= \frac{(1-q)g\sqrt{c}}{2(28u+qg)}$, manifeſtum eſt celeritatem hanc fore $=0$, ſi $q=1$ maximamque ſi $q=0$ ſeu angulus $R n G$ rectus. At cum angulus $R n G$ vltra datum limitem creſcere nequeat, intelligitur maximam fore acceſſionem ad ventum ſi angulus $R n G$ capiatur maximus. Quamobrem obliquitas curſus tanta eſt ſumenda, vt angulus reſpondens $R n G$ a valore ſuo maximo ſenſibiliter non diſcrepet.

Coroll. 4.

867. Si ergo angulus obliquitatis curſus, cui maximus reſpondet angulus $R n G$, ponatur $=\alpha$, et maximus angulus $R n G = \beta$, debebit angulus AGL aliquantulum minor accipi quam α; ita vt $R n G$ maneat $=\beta$.

Coroll. 5.

868. Ponamus angulum AGL ipſi angulo α aequalem vel aliquantillum minorem capi, erit angulus $R n G = \beta$; vnde ob triangulum $R n v$ iſoſceles fiet angulus $V v L = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, et angulus VRA, quem plaga venti cum directione ſpinae nauis AB conſtituit erit $= 90 - \alpha \frac{1}{2}\beta$ grad. vel aliquanto maior. Angulus autem quo ventus in vela incidit ſeu $V r e$ erit $= \frac{1}{2}\beta$.

Coroll. 6.

869. Hinc igitur ope tabellae ſupra datae, qua relatio inter α et β continetur, cuiusuis nauis datae curſus ita dirigi poterit, vt iter maxime aduerſus ventum inſtituatur.

Scho-

Scholion.

870. In his propoſitionibus aſſumſimus nauem iam habere eam celeritatem, qua a vento ſollicitata ſecundum datam directionem progredi queat; neque ſolliciti fuimus, vnde eam celeritatem acquiſiuerit. Quamobrem etiam iſtae proprietates, quas inuenimus locum non habent, niſi navis iam eam ipſam celeritatem, quam ipſi tribuimus aliunde ſit nacta. Hae ſcilicet propoſitiones reſpiciunt motum vniformem, quo nauis a vento propulſa prouehi poteſt neque ex iis productis et acceleratio motus, ſi nauis vel in quiete fuerit poſita, vel datam celeritatem in data directione habuerit, cognoſci poteſt, ſed iſtas propoſitiones praemitere conueniens viſum eſt quo intelligitur, quomodo nauis, ſi iam quandam celeritatem ſit conſecuta, eam ope venti conſeruare eaque in directum progredi queat. Quare cum haec ſatis ſint explicata, inueſtigabimus quomodo nauis a vento motum accipere eumque augere poſſit: in quo primum erit inquirendum ſi nauis quamcumque iam habeat celeritatem in data directione atque quamuis teneat curſus obliquitatem, quomodo datus ventus in vela vtrunque diſpoſita irruens motum illum afficiat, eum vel augendo vel diminuendo vel directionem ipſam alterando vel denique curſus obliquitatem immutando. Deinde ſi hoc fuerit definitum, licebit eiusmodi quaeſtiones tractare, quibus pro data diſpoſitione nauis et velorum totus motus requiritur, quem nauis a vento ſollicitata accipiet; ex iisque demum iudicari poterit vtrum nauis eiusmodi motum, quem ipſi in his praecedentibus propoſitionibus iam inſitum poſuimus, nanciſci queat, an ſecus? et ſi fieri pote-

 rit

rit vt ipsi talis motus concilietur simul modus constabit, quo eiusmodi motus sit producendus. In nauigatione quidem praecipue motus vniformis in directum requiritur, qui si iam fuerit formatus, quomodo conseruetur exposuimus; sed hoc nullius foret vsus, nisi constaret, quanam nauis directione et qua velorum dispositione, si nauis primum quieuerit, ea ad eiusmodi motum perennem redigi queat. Deinde vero etiam nosse oportet, quomodo ex vno motu constante alius quicunque datus sit formandus, cuiusmodi quaestiones in nauigatione maximi sunt momenti.

PROPOSITIO 83.

Problema.

Tab. XXXV. fig. 2.

871. *Si nauis quaecunque* AEBF *cursum teneat obliquum* AGL, *ita vt eius centrum grauitatis* G *motu progressiuo sit praeditum in directione* GL. *Sollicitetur autem haec nauis a vento in directione* VL *flante et in vela* $\underline{ef}$ *impingente; determinare immutationem tam motus quam obliquitatis cursus inde ortam.*

Solutio.

Sit nauis celeritas progressiua, quam eius centrum grauitatis G habet secundum directionem GL debita altitudini v seu $= \sqrt{v}$. Sitque anguli obliquitatis cursus AGL sinus $= s$ et cosinus $= r$ posito semper sinu toto $= 1$. Deinde centrum grauitatis velorum in quo vis venti collecta est concipienda sit in axis AB puncto r existente $Gr = y$; atque velorum positio ef cum axe AB constituat angulum Are seu Brf cuius sinus sit $= m$ et cosinus $= n$; planities vero velorum sit $= gg$. Denique venti celeritas sit

=

$= \sqrt{c}$, atque anguli VrB, quem directio venti VrL cum axe nauis AB conſtituit, ſinus ſit $= \mu$ et coſinus $= \nu$. His praemiſſis vis venti habebit directionem rs normalem ad ſuperficiem velorum ef, eritque anguli Ars ſinus $= n$ et coſinus $= m$: anguli vero rsG ſinus erit $= nr - ms$, et coſinus $= ns + mr$: et anguli Vrf ſinus erit $= n\mu + m\nu$; anguli tandem Gtf, quem poſitio velorum ef cum directione motus GL conſtituit, ſinus erit $= ns + mr$; vnde quantitas vis venti erit $= ((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 gg$, ſeu tanti aeris voluminis ponderi erit aequalis. Quare ſi pondus nauis ponatur $= M$, et volumen partis aquae ſubmerſae $= V$ erit ipſa vis venti $= \frac{M((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V}$. Sit porro pro hoc curſu obliquo centrum reſiſtentiae R exiſtente $GR = z$; et RM media directio reſiſtentiae, quae cum AB angulum MRG conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$ et coſinus $= \varrho$, erit anguli RnG ſinus $= r\sigma - s\varrho$, et coſinus $= s\sigma + r\varrho$, reſiſtentia vero aequalis ſit illi, quam pateretur ſuperficies plana uu eadem celeritate directe contra aquam mota; ex quo vis reſiſtentiae erit $= uuv$, ſeu $=$ ponderi $\frac{Muuv}{V}$. Quamobrem nauis a duabus potentiis ſollicitabitur quarum prior ex vento orta eſt $= \frac{M((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 gg}{784\, V}$ ac nauem pellit in directione rs; poſterior vero eſt vis reſiſtentiae $= \frac{Muuv}{V}$, quae nauem vrget in directione RM. Quo nunc immutatio motus progreſſiui eruatur, vtraque vis in ipſo grauitatis centro applicata eſt cenſenda, vtraque reſoluenda in binas laterales, tangentiales ſcilicet, in directione GL ſitas et normales directionem GN tenentes: prodibit autem vis vrgens centrum grauitatis

tatis G in directione G L, ſeu vis tangentialis $= \frac{M(ns+mr)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2g^2}{784\,V} - \frac{M(s\sigma+r\rho)uuv}{V}$. At vis vrgens in directione GN ad directionem motus GL normali, ſeu vis normalis erit $= \frac{M(nr-ms)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2g^2}{784\,V} - \frac{M(r\sigma-s\rho)uuv}{V}$. Ponatur breuitatis gratia vis tangentialis $=$ T et vis normalis $=$ N; et concipiatur centrum grauitatis G ſua celeritate $\sqrt{v}$ progredi per ſpatiolum $Gg = dx$, accelerabitur interea ita vt ſit $dv = \frac{Tdx}{M}$. Simul vero a vi normali N cogetur viam rectilineam deſerere, atque lineam Ggl conuexam verſus GL deſcribere, cuius in G radius curuaturae GN erit $= \frac{2Mv}{N}$; ſeu dum elementum $Gg = dx$ percurrit deflectet a curſu GL verſus l angulo $= \frac{Ndx}{2Mv}$. Vtraque praeterea vis, ſiquidem neutrius directio per centrum grauitatis G tranſit, conuertere conabitur nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, et vis venti quidem proram A verſus a rotari coget, eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2g^2y}{784\,V}$. Vis reſiſtentiae contra conuerſionem in plagam oppoſitam producet, proramque A verſus α rotabit eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{M\sigma uuvz}{V}$; ex quo conficietur momentum virium ad proram A verſus α conuertendam $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2g^2y}{784\,V} - \frac{M\sigma u^2vz}{V}$ quae quantitas ſi fuerit negatiua, prora in plagam Aα circa G agetur Q. E. I.

Coroll. 1.

872. Si ergo ope gubernaculi impedienda ſit conuerſio nauis circa axem verticalem, tanta vis a gubernaculo exerceri debet, cuius momentum reſpectu eiusdem

axis

axis verticalis aequale sit et contrarium illi momento ex vi venti et resistentia orto.

Coroll. 2.

873. Si tam centrum virium a vento exceptarum r quam centrum resistentiae R in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis G transeuntem incidat, tum vis gyratoria prorsus euanescit, nullaque vi opus est gubernaculi ad directionem AB conseruandam.

Coroll. 3.

874. Nisi autem tam y quam z euanescat, perspicuum est directionem AB sine actione gubernaculi conseruari non posse. Nam etiamsi illius momentum fieri possit $= 0$, tamen mutata celeritate, id cessabit esse $= 0$.

Coroll. 4.

875. Si celeritas nauis in G ponatur $= 0$, tum resistentia euanescet, atque ventus motum naui imprimet in directione rs: quae cum nunquam cum directione venti Vr angulum acutum conficere possit, initium motus non aduersus ventum institui poterit.

Coroll. 5.

876. Si autem nauis habeat motum in directione GL celeritate Vv, directio motus conseruabitur, si vis normalis N euanescit, hoc est si fuerit $((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 g^2 = \frac{\gamma\vartheta + (r\sigma - s\rho)u\psi v}{nr - ms}$. Si autem illa quantitas maior fuerit quam haec, tum angulus VLλ fiet maior,

contra vero si illa quantitas minor fuerit quam haec, angulus VLλ minor euadet.

Coroll. 6.

877. Nisi ergo talis motus nauis sit producendus cuius directio GLλ cum directione venti VL constituat angulum VL*l* vel rectum vel acutum, eiusmodi motus facile producetur, efficiendo vt prima motus directio *rs* fiat in data directione, id quod fieri potest, atque tum vt vis normalis euanescat; quod fiet cursum directum instituendo.

Coroll. 7.

878. At si motus desideretur aduersus ventum, ita vt angulus VLλ fiat acutus id initio motus obtineri nequit. Quare post initium cursus ita dirigi debet vt sit perpetuo 784 $(r\sigma - s\varrho)u^2v > (nr - ms)((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + m\nu)\sqrt{v})^2 g^2$. Hoc autem commodissime obtinebitur, si saltem circa motus initium vela *ef* teneantur normalia ad cursum praesentem GL, vel etiam reclinantia vt angulus *rt*L fiat obtusus. Quando vero iam aliquam celeritatem acquisiuerit nauis, tum vela pedetentim in eum situm disponi poterunt, qui ad motum aequabilem requiritur.

Coroll. 8.

879. In hoc autem cursu, qui aduersus ventum institui debet, probe notandum est, directionem prorae GA perpetuo intra directiones VL et Lλ esse conseruandam, hincque cursum obliquum esse tenendum, quo angulus R*n*G fiat maximus.

Coroll. 9.

880 Si ponatur anguli Vrf ſinus $= \zeta$; ſeu $n\mu + m\nu = \zeta$ atque anguli rtL ſinus $= \eta$ et coſinus $= \theta$, ita vt ſit $\eta = ns + mr$ et $\theta = nr - ms$; itemque anguli RnG ſinus $= p = r\sigma - s\varrho$ et coſinus $= q = s\sigma + r\varrho$; erit vis tangentialis accelerans $T = \frac{M\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mqu^2v}{V}$ et vis normalis curſum GL verſus l deflectens $N = \frac{M\theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mpu^2v}{V}$.

Coroll. 10.

881. Quo igitur curſus nauis aduerſus ventum quantum fieri poteſt dirigatur, oportet vt ſit, quemadmodum iam monſtrauimus $784pu^2v > \theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2$; ſimulque vt motus acceleretur debet eſſe $\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 p^2 > 784\, qu^2v$: ex quibus multo magis eſſe debet $p\eta > q\theta$ ſeu ang. $RnG > rsG$. ſiue angulus Rzr debet eſſe acutus.

Coroll. 11.

882. Debebit igitur praeter angulum Rzr acutum quoque eſſe $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} < \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{pv}{\theta}}$; ſimulque $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} > \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{qv}{\eta}}$. Vtrique autem conditioni maxime ſatisfit ſi curſus obliquitas ea accipiatur, cui reſpondet maximus angulus RnG, tum enim p maximum, q vero minimum obtinet valorem.

Scholion

883. Pendet igitur cognitio motus, quem datus ventus datae naui dato modo directae praeter celeritatem venti, velorum quantitatem atque reſiſtentiam praecipue a duobus angulis, primo ſcilicet ab angulo Vrf quem venti