$=(m\sqrt{c}-(m\nu-n\mu)\sqrt{v})^2 g^2 = (\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 g^2$, tantum ſcilicet aeris volumen pondus habebit vi iſti propellenti aequalem; ſiue cum aeris grauitas ſpecifica ſe habeat proxime ad aquam vt 1 ad 800 ſeu 1 ad 784, quam poſteriorem rationem vſurpabimus quia 784 eſt numerus quadratus, nobiſque radicis extractione eſt opus, pondus aquae vi illi aequale volumen habebit $=\frac{(v\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 gg}{784}$. Exprimat nunc ſuperficies plana ff reſiſtentiam, quam nauis in curſu directo ab aqua patitur, ſeu ſuperficies plana ff eandem patiatur quam nauis, ſi directe contra aquam eadem celeritate impingeret. Hinc igitur erit vis reſiſtentiae aequalis ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $=ffv$, quoniam aquam quieſcentem aſſumimus. Ex his ergo ſi nauis maſſa ſeu pondus dicatur $=M$ et volumen partis ſubmerſae $=V$ erit vis nauem propellens in directione GL $=\frac{M(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 gg}{784V}$ vis autem repellens $=\frac{Mffv}{V}$; ex quibus conficitur acceleratio, dum nauis per elementum $Gg=dx$ progreditur, $dv=\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 g^2 dx}{784V}-\frac{ffvdx}{V}$. Tamdiu igitur nauis accelerabitur, quam diu fuerit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 g^2}{784}$ maius quam ffv; at quamprimum tantam acquiſiverit celeritatem $\sqrt{v}$ vt ſit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2 g^2}{784}=ffv$, quod quidem demum poſt ſpatium infinitum confectum eueniet, ſed mox tam prope iſtam celeritatem aſſequetur vt diſcrimen ſit inſenſibile. Hancobrem excepto motus initio nauis motu vniformi in directione GL curſuque directo promouebitur celeritate altitudini v debita, cuius valor ex ſuperiore aequatione reperitur $\sqrt{v}=\frac{\nu g\sqrt{c}}{28f+g}$ ita vt ipſa nauis celeritas ſe habitura ſit ad celeritatem venti vt νg ad $28f+g$. Q. E. I.

Co-

Coroll. 5.

807. Ceterum ſponte patet manente nauis diſpoſitione eadem, celeritatem venti eo fore maiorem quo minor fuerit angulus VCG: vnde ventus directe ſecundum CG ſeu a puppi vrgens naui maximam imprimet velocitatem.

Scholion. 1.

808. Ex his ſatis ſuperque intelligitur quantum interſit diſcrimen inter naues quae vento, easque quae remis propelluntur. In iis enim quae remis promouentur plurimum intereſt vt reſiſtentia quantum fieri poteſt diminuatur, cum celeritates impreſſae teneant rationem reciprocam ſubduplicatam reſiſtentiarum: contra vero in iis nauibus quae a vi venti propelluntur diminutio reſiſtentiae non tantum lucrum affert; ex quo in conſtructione nauium maximum oritur discrimen, prouti vel velis vel remis deſtinantur. Haec autem ipſa differentia in praxi, ſi naves vſu receptas intueamur, apprime obſeruata deprehendetur. Triremes enim ſeu eiusmodi naues, quae remis remouentur, partem anticam habent acutiſſimam, vnde reſiſtentia oritur perquam exigua. Alteram vero nauium ſpeciem vento deſtinatam videmus parte antica ſatis obtuſa praeditam, quae parum ſit idonea ad reſiſtentiam diminuendam. Ex his autem ſponte ſequitur, quommodo eiusmodi naues, quae tam remis quam vento coniunctim promoueri ſolent, comparatas eſſe oporteat, vt ſint maxime aptae; ſcilicet perſpicuum eſt medium quoddam eſſe eligendum inter vtramque ſpeciem tractatam. At hoc discrimen tantum etiamnum eſt petitum ex curſu directo, maius

maius deprehendatur cum curſus obliquos examini ſubiecerímus, ad quos naues velis inſtructae praecipue debent adaptari, cum contra in nauibus remis propellendis ad curſum obliquum omnino non opus ſit reſpicere. Ceterum ex modo ſolutionis facile erit calculum abſoluere, ſi praeter ventum etiam remi vrgeant, atque nauis coniunctim a remis et velis propellatur. Simili modo quilibet non difficulter calculum inſtituet, ſi motus non fiat in aqua quieſcente, ſed in fluuio, dummodo directiones fluuii et motus corporis congruant; atque curſus ſit directus; quamobrem huiusmodi inueſtigationibus diutius non adhaerebimus.

Scholion 2.

809. Quod hic ſuperficiem velorum perfecte planam poſuimus, id ſolutionem datam minime turbat etiamſi vela a vento in figuram concauam extendantur: in ſequenti enim libro quo velorum doctrina imprimis excutietur, demonſtrabitur ſemper velum planum aſſignari poſſe eandem vim excipiens, ita vt quae hic de velis planis afferuntur, aeque valeant pro velis, quemadmodum in praxi vſurpantur. Deinde etiam ſolutio ab experientia in hoc diſſentire videtur quod ventum maxime lucroſum ſtatuat eum, qui directe a puppi venit, cum tamen obſeruatione conſtet naues felicius a vento non nimis obliquo propelli. Ratio autem huius diſcrepantiae ſita eſt inconſueta collocatione velorum qua vela tum in puppi tum in prora tum etiam in medio nauis expandi ſolent: vnde facile colligitur, ſi ventus recta a puppi ad proram tendat, tum poſteriora vela anterioribus ventum adimere, atque impedire, quo-

 minus

minus ventus in vela anteriora impingere queat. Cum autem hoc non eueniat, si directio venti est obliqua, mirum non est ventum obliquum maiorem celeritatem producere solere quam directum. Sed haec tantum sunt intelligenda, si nauis pluribus malis sit instructa, hoc enim casu tantum illud incommodum locum habet, at si vnicus adsit malus, ventusque adeo libere in omnia vela incurrere possit, tum memoratus dissensus theoriae cum praxi non obseruatur, sed potius nauis eo celerius progredi deprehenditur, quo minus directio venti a directione cursus nauis aberrat. Eiusmodi autem dissensus apparentes saepius occurrunt praecipue in hac doctrina de motu nauium, sed semper si omnes circumstantiae probe perpendentur facile diluentur.

Scholion 3.

810. Hi igitur fere sunt casus, quibus naues cursu directo motuque rectilineo in aqua tam quiescente quam fluente incedere possunt, ad quem cursum requiritur, vt tum ipsius motus directio, tum media directio resistentiae tum directio vis sollicitantis tum etiam fluuii directio inter se congruant; atque in axem seu rectam a puppi ad proram ductam incidant. Quarum conditionum vnica si defecerit, vel cursus directus vel motus rectilineus turbabitur, euenietque vt vel motus directio ab axe nauis seu diametro longitudinali a puppi ad proram porrecta declinet, vel etiam centrum grauitatis cogatur in linea curua incedere, quae omnia probe inter se discernere, et quodque ex suis causis deriuare omni attentione erit opus. Interim ex traditis satis liquet si vis sollicitans directionem habeat secundum nauis longitudi-

tudinem, tum etiamſi curſus vehementer eſſet obliquus, tamen breui in curſum directum mutatum iri. Quando enim vis ſollicitans perpetuo in eandem plagam tendit, tum motus ſi quis affuerit obliquus mox tam deſtruetur, vt eius directio in directionem vis ſollicitantis incidat. Atque hinc fit, vt naues quae remis propulſantur, perpetuo ſecundum ſuam longitudinem progrediantur, cum directio vis remorum ſemper eo tendat, quamuis ſubinde ope gubernaculi directio curſus immutetur. Tum enim quaſi ad momentum tantum durat motus curuilineus, ſtatimque in directum tranſmutatur, cuius rei ratio potisſimum in reſiſtentia laterali eſt ſita, quae in his nauibus vehementer eſt magna, motumque obliquum ſtatim deſtruit. Atque ob hanc rationem curſus directus proprius eſt illi nauium ſpeciei, quae remis propelluntur; nam quoniam vis remorum in quamuis plagam aeque exerceri poteſt, atque motus ſecundum longitudinem ob minimam reſiſtentiam eſt facillimus, abſurdum foret huiusmodi naues ad motum obliquum inſtruere. Longe aliter autem comparata eſt ratio nauium, quae vento ad motum cientur, cum directionem venti non ad arbitrium formare liceat, ſed eo vento, quem fortuna ſuggerit, ad iter inſtitutum conficiendum vti oporteat. Quoties igitur euenit vt curſus intentus a directione venti tantopere diſcrepet, vt curſus directus omnino inſtitui nequeat, tum ad curſum obliquum eſt confugiendum, qui eo felicius vſurpabitur, quo propius verſus regionem vnde ventus flat nauigari poterit. In his igitur nauibus, quae vento propelluntur, praecipue curſus obliquus attendi debet, indeque potiſſimum regulae pro con-

 ſtru-

ſtructione et velificatione nauium ſunt petendae. Quamobrem iſtum curſum obliquum, quo nauis non ſecundum longitudinem ſuam progreditur, imprimis in iis nauibus examini ſubiiciemus, quae non remis ſed ſolo vento ad motum cientur.

PROPOSITIO 79.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 3. 811. *Si corpus ſeu nauis* AEBF *in aqua quieſcente acceperit curſum obliquum ſecundum directionem* GL *data cum celeritate, determinare tam ipſam viam, quam eius centrum grauitatis* G *deſcribet, quam vbique curſus obliquitatem, ſeu poſitionem axis longitudinalis* AB.

Solutio.

Sit AGL angulus declinationis curſus, quem directio motus GL cum poſitione axis longitudinalis BA ſeu ſpinae conſtituit, huiuſque anguli ſinus ponatur s; coſinus vero $= r$ celeritas autem corpori impreſſa ſecundum directionem GL debita ſit altitudini v. Deinde ſit RM media directio reſiſtentiae, quam corpus hoc motu obliquo ab aqua patietur, quae cum directione ſpinae ſeu axis nauis AB angulum MRB conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$, coſinus vero $= \varrho$; atque reſiſtentia quam nauis hac obliquitate in aqua mota patitur, tanta ſit, quantam pateretur ſuperficies plana uu eadem celeritate directe contra aquam in directione MR mota; vnde vis reſiſtentiae, qua corpus ſecundum directionem RM vrgebitur, aequalis erit ponderi molis aqueae, cuius volumen eſt $= uuv$ pendebunt autem quantitates σ, ϱ et u ab angulo obliquitatis

AG

AGL eiusve sinu s atque structura totius corporis. Quare si massa seu pondus totius corporis ponatur $=M$ atque volumen partis aquae submersae $=V$ erit vis resistentiae in directione RM vrgentis $=\frac{Muuv}{V}$; quae vis duplicem exeret effectum quorum alter consistit in motu progressiuo centri grauitatis G alterando, alter vero in corpore circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum convertendo. Ad priorem autem effectum inuestigandum oportet vim RM tanquam in ipso centro grauitatis G in directione sibi parallela GH applicatam concipere. Anguli igitur HGK, quem directio resistentiae GH cum directione motus GK constituit, sinus erit $=r\sigma-s\varrho$, atque cosinus $=s\sigma+r\varrho$. Hinc vis resistentiae quae est $=\frac{Muuv}{V}$ resoluetur in binas laterales GK, KH, quarum alterius GK directio in ipsam motus directionem GL incidit, altera KH vero ad hanc erit normalis: ex quibus vis tangentialis GK erit $=s\sigma+r\varrho\frac{Muuv}{V}$, et vis normalis KH $=\frac{(r\sigma-s\rho)Muuv}{V}$. Vis igitur tangentialis retardabit corporis motum, efficietque, vt dum corpus elementum spatii $Gg=dx$ percurrit, futurum sit $dv=-\frac{s\sigma+r\rho uuvdx}{V}$. Vis normalis autem corpus a semita rectilinea deflectet cogetque arcum circularem concauum versus regionem M describere, cuius radius erit $=\frac{2V}{(r\sigma-s\rho)u^2}$. Quod denique ad alterum effectum attinet, quo corpus a vi resistentiae conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G transeuntem, patet primo conuersionem fieri in regionem AF, ita vt per eam declinatio AGL magis augeatur, si quidem centrum resistentiae R intra centrum grauitatis G et proram

A cadat. Dicto autem interuallo $GR = z$, fiet momentum vis resistentiae ad hanc conuersionem producendam $= \frac{\sigma Muuvz}{V}$, quod momentum diuisum per ipsius corporis momentum inertiae respectu eiusdem axis verticalis per centrum grauitatis G transeuntis, dabit vim gyratoriam cui motus angularis momentaneus est proportionalis. Sin autem corpus motum angularem iam habuerit, tum ex vi gyratoria eius incrementum cognoscetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

812. Retardatio ergo motus eo erit maior, quo minor fuerit angulus HGK, hoc est quo minor fuerit differentia inter angulos GRM et AGL. Ex quo sequitur quo magis angulus GRM excedat angulum AGL eo fore diminutionem motus minorem.

Coroll. 2.

813. Quia porro plerumque resistentia eo fit maior, quo magis cursus obliquus a directo differt, seu quo maior fuerit angulus AGL, dummodo rectum non excedat, valor ipsius $\underline{uu}$ eo maior erit, quo maior fuerit angulus AGL, indeque eo maior motus retardatio orietur.

Coroll. 3.

814. Maxima igitur accedet motus retardatio, si angulus AGL fiat rectus, tum enim non solum valor ipsius $\underline{uu}$ omnium fiet maximus, siquidem resistentia lateralis multum superet resistentiam prorae. Sed etiam tum directio resistentiae RM in motus directionem incidet, quo fit vt $s\sigma + r\varrho$ maximum valorem obtineat, fiatque $= 1$.

Coroll.

Coroll. 4.

815. Cum radius curuedinis viae, in qua centrum grauitatis G incedet, fit $= \frac{2V}{(r\sigma - s\rho)u^2}$, corpus a directione fua impreffa GL deflectet; atque dum elementum fpatii $Gg = dx$ percurrit, deflectet angulo $= \frac{(r\sigma - s\rho)u^2 dx}{2V}$.

Coroll. 5.

816. Deflexio ergo a curfu rectilineo non pendet a celeritate corporis, fed tantum a curfus obliquitate. A curfus enim obliquitate pendet tum valor ipfius uu, tum etiam $r\sigma - s\rho$, feu finus differentiae angulorum MRG et AGL.

Coroll. 6.

817. Si igitur angulus MRG aequalis fiat angulo AGL, tum deflectio a curfu rectilineo omnino erit nulla, corpufque in linea recta progredi perget. At fi angulus MRG maior fuerit angulo AGL; tum deflectet verfus A, atque viam curuilineam Gl defcribet, inter GA et GL fitam. Sin autem fuerit angulus AGL maior angulo MRG; tum in partem oppofitam deflectet.

Coroll. 7.

818. Si centrum refiftentiae R incidat in ipfum grauitatis centrum G, tum vis gyratoria euanefcit, hoc igitur cafu pofitio axis AB perpetuo manebit fibi parallela. Vnde fi angulus MRG feu HGB aequalis fit angulo KGB, tum corpus non folum perget moueri in recta GL, fed etiam eadem curfus obliquitas conferuabitur.

Coro-

Coroll. 8.

819. Incidente autem R in G, ſeu quod perinde eſt, dummodo puncta G et R in eandem rectam verticalem cadant, ſi angulus MRG maior fuerit angulo AGL, tum curſus directio Ggl accedet ad poſitionem axis AB tandemque abibit motus in curſum directum, eousque conſeruandum, quoad motus per reſiſtentiam omnis extinguatur. Sin autem angulus MRG minor ſit angulo AGL tum curſus continuo magis deflectet a directo, ita vt tandem eius directio fiat normalis ad AB.

Coroll. 9.

820. Si autem centrum reſiſtentiae R non in G ſed verſus proram A cadat, tum corpus inter mouendum conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum, atque axis BGA gyrabitur ſecundum plagam AF; quo fiet vt obliquitas curſus ſeu angulus AGL perpetuo creſcat.

Coroll. 10.

821. Sin autem centrum reſiſtentiae R vltra G verſus puppim B cadat, tum conuerſio fiet in regionem oppoſitam; vnde curſus obliquitas mox tolletur, atque axis nauis AB conuertetur in ipſam motus directionem GL; quod ſi euenerit curſus directus conſeruabitur.

Scholion 1.

822. Ex his etiam intelligitur, ſi nauis AB, quae ante curſu directo promouebatur, a vi externa ita conuertatur, vt eius ſpina AB angulum obliquum AGL cum mo-

motus directione constituat, cuiusmodi mutationes inde sint oriturae. Praecipue enim respiciendum erit ad centrum resistentiae R, angulo obliquitatis cursus praesenti A G L respondens: quod si vltra centrum grauitatis G versus proram fuerit collocatum, tum nauis sese in pristinum situm restituet, cursumque directum recuperabit. Contra vero si centrum resistentiae R versus proram cadat, tum nauis non solum in cursum directum se non recipiet, sed etiam obliquitas cursus augebitur donec axis latitudinalis E F in cursus directionem incidat, quod si euenerit hoc situ in directum progredietur. Quocirca si centrum resistentiae R in puppim cadat, cursus directus aliquam censendus est habere firmitatem, cum nauis si ex eo depellatur, eo sponte se restituat; e contrario autem si centrum resistentiae R versus proram cadat, tum cursus directus quasi erit infirmus, eo quod si nauis quam minime de cursu directo declinetur, obliquitas continuo maior euadit. Quamobrem cursus directus difficulter conseruabitur, nisi habeat firmitatem, hoc est nisi centrum resistentiae R versus puppim cadat; minima enim vis sufficeret ad cursum directum penitus destruendum. Interim tamen etiamsi centrum resistentiae R in prora situm sit, tamen cursus directus ope gubernaculi B b conseruari poterit; eo maiore autem opus erit vi ad restitutionem in cursum directum, quo propius punctum R ad proram A ceciderit, simulque quo maior angulus G R M extiterit. Cursus autem obliquus sub angulo A G L in directum conseruari omnino nequit nisi centrum resistentiae R in G cadat, atque angulus H G K euanescat. Nam si R cadat in proram ne-

 qui

quidem ope gubernaculi motus rectilineus ſub eadem obliquitate conſeruari poteſt: quamuis enim gubernaculum in ſitum Bb deflexum motum conuerſionis nauis circa axem verticalem impedire queat, tamen per ipſam gubernaculi vim motus magis a via rectilinea GL declinabitur; Si quidem angulus MRG maior fuerit angulo AGL, provt id quidem in nauibus accidere debet. Quando autem centrum reſiſtentiae R in puppim cadit, tum fieri poteſt vt ope gubernaculi eadem obliquitas curſus, motusque rectilineus conſeruetur; id quod eueniet, ſi vis gubernaculi non ſolum motum gyratorium impediat, ſed etiam ſimul vim normalem deſtruat. Ex his omnibus perſpicuum eſt ad motum rectilineum ſub directione obliqua conſeruandum opus eſſe viribus externis inſigni cautione applicandis, qua quidem de re mox videbimus. Quo autem quovis caſu aeſtimari liceat, quomodo valores σ, ϱ et $\underline{u}\,\underline{u}$ vna cum interuallo $GR = z$ a data curſus obliquitate pendeant, exempla quaedam afferamus, in quibus iſti valores exhiberi poterunt.

Exemplum I.

823. Sit primo figura AEBF compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ad communem chordam AB diſpoſitis, ſeu ſint nauis omnes ſectiones horizontales huic figurae aequales; et ponatur radius circuli cuius arcus AEB et AFB ſunt portiones $= c$; atque cum centrum grauitatis G in medio chordae AB erit ſitum, ſit $AG = BG = a$; $EG = FG = b$, ita vt ſit $2bc = a^2 + b^2$; et ponatur breuitatis gratia $c - b$ ſeu $\sqrt{(c^2 - a^2)} = d$. Ex his cum propoſ. 58 comparatis prodibit interuallum $GR = z$

=

$=\frac{ra^3d}{c^3-rd^3}$ atque anguli GRM tangens $=\frac{\sigma}{\rho}=\frac{2sc^3-2rsd^3}{2rc^3-3rrc^2d+(rr-ss)d^3}$: tandemque vis resistentiae $=\frac{2v}{3cc}\sqrt{(4c^6-12r^3c^5d+9r^4c^4d^2+4r(r^2-3ss)c^3d^3-6rr(r^2-s^2)c^2d^4+d^6)}$ quae vis resistentiae, si cursus sit directus, prodit $=\frac{2(c-d)^2(2c+d)v}{3cc}$. Si ergo sit ff superficies plana eandem patiens resistentiam, quam patitur corpus in cursu directo erit $\frac{uu}{ff}=\frac{\sqrt{(4c^6-12r^3c^5d+9r^4c^4d^2+4r(r^2-3s^2)c^3d^3-6rr(r^2-s^2)c^2d^4+d^6)}}{(c-d)^2(2c+d)}$. Si fuerit obliquitas valde parua vt s prae r euanescat fiet $\frac{\sigma}{\rho}=\frac{2s(c^3-d^3)}{2c^3-3c^2d+d^3}=\frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(2c+d)}$, vnde erit $\varrho=1$ et $\sigma=\frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(u+d)}=\frac{a^2s}{b^2}$; et $z=\frac{a^3d}{c^3-d^3}=\frac{ab^2(a^2-b^2)}{a^4+3b^4}$. Ex quibus ponendo angulo AGL infinite paruo prodibit $s\sigma+r\varrho=1$ et $r\sigma-s\varrho=\sigma-s=\frac{s(a^2-b^2)}{b^2}$ atque $u^2=f^2$. Quibus substitutis habebitur $dv=-ffv\,dx$, et radius curuedinis curuae descriptae $=\frac{2bbV}{(a^2-b^2)ffs}$. atque momentum vis corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertens $=\frac{a^3(a^2-b^2)Mffsv}{(a^4+3b^4)V}$.

Coroll. 1.

824. Vis igitur gyratoria seu obliquitatem cursus adaugens eo erit maior, quo magis longitudo nauis excedit latitudinem. Atque simul eo maior erit curuatura viae, in qua corporis centrum grauitatis incedet.

Coroll. 2.

825. Patet etiam quo magis longitudo AB superet latitudinem EF, eo magis fore excessum anguli GRM supra angulum AGL. Namque angulus GRM se habet ad angulum AGL in duplicata ratione longitudinis ad latitudinem nauis.

Coroll. 3.

826. Si ergo latitudo EF aequalis fiat longitudini AB, seu $b = a$, quo casu figura abibit in integrum circulum, tum erit $c = a$ et $d = 0$; vnde centrum resistentiae in G cadet atque fiet $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s}{r}$, quamobrem cursus inceptus sine vlla mutatione continuabitur; id quod etiam eo patet, quod in circulo non detur cursus obliquitas.

Exemplum 2.

827. Sit figura nauis, praeterquam quod habeat planum diametrale AB id quod semper ponimus, ita comparata vt centrum resistentiae R perpetuo cadat in rectam verticalem per centrum grauitatis G transeuntem. Deinde si ponatur resistentia, quam patitur corpus cursu directo in directione GA motum, tanta, quantam pateretur figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota atque resistentia lateralis, quam sufferet, si in directione GE moueretur, tanta, quantam pateretur figura plana hh eadem celeritate in aquam impingens; habeat motus obliquus hanc proprietatem vt sit tangens anguli HGB $= \frac{\sigma}{\rho} = \frac{shh}{rff}$; seu anguli MRB siue HGB tangens teneat ad tangentem anguli obliquitatis cursus AGL rationem vt hh ad ff hoc est vt resistentia lateralis ad resistentiam prorae. Vis denique resistentiae sit $= v\sqrt{(s^2h^4 + r^2f^4)}$, in directione GH corpus vrgens; ita vt sit pro oblata obliquitate cursus $uu = \sqrt{(s^2h^4 + r^2f^4)}$. His igitur positis nulla omnino erit vis tendens ad corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendum et hancobrem positio axis nauis AB perpetuo in motu ma-

manebit eadem seu sibi parallela. Postmodum autem cum sit $\frac{\sigma}{\rho}=\frac{sbb}{rff}$, erit $\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}{rff}$ ideoque $\sigma=\frac{sbb}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ et $\rho=\frac{rff}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$; vnde fiet $s\sigma+r\rho=\frac{s^2b^2+r^2f^2}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ et $r\sigma-s\rho=\frac{rs(bb-ff)}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$: ex quibus elicitur primo retardatio motus $dv=-\frac{(s^2b^2+r^2f^2)vdx}{V}$ atque declinatio a semita rectilinea tanta erit vt arculum circularem Gg describat corpus cuius radius erit $=\frac{2V}{rs(bb-ff)}$.

Coroll. 1.

828. Cum anguli HGK sinus sit $=\frac{rs(bb-ff)}{\sqrt{(r^2f^4+s^2b^4)}}$ patet si fuerit $b>f$ tum semper angulum MRG seu HGB fore maiorem angulo AGL praeter duos casus quibus est vel s vel $r=0$, hoc est si declinatio cursus AGL fuerit vel nulla vel 90 graduum.

Coroll. 2.

829. Ex hac igitur formula intelligitur fore alicubi differentiam inter angulos HGR et AGL maximam, qui locus ibi erit, si fuerit tangens anguli AGL $=\frac{f}{b}$, seu $\frac{s}{r}=\frac{f}{b}$; tum autem auguli HGB seu MRG tangens erit $=\frac{b}{f}$.

Coroll. 3.

830. Quoniam autem hic nulla adest vis corpus conuertens, ideoque axis AB eandem positionem perpetuo retinet, cursus directio GL a vi normali continuo versus AB inflectetur ita vt tandem cursus in directionem mutetur

 Coroll.

Coroll. 4.

831. Eo magis autem motus centri grauitatis a linea recta deflectetur, quo maior fuerit differentia inter resistentiam prorae et resistentiam lateris, hoc est quo minorem nauis in cursu directo secundum directionem B A patiatur resistentiam, simulque quo maior fuerit resistentia quam pateretur in directione F E mota.

Scholion 2.

832. Non sine graui ratione casum hunc attulimus, videtur enim haec proprietas, quam corpori in aqua oblique promoto hic tribuimus, maxime competere in naues, quae vento propelli solent. Primo enim in huius generis nauibus ad id imprimis attenditur, vt centrum resistentiae ex prora versus puppim remoueatur, et quasi in ipsam rectam verticalem per centrum grauitatis ductam incidat. Deinde resistentia lateralis vehementer excedere solet resistentiam cursus directi, ex quo sponte sequitur, quod supra iam annotauimus, in cursu obliquo directionem resistentiae multo magis ab axe nauis declinare. Idem autem satis commode formula assumta declarat, per quam angulo obliquitatis cursus cuius tangens est $= \frac{s}{r}$ respondet angulus, quem media directio resistentiae cum spina nauis constituit, cuius tangens est $= \frac{s}{r} \cdot \frac{bb}{ff}$ qui angulus ergo euanescit, si obliquitas euanescit, atque in rectum abit, si nauis directio ad spinam fit normalis, quae apprime conueniunt cum figura nauium recepta. Tertio quod posuimus vim resistentiae esse $= \sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}$ id quidem mirifice in structuram nauium receptam quadrat; facto enim $s = 0$, et $r = 1$, qui est casus cursus directi, resistentia fit $= ff$ vti assumsimus, similique modo si obli-

liquitas curſus ad angulum rectum declinet egregie prodit reſiſtentia $= bb$. Praeterea vero patet ſi reſiſtentia lateralis bb reſiſtentiae prorae ff aequalis ponatur, tum omnium curſuum reſiſtentiam fore quoque eandem; ac tandem iſta expreſſio reſiſtentiae ita eſt comparata, vt cum angulo MRB cuius tangens eſt $\frac{sbb}{rff}$ apprime conſpiret, ſiquidem cum caſibus ſupra tractatis conferatur. At harum proprietatum probatio ſi non apodictica tamen eiusmodi, in qua acquiescere liceat, afferri poteſt, qua euincetur hanc tum directionis reſiſtentiae tum quantitatis rationem in nauibus locum inuenire. Reſoluatur ſcilicet motus ſecundum directionem obliquam GL factus in duos laterales; quorum alter fiat in directione GA cuius celeritas erit $= r\sqrt{v}$, alter vero in directione GE ad iſtam normali, cuius celeritas erit $= s\sqrt{v}$. Iam quamuis in calculo reſiſtentiarum non liceat motum decomponere tamen pro noſtro inſtituto parum a veritate aberrabitur, ſi corpus duplici motu altero in directione GA cum celeritate $r\sqrt{v}$, altero in directione GE cum celeritate $s\sqrt{v}$ ferri ponamus. Propter illum autem motum reſiſtentia quam patietur prora cenſeri poteſt ſe habere ad reſiſtentiam quam latus perferet vt rff ad sbb, vnde directio media reſiſtentiae GH angulum HGB conſtituet cuius tangens erit $= \frac{sbb}{rff}$, atque ipſius reſiſtentiae quantitas fiet $= v\sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}$ ſeu planum reſiſtentiam exprimens erit $uu = \sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}$. Ex hac conſideratione noua hypotheſis formari poterit ponendo reſiſtentiam prorae non vt hic fecimus $= rff$, ſed tantam, quanta foret ſi actu tanta celeritate promoueretur, ſcilicet $= r^2f^2$, ſimilique modo reſiſtentiam lateris $= s^2b^2$, vnde de fiet anguli HGB tangens $= \frac{s^2 b^2}{r^2 f^2}$, atque ipſa vis reſiſtentiae $= v \sqrt{(s^4 b^4 + r^4 f^4)}$ ſed haec altera hypotheſis quam prior plus a veritate recedit, ſi figura ponatur circulus. Nam hoc caſu ſemper fit anguli HGB tangens $= \frac{s}{r}$, atque reſiſtentia eſt conſtans ſeu $uu = ff = bb$; id quod indicat prior hypotheſis, poſterior autem ſecus. Quamobrem priorem hypotheſin poſteriori merito praeferre conuenit, ideoque eam in ſequentibus prae aliis conſiderabimus. Eo minus autem prior illa hypotheſis a veritate aberrabit, ſi reuera naues ita fuerint comparatae, vt ſemper quemcunque curſum obliquum teneant, centrum reſiſtentiae in ipſum nauis centrum grauitatis cadat; quoniam enim hoc ipſum hypotheſis poſtulat, dubium non eſt, quin ſi naues in hoc conuenerint, reliqua eo minus ſint erratura.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XXXVI fig. 1. 833. *Determinare vim venti et diſpoſititionem velorum quibus efficiatur vt nauis motu rectilineo ſub data curſus obliquitate uniformiter progrediatur; ſimulque velocitatem motus definire.*

Solutio.

Repraeſentet AEBF figuram nauis, in qua ſit G centrum grauitatis nauis, atque recta AB poſitio ſpinae ſeu axis longitudinalis a prora A ad puppim B ducti. Promoueatur autem centrum grauitatis G motu uniformi in directum per GL ſitque altitudo ipſius celeritati debita $= v$. Exhibet igitur angulus AGL curſus obliquitatem cuius ſinus ſit $= s$ coſinusque $= r$; quare cum nauis hanc obliquitatem conſtanter retinere ponatur, reſiſtentia quoque per-

perpetuo manebit eadem eiusque directio erit RM, quae cum AB angulum MRB constituat, cuius sinus sit $= \sigma$ et cosinus $= \varrho$, resistentia vero ipsa tanta sit, quantam pateretur figura plana uu planitie sua directe contra aquam eadem celeritate $\sqrt{2v}$ impingens; quae omnia dabuntur ex data nauis structura et data obliquitate, ita vt σ, ϱ et u^2 a b r, s et quantitatibus per nauem datis pendeant. Hinc erit vis resistentiae in directione RM vrgens $= uuv$, seu posito nauis pondere $=$ M et volumine partis submersae $=$ V, aequabitur vis resistentiae ponderi $\frac{Mu^2v}{V}$. Cum igitur haec vis non solum motum retardet, sed etiam directionem et cursus obliquitatem mutet, eam per vim venti destrui oportebit. Hoc enim si fuerit praestitum, perspicuum est cessante causa motum perturbante, nauem celeritatem suam $\sqrt{v}$ retinere, eaque vniformiter in directum incedere atque insuper obliquitatem suam immutatam conseruare debere. Aliter autem haec vis resistentiae prorsus destrui non potest, nisi directio vis venti incidat in directionem resistentiae RM, atque simul vis venti aequalis sit et contraria vi resistentiae. Cum igitur vis venti ad vela sit normalis, oportet vt superficies velorum ad rectam RM sit normalis, atque centrum grauitatis commune velorum in eandem verticalem cum centro resistentiae R cadat, siquidem vela semper centrum suum grauitatis in axe AB habent positum, sit itaque ef velorum directio, quae sit normalis ad MR, atque venti vis tanta esse debebit vt aequet vim resistentiae $\frac{Mu^2v}{V}$. Ponatur autem superficies velorum plana $= gg$, atque ventus flet in directione VR celeritate $\sqrt{c}$, sitque anguli VvC sinus $= \mu$ et cosinus $= \nu$. Ad vim venti vero cognoſcendam, definiendi ſunt ſinus angulorum VRf et Crf, quorum ille ſi fuerit $= m$ hic vero $= q$ erit vis venti in directione RN vrgens $= (m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg$ (794) ſeu aequalis erit ponderi $\frac{M(m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg}{784 V}$. At eſt ſin. C$rf$ $=$ coſ. Rnr $=$ coſ. (MRG $-$ AGL) et coſ. C$rf = -$ ſin. R$nr = -$ ſin. (MRG $-$ AGL; vnde prodit anguli Crf ſinus $q = s\sigma + r\varrho$ et coſinus $= s\varrho - \sigma r$. Deinde cum ſit ſin. VRf $=$ ſin. (Crf + CvV) erit $\underline{m} = v(s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$; ideoque vis venti $= \frac{M(v(s\sigma + r\rho)\sqrt{c} - \mu(r\sigma - s\rho)\sqrt{c} - (s\sigma + r\rho)\sqrt{v})^2 g^2}{784 V}$ cuius directio iam eſt contraria directioni reſiſtentiae RM, ſupereſt ergo tantum vt ipſa vis fiat aequalis vi reſiſtentiae $\frac{Mu^2 v}{V}$ vnde obtinebitur iſta aequatio $28\, u\sqrt{v} = v(s\sigma + r\varrho) g\sqrt{c} - \mu(r\sigma - s\varrho) g\sqrt{c} - (s\sigma + r\varrho) g\sqrt{v}$ ex qua aequatione vel celeritas venti $\sqrt{c}$ vel celeritas nauis $\sqrt{v}$ determinari poterit, ſi igitur ponamus velocitatem venti datam, reperietur celeritas, qua nauis ſub data obliquitate curſus AGL in data linea recta GL mouebitur $= \sqrt{v} = \frac{(v(s\sigma + r\rho) - \mu(r\sigma - s\rho)) g\sqrt{c}}{28u + (s\sigma + r\rho) g}$. Oportet autem vt ſit $\underline{m}$ ſeu eius valor $\nu(s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$ ſit affirmatiuus, nam ſi fieret negatiuus, ventus vela non in directionem RN ſed oppoſitam RM intenderet; quamobrem hi caſus probe ſunt excipiendi. Idem quidem ipſa expreſſio inuenta luculenter declarat, cum ſi $\underline{m}$ obtineat valorem negatiuum, quoque celeritas $\sqrt{v}$ fiat negatiua, quod indicio eſt tum nauem non in directione GL ſed contraria GC eſſe inceſſuram. Q. E. I.

Coroll. 1.

834. Si anguli RnG, qui eſt exceſſus anguli MRB ſupra angulum AGL, ſinus ponatur $= p$ et coſinus $= q$ erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, vnde reperietur celeritas nauis $\sqrt{v} = \frac{(\nu q - \mu p) g\sqrt{c}}{28u + qg}$.

Co.

Coroll. 2.

835. At $\nu q - \mu p$ exprimit cosinum summae angulorum, quorum sinus sunt p et μ. Quare ne iste cosinus vti requiritur fiat negatiuus, oportet vt summa angulorum $\sqrt{v}\,C + Rnv$ minor sit angulo recto.

Coroll. 3

836. Si ergo dentur venti directio VR, via describenda GL et obliquitas cursus AGL a qua velorum positio pendet, celeritas nauis eo maior erit, quo maior fuerit celeritas venti idque in eadem ratione.

Coroll. 4.

837. Si centrum resistentiae R locum habeat variabilem, pro variis cursus obliquitatibus, tum centrum grauitatis velorum debebit quoque mutari, quoniam vis venti vnico modo vim resistentiae destruere potest.

Scholion 1.

838. Nisi igitur centrum resistentiae R pro omnibus obliquitatibus cursus fixum teneat locum vnicus malus nullum praestabit vsum in variis cursibus obliquis conseruandus. Sin autem nauis pluribus malis fuerit instructa, tum vtique vela ita attemperari poterunt, vt eorum commune centrum grauitatis verticaliter puncto R quouis casu immineat; sed hoc casu pro quolibet obliquitatis cursu necesse foret locum centri resistentiae R exactissime nosse, id quod in praxi vix sperari potest. Tentando autem difficillimum foret vela malorum ita moderari, vt desidera-