Caput Septimum
DE
MOTV PROGRESSIVO CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

PROPOSITIO 74.
Problema.

762. Si corpus quodcunque plano diametrali verticali praeditum in aqua quiescente moueatur cursu directo, determinare eius motus quo moueri coepit, diminutionem a resistentia aquae ortam, atque celeritatem in singulis locis viae, quam describet. Tab. XXXII. fig. 1.

Solutio.

Quoniam corpus plano diametrali verticali praeditum ponitur, eius partis submersae, quippe quae per illud planum diametrale in duas partes similes et aequales diuiditur, centrum magnitudinis in ipso hoc plano situm erit ex quo etiam centrum grauitatis totius corporis in hoc plano collocatum esse oportet. Quia vero porro hoc corpus cursum directum tenere ponitur, ita vt moueatur secundum directionem horizontalem in ipso plano diametrali positam, media directio resistentiae in hoc ipsum planum cadet. Vis resistentiae horizontalis igitur directioni motus erit directe contraria, et hancobrem solum motum retardabit, directionem motus vero non afficiet. Vis resistentiae vero verticalis si quae adest neque motum corporis

poris neque eius directionem turbabit, ſed in corpore alleuando tantum conſumetur. Deinde niſi reſiſtentiae media directio per ipſum corporis centrum grauitatis tranſeat, corpus circa axem latitudinalem inclinabit, qua inclinatione neque motus directio neque poſitio ſpinae ſeu axis nauis a prora ad puppim ductus mutabitur. Quamobrem a reſiſtentia aquae motus aliter non turbabitur, niſi diminutione celeritatis; ac tam motus directio, quam curſus directus conſeruabitur. His notatis ſit AEBF ſectio corporis horizontalis per eius centrum grauitatis G facta, AB recta horizontalis in plano diametrali a prora A ad puppem B extenſa quae ſimul directionem motus repraeſentabit, atque recta CGL repraeſentabit viam in qua centrum grauitatis ingredietur, in qua ſimul tum prora A tum puppis B perpetuo ſitae manebunt. Ponamus nunc corpus egreſſum eſſe ex puncto C, vbi celeritatem initialem habuerit altitudini k debitam; dum vero corporis centrum grauitatis in G verſatur, ſit eius celeritas, qua in directione ſua GL moueri perget debita altitudini v. Sit porro maſſa ſeu pondus totius corporis $= M$, eius partis ſubmerſae volumen $= V$; reſiſtentiam vero hoc corpus motu directo in aqua progrediens tantam patiatur, quantam figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota pateretur; ex quo reſiſtentia, quam corpus, dum eius centrum grauitatis in G verſatur, patietur aequabitur ponderi voluminis aquae ffv, quod pondus ſe habebit ad pondus totius corporis M vt ffv ad V ita vt vis reſiſtentiae motum retardans futura ſit aequalis ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Sit nunc ſpatium $CG = s$, quod corpus ab initio motus

tus iam confecit, atque dum elementum Gg $= ds$ percurret tantum celeritatis decrementum vt sit $- dv = \frac{ffvds}{V}$; quae aequatio integrata dat $(\frac{k}{v} = \frac{ffs}{V}$ integratione ita instituta vt fiat $v = k$, posito $s = 0$, vti conditio quaestionis requirit. Erit ergo $\frac{k}{v} = e^{ffs:V}$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$, hincque porro $v = ke^{-ffs.V}$, ex qua formula celeritas corporis in singulis punctis viae, quam describit cognoscitur. Denique cum ipsa celeritas sit $= e^{-ffs:2V}\sqrt{k}$ erit tempusculum, quo elementum Gg $= ds$ percurretur $= \frac{e^{ffs:2V}ds}{\sqrt{k}}$, indeque tempus totum, quod insumsit ad spatium CG $= s$ absoluendum, erit $= \frac{2V(e^{ffs:2V}-1)}{ff\sqrt{k}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

763. Cum altitudo celeritati corporis in G debita sit $= ke^{-ffs:V}$, intelligitur corpus omnem motum nunquam esse amissurum: celeritas enim non euanescit, nisi ponatur $s = \infty$ hoc est corpus actu spatium infinitum absoluet antequam omnem perdat motum.

Coroll. 2.

764. Expressio celeritatis commode etiam in seriem potest transformari, per quam fiet $v = k - \frac{kffs}{V} + \frac{kf^4s^2}{2V^2} - \frac{kf^6s^3}{6V^3} + \frac{kf^8s^4}{24V^4} -$ etc. quae satis cito conuergit, nisi spatium s capiatur valde magnum.

Coroll. 3.

765. Deinde etiam perſpicitur decrementum celeritatis eo fore maius, dum corpus datum ſpatium s abſoluit, quo maior fuerit area ff, ad quam reſiſtentiam reduximus, et quo minor portio aquae fuerit ſubmerſa, hoc eſt quo leuius fuerit corpus.

Coroll. 4.

766. Si igitur plura corpora ſimilia eadem celeritate moueri incipiant, tenebit teſiſtentia ſeu area ff rationem ſubſesquiplicatam ponderum, partes ſubmerſae v vero ipſam rationem ponderum, vnde intelligitur corpora maiora minus retardari quam minora.

Coroll. 5.

767. Tempus etiam, quo corpus datum ſpatium $CG = s$ abſoluit, commode per ſeriem exprimitur, erit enim $= \frac{s}{\sqrt{k}} + \frac{f^2 s^2}{4V\sqrt{k}} + \frac{f^4 s^3}{24V^2\sqrt{k}} + \frac{f^6 s^4}{192V^3\sqrt{k}} +$ et. At ſi motu vniformi initiali progrederetur, nullam patiens reſiſtentiam, tum tempus per idem ſpatium s foret $= \frac{s}{\sqrt{k}}$; ex quo quanto maiori tempore propter reſiſtentiam opus ſit intelligitur.

Coroll. 6.

768. Si tempus, quo corpus datum ſpatium percurrit deſideretur in data temporis menſura, tum in expreſſione temporis $\frac{2V(e^{ffs:2V} - 1)}{ff\sqrt{k}}$ quantitates k, s, ff et V in partibus milleſimis pedis rhenani exprimantur; quo facto expreſſio per 250 diuiſa dabit tempus in minutis ſecundis.

Co-

Coroll. 7.

769. Simili modo si celeritas ipsa desideretur expressa per spatium, quod dato tempore percurritur ea celeritate vniformiter: ponatur spatium quod vno minuto secundo, absoluitur esse n partium millesimarum pedis rhenani, eritque $\frac{n}{250\sqrt{v}} = 1$; dato v pariter in particulis millesimis pedis rhenani; vnde fiet $n = 250\sqrt{v}$.

Coroll. 8.

770. Sin autem celeritas detur per spatium n vno minuto secundo percursum, atque n datum sit in partibus millesimus pedis rhenani, inuenietur altitudo celeritati illi debita $v = \frac{n^2}{62500}$, pariter in partibus millesimis eiusdem pedis: ex quibus facile erit hos duos celeritates mensurandi modos inter se comparare, alterumque ex altero formare.

Scholion 1.

771. Quod corpora aquae innatantia nunquam omnem motum omittant, sed perpetuo moueri pergant, id quidem experientiae non est consentaneum, qua satis constat, motum, tandem penitus cessare. Verum hic notari oportet, aquam praeter eam resistentiam, quae quadrato celeritatis est proportionalis aliam insuper resistentiam opponere, a celeritate non pendentem, sed ipsis momentis temporum proportionalem, prout Neutonus loquitur, seu quae sit constans, atque altitudinem celeritati debitam diminuat in ratione ipsius elementi spatii percursi. Haec autem resistentia aquae tam est exigua, vt nisi motus sit lentissimus, ea prae altera resistentia euanescat; hancque ob causam in solutione huius problematis

iſtam reſiſtentiam neglеximus, cum inſtitutum noſtrum non ſit motus tardiſſimos ex profeſſo proſequi. Interim tamen iſta reſiſtentia calculum non reddit difficiliorem; ſit enim iſta reſiſtentia conſtans pro caſu oblato $=g$, ſeu ponderi g, aequiualens, prodibit loco aequationis $-dv=\frac{ffvds}{V}$ iſta $-dv=\frac{ffvds}{V}+\frac{gds}{M}$; quae integrata dat $v=(K+\frac{gV}{ffM})e^{-ffs:V}-\frac{gV}{ffM}$. Ex hac igitur aequatione vtique intelligitur, corpus non vltra datum terminum eſſe progreſſurum, cum eius celeritas euaneſcat percurſo ſpatio s, cuius quantitas ex hac aequatione dabitur $e^{ffs:V}=\frac{kffM+gV}{gV}$ ſeu $s=\frac{V}{ff}\,l\frac{kffM+gV}{gV}$. Quin etiam ex iſta aequatione cognoſcetur ipſa haec reſiſtentia g, ex ſpatio percurſo, donec totus motus fuerit amiſſus, ſi enim hoc ſpatium per experientiam definitum ſit $=s$, erit $g=\frac{kffM}{V(e^{ffs:V}-1)}$, quae vnico experimento definita, pro omnibus caſibus, quibus idem corpus curſu directo in aqua mouetur, valebit.

Scholion 2.

772. Initium fecimus huius capitis a motu ſeu curſu directo, atque inſuper rectilineo, motusque huius diminutionem a reſiſtentia ortam definiuimus. Ex iis autem circumſtantiis, quarum mentionem fecimus in ſolutione, ad curſum directum et rectilineum conſeruandum requiſitis, ſimul colligere licet quibus rebus iſte curſus turbetur. Primo ſcilicet motus rectilineus turbaretur, ſi directio mediae reſiſtentiae non in planum diametrale incideret, vel ſi vis horizontalis ex ea orta directioni motus non eſſet directe contraria; ex ſupra enim allatis ſatis patet ſi reſiſtentiae directio

directio non congruat cum directione motus, tum motum non ſolum retardari ſed etiam a ſemita rectilinea deflecti; quae quidem pertinent ad ſolum centri grauitatis motum progreſſiuum, quem hic imprimis conſideramus. Etiamſi autem motus non fieret in linea recta, tamen curſus manere poteſt directus, ſi ſcilicet perpetuo axis longitudinalis a prora ad puppem ductus maneat directioni motus parallelus; per curſum enim directum intelligimus eiusmodi nauium motum, cuius directio directe a puppi ad proram tendit, et in quo eadem nauis pars anterior reſiſtentiae aquae opponitur. Quando igitur eiusmodi vires adeſſent, quae nauem circa axem verticalem conuerterent, etiamſi illae motum progreſſiuum non afficerent, tamen curſum directum turbarent, et curſum obliquum producerent. Quare cum in caſu propoſito, nullae iſtius modi vires adſint, etiam motus non ſolum in linea recta fieri inuentus eſt, ſed etiam curſus manſit directus. Primum igitur conſtituimus curſus directos ſimulque rectilineos examini ſubiicere, tam in aqua quieſcenti quam fluuio, et id circo eiusmodi caſus proponere oportet, quibus tam curſus directus quam motus rectilineus conſeruetur; quibus caſibus euolutis facilius erit ad curſus obliquos motusque curuilineos examinandos progredi. Corpora autem ipſa aquae innatantia, prout ſunt vel libera ſeu ſibi relicta, vel non libera ſeu termino cuipiam veluti anchorae alligata primariam huius capitis diuiſionem ſuppeditabunt. Deinde vero ſubdiuiſiones ſumentur a potentiis quibus corpora ſollicitantur, de quibus ſi affuerint, primo enim in quaque tractatione vt hic fecimus nullas potentias

 ſolli-

ſollicitantes conſideramus, dispiciendum eſt, non ſolum quantae ſint et quamnam directionem teneant, ſed etiam quomodo pro varia corporum celeritate et directione immutentur. Si enim naues a vento propelluntur, vis venti fit eo minor quo celerius naues progrediuntur, quando quidem in eam plagam in quam ventus tendit, mouentur; in reliquis autem caſibus obliquitatis venti ratio eſt habenda. Deinde etiam velorum directio, a qua directio vis venti pendet, imprimis eſt contemplanda, quippe quae ſemel fixa eandem reſpectu nauis tenent poſitionem, vtcunque eius curſus immutetur. Remorum autem ratio aliter eſt comparata, cum eandem vim exerceant atque in eadem directione reſpectu nauis, quantumuis tam celeritas quam motus directio mutetur. Ad hanc igitur potentiarum diſtinctionem probe attendi oportebit, quando in earum effectus inquiremus; id quod etiam nunc non niſi generatim facere licet, cum ipſi effectus tam a vento quam remis oriundi nondum ſint penitus perſpecti; ſed in ſequenti demum libro accurate euoluentur. Quamobrem ſufficiet hoc argumentum ita generaliter pertractaſſe, vt eius vſus ad ſequentem librum ſatis pateat.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 1.

773. *Si corpus plano diametrali praeditum in fluuio ita ſit collocatum, vt axis corporis a prora ad puppem ductus in fluuii directionem incidat, definire motum quem fluuii vis corpori imprimet.*

So-

Solutio.

Repreſentetur corpus per ſectionem horizontalem AEBF per centrum grauitatis G factam, et ponatur corpus a fluuio iam propulſum eſſe in hunc ſitum, cum initio verſaretur eius centrum grauitatis in C, vbi corpus nullam adhuc habuit celeritatem. Manifeſtum igitur eſt ex conditionibus praeſcriptis corpus curſum directum atque rectilineum eſſe accepturum, cum nulla adſit vis, quae vel motum rectilineum deflectat, vel corpus circa axem verticalem conuertat, vt inde curſus obliquus oriri poſſet. Cum itaque corporis in C celeritas nulla fuiſſet, ponatur eius celeritas acquiſita cum in G peruenerit debita altitudini v ſpatium vero a centro grauitatis percurſum CG ſit $= S$. Porro fluuii celeritas debita ſit altitudini b. Dum ergo corpus verſatur in G vbi eius celeritas eſt $\sqrt{v}$ fluvius in corpus aget exceſſu ſuae celeritatis, qua eſt $\sqrt{b}$ ſupra celeritatem corporis $\sqrt{v}$, hoc eſt celeritate $\sqrt{b}-\sqrt{v}$ hacque celeritate eandem vim in corpus exeret, ac ſi corpus eadem celeritate in aqua quiescente ſecundum directionem AB moueretur. Ponatur autem figura plana $= ff$, quae hoc caſu eandem reſiſtentiam pateretur ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ex his ergo ſequitur fore vim corpus ſecundum directionem GL propellentem aequalem ponderi aquae, cuius volumen ſit $= (\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ff$. Poſitis igitur maſſa ſeu pondere corporis $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V erit vis corpus in G propellens $= \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ff M}{V}$; ab hacque vi ita motus corporis accelerabitur, vt dum per ſpatii elementum $Gg = ds$ progreditur, ſit $dv = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ff ds}{V}$ ſeu $\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2} = \frac{ffds}{V}$, cuius inte-

integrale eſt $\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} = \frac{ffs}{V}$, integratione ita inſtituta vt fiat $v = 0$ poſito $s = 0$. Tempus autem quo corpus ſpatium $CG = s$ abſoluit eſt $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{V}{ff}\int \frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2\sqrt{v}} = \frac{2V\sqrt{v}}{ff\sqrt{(b-\sqrt{v})}\sqrt{b}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

774. Ex data igitur celeritate $\sqrt{v}$ multo facilius ſpatium s aſſignatur, quo percurſo corpus illam celeritatem acquiſiuit, quam viciſſim ex dato ſpatio s celeritas $\sqrt{v}$. Hancque obrem tempus non per ſpatium ſed per ipſam celeritatem determinare licuit.

Coroll. 2.

775. Intelligitur autem ex formulis inuentis corpus nunquam tantam celeritatem acquirere poſſe, quanta eſt celeritas fluuii; nam ſi ponatur $v = b$, fit ſpatium s itemque tempus quo fit $v = b$, infinitum.

Coroll. 3.

776. Sin autem ſemel fuerit $v = b$, id quod accidere poteſt, ſi corpori a vi externa tanta celeritas tribuatur, tum ob $dv = 0$, corpus progrediendo neque augmentum celeritatis capiet, neque decrementum, ideoque tum motu vniformi promouebitur.

Coroll. 4.

777. Si logarithmus qui in aequatione, qua relatio inter ſpatium s et celeritatem $\sqrt{v}$ continetur in ſeriem conuertatur habebitur $\frac{ffs}{2V} = \frac{v}{2b} + \frac{2v\sqrt{v}}{3b\sqrt{b}} + \frac{3v^2}{4b^2} + \frac{4v^2\sqrt{v}}{5b^2\sqrt{b}} +$ etc. ex qua expreſſione patet celeritatem per datum ſpatium

tium s acquisitam eo fore maiorem quo maius fuerit circa $\overline{ff}$.

Coroll. 5.

778. Quo igitur corpus quam celerrime a fluuio abripiatur, eam eius partem, quae impulsum aquae excipit, quae est corporis pars postica, ita oportet esse comparatam, vt ea si directe in aquam occurreret maximam pateretur resistentiam. Maxima igitur erit acceleratio si pars postica fuerit plana ad cursum fluuii normalis.

Coroll. 6.

779. Vti difficile est ad datum spatium percursum celeritatem corporis assignare, ita facilius post datum quodvis temporis interuallum celeritas corporis definiri potest. Posito enim tempore ab initio motus praeterlapso $=t$, erit $t = \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$, vnde vicissim fit $\sqrt{v} = \frac{ffbt}{2V+fft\sqrt{b}}$.

Coroll. 7.

780. Si quantitates b, v, ff, et V exprimuntur in partibus millesimis pedis Rhenani, tempus t, quo data celeritas $\sqrt{v}$ acquiritur, innotescet in minutis secundis per hanc aequationem $t = \frac{V\sqrt{v}}{125ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$.

Coroll. 8.

781. Vicissim vero si tempus t detur in minutis secundis, atque quantitates b, ff et V partibus millesimis pedis Rhenani exprimantur, ista aequatio $\sqrt{v} = \frac{125ffbt}{V+125fft\sqrt{b}}$ praebebit celeritati acquisitae altitudinem debitam v in particulis millesimis eiusdem pedis.

Scholion I.

782. Posuimus hic in initio C corpus nullam habuisse celeritatem, eique omnem motum quem acquirit, a motu aquae imprimi: sed pari modo problema tractari potest, si corpori ab initio datus motus tribuatur, cuius directio cadat in eandem rectam CL, in qua tum directio fluminis, tum positio axis corporis AB sunt sitae. Si, autem quaestio hoc modo extendatur, casus nonnulli inter se prorsus diuersi a se inuicem probe sunt discernendi; quorum primus est, si corpus dum in C aquae immittitur, iam habeat motum in directione fluuii CL sed minorem quam ipse habet fluuius; qui casus ex ipsa solutione allata facile resoluetur; nam quoniam celeritas fluuii maior est, corpus accelerabitur, atque si celeritas initialis debita sit altitudini k, aequationis differentialis $\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2} = \frac{ffds}{V}$ integralis fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} - \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{k}} - 2(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}}$ atque tempus, quo spatium s absoluit, seu celeritatem $\sqrt{v}$ acquirit, reperietur $= \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}} - \frac{2V\sqrt{k}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{k})\sqrt{b}}$; quae omnia huc redeunt vt hic motus tanquam pars motus a quiete profecti considerari queat. Initium enim motus censendum est fuisse supra punctum C interuallo $s = \frac{2V\sqrt{k}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{k})} - \frac{2V}{ff}(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{k}}$. Ex hoc scilicet puncto corpus ex quiete motum in singulis spatii CL punctis easdem habebit celeritates, quas in ipso casu oblato, quo corpus data celeritate $\sqrt{k}$ ex puncto ipso C egreditur. Deinde si celeritas corporis initialis in C directioni fluminis directe fuerit contraria, tum corpus primum contra cursum fluminis ascendet, donec eius motus penitus sit extinctus, indeque

quasi

quasi ex quiete a fluuio deorsum abripietur. Euolutio autem huius casus sequitur ex praecedente ponendo $\sqrt{k}$ negatiuum, si quidem in C celeritatem habeat $\sqrt{k}$ vnde fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}}$. Ex hac aequatione obtinebitur interuallum, per quod corpus vltra C contra fluuii cursum progredietur si ponatur $v = 0$; tum vero fit $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}} = \frac{-2k}{2(\sqrt{b}+\sqrt{k})^2} - \frac{2k\sqrt{k}}{3(\sqrt{b}+\sqrt{k})^3} - \frac{2k^2}{4(\sqrt{b}+\sqrt{k})^4} - \text{etc.}$ ex qua valor ipsius $-s$ desideratum spatium praebebit. Tertius denique casus ab his maxime discrepat, quo corpus initio in C motum habet velociorem secundum fluuii directionem sed maiorem. Tum enim motus corporis non solum in flumine retardabitur, sed etiam altera corporis superficies versus A in aqua constituta actionem aquae sentiet, posterior vero pars in B, quae hactenus sola vim ab aqua est passa, erit libera. Offendet igitur corpus hoc in casu resistentiam quae sit aequiualens resistentiae, quam superficies plana ff eadem celeritate in aquam impingens sentiret. Quare si celeritas initialis in C ponatur $= \sqrt{k}$ et in G $= \sqrt{v}$, erit resistentia $= \frac{Mff(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$, vnde fit $dv = -\frac{ffds(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$ atque integrando $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\sqrt{b}} + 2\,(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{b}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}}$: ex qua intelligitur corpus demum infinito spatio percurso ipsam fluuii celeritatem adipisci.

Scholion 2.

783. Quanquam haec omnia ex calculo recte instituto consequantur, tamen si ad rem ipsam spectemus, correctione indigent. Missa enim ea circumstantia, cuius ante mentionem fecimus, qua aqua aliam exercet resisten-

tiam praeter eam quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, in hoc motu ſuper fluuiis ad aerem quoque reſpici oportet, qui parti corporum ex aqua eminenti nonnullam reſiſtentiam opponit, quae quamuis fere octingenties minor ſit quam reſiſtentia aquae ceteris paribus, tamen euentus a ſola aqua oriundos nonnihil turbat. Ita reſiſtentia aeris in cauſa eſt, cur corpora a fluuio abrepta nunquam tam prope ad celeritatem fluuii accedant, quam calculus ſuperior indicat, neque etiam ob hanc ipſam cauſam corporis motus ſi fuerit aequalis motui fluminis, conſeruabitur, ſed retardabitur. Deinde ſi corpus in fluuio maiore deſcendat celeritate, quam ipſe fluuius habet, tum ob aeris reſiſtentiam non ſolum tandem ipſum fluuii celeritatem acquiret, ſed etiam minorem, quoad reſiſtentia aeris aequalis fiat impulſui aquae. Ad hunc effectum quodammodo aeſtimandum ponamus partem corporis in aere verſantem eandem ab aere pati reſiſtentiam, quam perpeteretur ſuperficies plana hh eadem celeritate contra aerem mota. Si ergo celeritas corporis, qua in aerem impingit debita ſit altitudini v, erit reſiſtentia aequalis ponderi molis aereae cuius volumen eſt $= hhv$, ſeu ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $= \frac{hhv}{800}$. Huius vis igitur ſi ratio habeatur in ſolutione problematis, prodibit $dv = \frac{(\surd b - \surd v)^2 ffds}{V} - \frac{hhvds}{800V}$, ex qua intelligitur vltimam celeritatem quam corpus acquiret non fore $\surd b$ ſed minorem, fiet ſcilicet $f\surd b - f\surd v = \frac{h\surd v}{28}$ circiter, ſeu $\surd v = \frac{28 f\surd b}{28f+h}$. Quamobrem ſi portio ſuperficiei corporis extra aquam eminentis ſit n vicibus maior, quam ea, quae ſub aqua verſatur,

ſatur, erit proxime $bb = nff$, indeque celeritas vltima $\sqrt{v} = \frac{2s\sqrt{b}}{2s + \sqrt{n}}$. Hincque etiam immutationes in reliquis caſibus ab aere oriundae colligi poterunt. Sed in his omnibus aerem quietum poſuimus, aliter enim res ſe habebit, ſi aer vento agitetur, qui motus pariter non difficulter in calculum inducetur.

PROPOSITIO 76.

Problema.

784. *Si corpus* AB *in aqua quieſcente non ſolum moueatur curſu directo in directione* BAL *ſed etiam ſecundum hanc directionem propellatur a vi quacunque conſtante, hoc eſt tali, quae corpus motum aeque acceleret ac quieſcens; definire motum huius corporis.* Tab. XXXII. fig. 1.

Solutio.

Potentiam corpus ad motum ſollicitantem hic primum ponimus abſolutam ſeu talem, quae dato tempuſculo eandem producit accelerationem quacunque celeritate moveatur; eiusmodi ſcilicet potentiam exercent vires remorum, quibus ſiquidem remiges perpetuo eandem vim adhibeant, naues ſemper aequaliter propelli ſolent. Sit itaque potentia iſta corpus in directione AL propellens $= p$, denotante p pondus illi vi aequale: atque reſiſtentia, quam portio antica EAF in aqua patitur, tanta ſit quantam pateretur ſuperficies ff ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ponamus nunc corporis centrum gravitatis iam ſpatium $CG = s$ confeciſſe atque in puncto C

 motum

motum inchoasse, in G vero celeritatem habere debitam altitudini v; vnde resistentia, quam in G sentiet erit $= ffv$; seu si corporis massa seu pondus dicatur M et volumen partis submersae $= V$, erit vis resistentiae $=$ ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Ex his igitur dum corpus elementum $Gg = ds$ percurrit fiet $dv = \frac{pds}{M} - \frac{ffv\,ds}{V}$ seu $dv + \frac{ffvds}{V} = \frac{pds}{M}$ quae ducta in $e^{ffs:V}$ fit integrabilis, atque aequatio integrata erit $e^{ffs:V}v = \frac{\int e^{ffs:V}pds}{M} = \frac{pV}{Mff}\left(e^{ffs:V} - 1\right)$, integratione ita instituta vt euanescat v posito $s = 0$. Quocirca habebitur ista aequatio $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ ex qua celeritas corporis in singulis spatii describendi CGL punctis innotescit. Tempus vero quo spatium $CG = s$ a centro grauitatis G percurritur innotescet ex integrali ipsius $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ quod reperitur $= \frac{2\sqrt{MV}}{f\sqrt{p}} l\left(\sqrt{e^{ffs:V}} + \sqrt{(e^{ffs:V} - 1)}\right)$ Q. E. I.

Coroll. 1.

785. Corpus ergo continuo accelerabitur crescente enim s crescit v; atque spatio iam infinito emenso acquiret celeritatem, cuius altitudo debita erit $= \frac{pV}{Mff}$; seu celeritas maxima, quam acquirere potest erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$.

Coroll. 2.

786. Intelligitur autem ex formula inuenta $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ corpus mox tantam adipisci celeritatem, quae insensibiliter differat a celeritate vltima. Nam si fuerit spatium s modice magnum, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam abibit in tam exiguam fractionem, quae prae 1 euanescat dum-

dummodo enim fit $\frac{ffs}{V} = 10$ feu $s = \frac{10V}{ff}$, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam minor fit quam $\frac{1}{10000}$.

Coroll. 3.

787. Neglecto ergo ipfo motus initio corpus fatis tuto concipi poteft quafi motu vniformi progrederetur: atque celeritas, qua vniformiter promouebitur erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$; quae expreffio fi f et V exprimantur in particulis millefimis pedis Rhenani; tum $\frac{250\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ dabit fpatium in eadem menfura, quod corpus vno minuto fecundo abfoluet.

Coroll. 4.

788. Celeritas ergo, qua nauis remis propulfa in aqua quiefcente promouebitur, eft in fubduplicata ratione virium remorum: vnde fi remigum numerus quadruplicetur, nauis duplo celerius progredietur.

Coroll. 5.

789. Hinc fi duae naues inter fe prorfus fimiles remis propellantur, atque maioris longitudo AB fit $= A$, minoris $= a$; maior vero propellatur vi $= P$, minor vero vi p, erunt celeritates, quibus incedent inter fe vt $\frac{\sqrt{P}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{a}$. Quo igitur ambae naues aequali celeritate progrediantur, neceffe eft vt vires remorum teneant rationem duplicatam longitudinum.

Coroll. 6.

790. Deinde etiam intelligitur, quo minor fit refiftentia nauis, eo maiorem fore celeritatem quam eadem

vis remorum generat. Cum enim ſit reſiſtentia abſoluta vt ff, erit celeritas producta in reciproca ſubduplicata ratione reſiſtentiae, id eſt ſi reſiſtentia quadruplo ſit minor, eadem vis remorum duplo maiorem celeritatem naui imprimet.

Coroll. 7.

791. Quoniam denique V ad M rationem tenet conſtantem; namque V ductum in grauitatem ſpecificam aquae, aequatur ipſi M; manifeſtum eſt celeritates nauium remis propulſarum eſſe in ratione compoſita ex directa ſubduplicata virium remorum et reciproca ſubduplicata reſiſtentiarum abſolutarum.

Scholion.

792. Quanquam hae determinationes tantum ad aquam quieſcentem ſunt accommodatae, tamen facile ad motum nauium in fluuiis propulſarum a remis transferri poſſunt; ſiquidem motus fiat ſecundum ipſius fluuii directionem. Nam ſi celeritas fluuii ſit debita altitudini b ſeu ipſa celeritas $= \sqrt{b}$, tum ſi nauis in fluuio deſcendat, eius celeritas a vi remorum acquiſita augenda eſt celeritate fluuii, ita vt tale corpus, quale contemplati ſumus in fluuio deſcendendo acquirat velocitatem $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} + \sqrt{b}$. At ſi idem corpus contra fluuii curſum ſurſum propellatur, tum celeritatem acquiret $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} - \sqrt{b}$; ex qua expreſſione intelligitur, niſi $\frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ maior ſit quam $\sqrt{b}$, corpus curſum fluminis ſuperare non poſſe, neque aſcendere. Quoniam autem haec ad vim remorum reſpiciunt, notandum eſt vires remorum vtrinque debere eſſe aequales et ſimiliter appli-

applicatas, quo vis ex iis coniunctim resultantis directio per medium nauis transeat, seu in rectam BA incidat; nisi enim hoc obseruetur, corpus seu nauis cursum directum tenere non poterit, animum namque hic abstrahimus ab actione gubernaculi, qua vtique huic incommodo subveniri posset.

PROPOSITIO 77.
Problema.

793. *Si superficies plana in situ verticali posita* e f *motu sibi parallelo moueatur vniformiter indirectum secundum directionem* CGL; *atque in eam impingat fluidum in directione* VG *data cum celeritate, determinare vim, quam fluidum allapsu suo in superficiem exercebit.* Tab. XXXIII. fig. 1.

Solutio.

Sit celeritas qua superficies plana ef progreditur debita altitudini v, seu $= \sqrt{v}$, atque celeritas, qua fluidum mouetur $= \sqrt{c}$, anguli autem CGV, quem directio motus fluidi VG cum directione motus superficiei CGL constituit sinus ponatur $= \mu$ et cosinus $= \nu$. Anguli autem V Gf, quem directio motus fluidi VG constituit cum planitie superficiei sinus sit $= m$ et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$; denique sit $gg =$ ipsi superficiei, cuius centrum grauitatis sit in puncto G. Iam si superficies quiesceret, ex ante demonstratis foret vis, quam fluidum in superficiem exereret $= m^2 g^2 c$, seu aequaretur ponderi molis ex eadem materia fluida constantis, cuius volumen est $= m^2 g^2 c$. At cum superficies non quiescat sed celeritate $\sqrt{v}$ progrediatur in directione GL concipiatur to-

 tum

tum ſyſtema ex fluido et ſuperficie conſtans retro in directione GC celeritate $\sqrt{v}$ promoueri, quo fiet vt ſuperficies $e\,f$ in quietem redigatur; vis autem fluidi in ſuperficiem exerta vtroque caſu erit eadem. Per compoſitionem motus autem innoteſcet, tam celeritas fluidi reſultans quam directio: Cum enim nunc fluidum duplici feratur motu, altero ſecundum directionem G N celeritate $\sqrt{c}$ altero vero in directione G M celeritate $\sqrt{v}$. Si capiatur $GN = \sqrt{c}$ et $GM = \sqrt{v}$: atque formetur parallelogramum GMKN, diagonalis GK tam celeritatem fluidi reſultantem, quam eius directionem ſuggeret, ita vt fluidum cenſendum ſit celeritate GK in directione UG in ſuperficiem $e\,f$ quiescentem impingere. Demiſſo autem ex G in NK productam perpendiculo GH, erit ob anguli GNH ſinum $= \mu$ et coſinum $= v$, perpendiculum $GH = \mu\sqrt{c}$ et $NH = v\sqrt{c}$, vnde fiet $KH = v\sqrt{c} - \sqrt{v}$ atque $GK = \sqrt{(c - 2v\sqrt{cv} + v)}$. Ex his reperietur anguli NGK ſeu UGV ſinus $= \frac{\mu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2v\sqrt{c}\,v+v)}}$ et coſinus $= \frac{\sqrt{c}-\nu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{cv}+v)}}$ atque hinc prodit anguli UGf ſinus $= \frac{m\sqrt{c}-(m\nu-n\mu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu\sqrt{cv}+v)}}$ qui ergo eſt ſinus anguli incidentiae ſub quo fluidum impinget in ſuperficiem, quare cum fluidi celeritas ſit $= \sqrt{(c - 2\nu\sqrt{cv} + v)}$, prodibit vis, quam fluidum in directione vera VG celeritate $\sqrt{c}$ motum, in ſuperficiem $e\,f$ motam celeritate $\sqrt{v}$ in directione GL, $= (m\sqrt{c} - (m\nu - n\mu)\sqrt{v})^2 g^2$, huiusque vis directio tranſibit per ſuperficiei centrum grauitatis G atque ad ipſam ſuperficiem erit normalis. Q.E.I.

Coroll. 1.

794. Si anguli CGf ſinus ponatur $= q$, cum ſit $q = m\nu - n\mu$, erit vis fluidi, quam in ſuperficiem exerit

$=(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2 gg$, ſeu tantum fluidi volumen pondere adaequabit.

Coroll. 2.

795. Quoniam anguli UGf ſinus inuentus eſt $= \frac{m\sqrt{c}-q\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2\nu v\sqrt{cv}+v)}}$, manifeſtum eſt eſſe debere $m\sqrt{c} > q\sqrt{v}$, ſiquidem ſuperficies plana verſus plagam GK debeat vrgeri. Nam ſi eſſet $m\sqrt{c} < q\sqrt{v}$ tum ſuperficies adeo vrgeretur verſus plagam UV.

Coroll. 3.

796. Si ſuperficies plana ef normaliter ad curſum fluidi VG conſtituatur, ita vt ſit $m=1$ et $n=0$, erit vis quam ſuperficies patietur $=(\sqrt{c}-\nu\sqrt{v})^2 gg$: quae vis ideo eo minor erit, quo maior fuerit anguli VGC coſinus ν.

Coroll. 4.

797. Manente autem poſitione ſuperficiei ef eadem reſpectu directionis motus ipſius GL, vis fluidi eo maior erit quo maior fuerit ſinus m. Quare maximam patietur vim ſuperficies, ſi angulus VGf fuerit rectus.

Coroll. 5.

798. Sin autem ſuperficies ef iuxta motus ſui directionem GL collocata fuerit, erit angulus CGf euaneſcens et conſequenter $q=0$; hoc igitur caſu ſuperficies eadem patietur vim ac ſi quiesceret.

Coroll. 6.

799. Si fluidum veniret ex regione vG, ita vt directio vG tantum inclinet ad Ge, quantum directio VG

 inclinat

inclinat ad Gf, manebit anguli vGf idem ſinus $= m$; ideoque ob angulum CGf inuariatum, cuius ſinus eſt q, erit vis quam ſuperficies ſufferet eadem, quae in altero caſu ſcilicet $= (m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg$.

Coroll. 7.

800. Ponamus angulum VGC manere inuariatum; definiri poterit angulus VGf, ſeu poſitio ſuperficiei ef, vt maximam vim a fluido ſufferat. Reperietur autem anguli VGf tangens $= \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{c} - \nu\sqrt{v}}{\mu\sqrt{v}}$, atque vis erit $= (c - 2\nu\sqrt{cv} + v)g^2$.

Scholion

801. Haec propoſitio in ſequentibus maxime nobis erit neceſſaria, vbi tum vim venti in vela mota tum vim fluuii in nauem promotam ſumus inueſtigaturi. Facile autem patet niſi venti celeritas ſit maxima ſeu prope infinita, ipſum velorum motum negligi omnino non poſſe; ſi enim vela in eandem plagam progrediantur in quam ventus tendit, perſpicuum eſt vim venti in vela eo fore minorem, quo celerius vela promouentur, atque adeo euaneſcere, ſi vela eandem, quam ipſe ventus, habeant celeritatem. Quamobrem hac propoſitione praemiſſa licebit nobis ſequentia problemata aggredi in quibus inquiremus, quomodo naues a vento propellantur, tam curſu directo, quam vtcunque obliquo.

PROPOSITIO 78.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 2.

802. *Si corpus ſeu nauigium plano diametrali* AB *praeditum a vento ita ſollicitetur, vt curſu directo ſecundum dire-*

directionem GL *in aqua quiescente promoueatur, determinare motum huius nauigii, et celeritatem maximam, quam recipere poterit.*

Solutio.

Quoniam nauis cursu directo in directione BAL moveri ponitur, in quam simul directio resistentiae incidit, oportet vt media directio venti in eandem directionem incidat. Quare cum vis venti semper normalis sit in planum velorum, atque eius media directio per centrum grauitatis velorum transeat, requiritur vt planum velorum normale sit ad planum diametrale AB, atque vt velorum centrum grauitatis in idem hoc planum incidat. Repraesentet itaque EF velorum planitiem, cuius area sit $= gg$, sitque G centrum grauitatis velorum in axe AB positum; hocque modo fiet vt media directio venti in rectam GL incidat, eaque tam cursus directus, quam motus progressiuus in recta GL conseruetur. Impingat nunc ventus in vela in directione quacunque obliqua VG, sitque celeritas venti debita altitudini c, atque anguli VGC, quem directio venti cum directione motus constituit, sinus sit $= \mu$ et cosinus $= V$; eritque anguli VGF, quem directio venti VG cum planitie velorum constituit sinus $= v$, qui ante positus erat m, et cosinus, qui ante erat n, hoc casu erit $= -\mu$, quoniam angulus VGF est obtusus. Ponamus porro nauem in puncto C motum incepisse, atque iam absoluisse spatium $CG = x$, hicque habere celeritatem debitam altitudini v. His positis ex praecedente propositione erit vis venti, qua nauem vrgebit in directione GL,