cuius integrale poſito t conſtanti reperitur $= \frac{\pi b^2 c^2 t^3 dt}{4a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ $\left(\frac{2a^6 c^3 - b(3a^4c^2 - a^4b^2 + b^2(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}}{(a^4(bb-cc) - b^2(a^2-c^2)t^2)^2 \sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}}\right)$ quae formula denuo integrata poſitoque poſt integrationem $t = a$, ſi multiplicetur per $2cv$ dabit vim reſiſtentiae horizontalem qua motus retardabitur. Sed cum parum ad vtilitatem hinc concludi queat, per methodum maximorum et minimorum naturam curuae BCD definiamus, cui minima reſiſtentia reſpondeat.

PROPOSITIO 69.

Problema.

728. *Si data ſit ſectio diametralis* ACD *cui omnes ſectiones parallelae ſunt ſimiles, determinare naturam curuae* BCD, *quae ſolidum generet quod in directione* CAL *motum pro ſua capacitate patiatur minimam reſiſtentiam.* Tab. XXX. fig 2.

Solutio.

Manentibus vt ante $AR = r$, et $RS = s$ ob curvam ACD datam dabitur s et etiam p poſito $ds = p\,dr$ per r. Pro curua autem inuenienda ſit $CG = y$ et $GH = u$, et $du = q\,dy$, quibus poſitis minimum eſſe debebit haec expreſſio $\iint \frac{p^3 u\,dr\,dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ ſeu $\int u\,dy \int \frac{p^3 dr}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{1+p^2}{p^3} = w^2$ et $\frac{(ap-rp+s)^2}{p^3} = t^2$, ita vt quantitates t et w ab y non pendeant; eritque formula minima reddenda haec $\int u\,dy \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ in qua cum dy multiplicatum ſit per $u \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ ſumatur eius differentiale ponendo ſemper r et w et t conſtantes, quod erit $du \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} - \int \frac{2ut^2q\,dq\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ vbi ſigna ſummatoria tantum ad quantitates r, w, et t tanquam variabiles reſpicit, u vero et q ponit conſtantes. Hinc igitur valor minimo inueniendo inſeruiens erit $\int \frac{dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2} + \frac{1}{dy} d. 2uq \int \frac{t^2 dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2}$, qui deberet poni $= a$ niſi ſimul capacitas eſſet in computum ducenda quae maxima eſſe debet. At capacitas eſt vt $\int u^2 dy$, ex qua obtinetur iſte valor maximo inueniendo inſeruiens $2u$. Ex his igitur valoribus ſequens conficitur aequatio naturam curvae quaeſitae praebens $\frac{2u}{cf} = \int \frac{dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2} + \frac{1}{dy} d. 2uq \int \frac{t^2 dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2}$ Multiplicetur vtrinque per $du = q dy$, prodibit $\frac{2u du}{cf} = du \int \frac{dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2} + q d. 2uq \int \frac{t^2 dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2} = d. u \int \frac{dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2} + \int \frac{2ut^2 qq dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2} + q d. 2uq \int \frac{t^2 dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2}$ cuius integrale eſt $\frac{u^2}{cf} = \int \frac{u dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2} + \int \frac{2ut^2 q^2 dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2} + \text{Conſt.} = \int \frac{u(c^2 w^2 + 3t^2 q^2) dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2} + \text{Conſt.}$ Quoniam vero alicubi fieri debet $u = 0$, hoc autem nusquam euenire poteſt niſi ſit Conſt. $= 0$, erit $u = cf \int \frac{(c^2 w^2 + 3t^2 q^2) dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2}$. Verum cum ſit $du = q dy$, erit $y = \frac{u}{q} + \int \frac{u dq}{qq}$ eſt autem $\int \frac{u dq}{qq} = cf \int \frac{(c^2 w^2 + 3t^2 q^2) dr dq}{qq (c^2 w^2 + t^2 q^2)^2} = b - cf \int \frac{dr}{q(c^2 w^2 + t^2 q^2)}$, vnde fit $y = b + 2cf \int \frac{t^2 q dr}{(c^2 w^2 + t^2 q^2)^2}$. Quamobrem reſtitutis loco w^2 et t^2 aſſumtis valoribus iſta emerget curuae quaeſitae conſtructio: $y = b + 2cf \int \frac{p^3 (ap - rp + s)^2 q dr}{(c^2(1 + p^2) + q^2 (ap - rp + s)^2)^2}$ et $u = cf \int \frac{(c^2(1 + p^2) + 3q^2 (ap - rp + s)^2) p^3 dr}{(c^2(1 + p^2) + q^2 (ap - rp + s)^2)^2}$. quae integrationes conſtructionem non impediunt, cum in iis q ponatur conſtans, ideoque non impediunt, quominus curua quaeſita ſit algebraica. Q. E. I.

Coroll. 1.

729. Quoniam u euaneſcit ſi ſit $q = \infty$ intelligitur curuae BD tangentem in B ad rectam CB eſſe normalem, ſeu verticalem hoc autem caſu prodit $y = b$: quare ſi dicatur $CB = b$, erit $b = b$. Coroll.

Coroll. 2.

730. Quia curua ex D progrediendo verſus B ad CB accedit, habebit q vbique valorem negatiuum. Ex quo erit $y = 0$ ſi fuerit $b = -2cf\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2 q\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$.

Coroll. 3.

731. At u obtinebit maximum valorem ſi ipſi q is tribuatur valor vt fiat $0 = \int\frac{p^3(c^2(1+p^2)-3q^2(ap-rp+s)^2)(ap-rp+s)^2\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^3}$ integratione debito modo abſoluta; ſcilicet vt euaneſcat facto $r = 0$, tumque ponatur $r = a$.

Exemplum.

732. Sit ſectio diametralis ACD triangulum ad C rectangulum, ſeu ASD linea recta, erit $s = \frac{cr}{a}$, et $p = \frac{c}{a}$, atque $1 + pp = \frac{aa+cc}{aa}$, itemque $ap - rp + s = c$; his ſubſtitutis erit $\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2 q\,dr}{(cc(1+pp)+q^2(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{acq\,dr}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2} = \frac{a^2cq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$; atque $\int\frac{p^3(c^2(1+p^2)+3q^2(ap-rp+s)^2)dr}{(cc(1+pp)+qq(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)dr}{a(a^2+c^2+a^2q^2)^2} = \frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Quocirca pro curua BCD quae ſolidum producit quod pro maxima capacitate minimam patitur reſiſtentiam iſta obtinebitur aequatio $y = b + \frac{2a^2c^2fq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$ cui reſpondet $u = \frac{ccf(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Habebit ergo u maximum valorem ſi capiatur $q = \frac{\pm\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{3}}$. Si igitur maximus ipſius u valor ponatur $CD = c$, fiet $f = \frac{8(a^2+c^2)}{9c}$ deinde quia hoc caſu y euaneſcere debet fiet $b = \frac{ac}{\sqrt{3(a^2+c^2)}}$; ex quibus natura et figura curuae deſideratae facile cognoſcitur. Simul autem intelligitur hanc curuam fore algebraicam.

PRO-

PROPOSITIO 70.

Problema.

Tab. XXXI. fig. 1.

733. *Si datae fuerint cum sectio amplissima* BDC *tum sectio aquae* ACB , *atque huic sectioni aquae omnes sectiones horizontales* FIH *sint similes*, *determinare resistentiam*, *quam hoc corpus secundum directionem* CAL *in aqua motum patietur.*

Solutio.

Quoniam curua AVB est data, ponatur pro ea abscissa CT $= t$ et applicata TV $= u$, dabiturque aequatio inter u et t, atque posito $du = q\,dt$, erit q functio quaedam ipsius t. Porro pro curua DHB ponatur abscissa CG $= r$, et applicata GH $= z$, quoniam haec applicata GH aequalis erit tertiae variabilium trium x, y, z, quae in aequationem pro superficie ingredientur; sit autem $dz = pdr$, ita vt p futura sit functio ipsius r. Si nunc constantes quantitates vocentur AC $= a$, CB $=$ Cb $= b$ et CD $= c$, erunt CB, b et HI $= r$ latera homologa figurarum similium ACB et FIH; quare si capiatur $b : r = t$: IK vt sit IK $= \frac{rt}{b}$, erit KQ $= \frac{ru}{b}$. Dictis vero AP $= x$, PM $= y$, et MQ $+ z$; erit $x = a - \frac{rt}{b}$; $y = \frac{ru}{b}$, et $z = z$ quarum priores aequationes dant $dx = \frac{-rdt - tdr}{b}$ et $dy = \frac{rqdt + udr}{b}$ ex quibus fit $dr = \frac{bdy + bqdx}{u - tq}$ et $dt = \frac{-budx - btdy}{r(u - tq)}$. Iam cum sit $dz = pdr$, erit $dz = \frac{bpqdx + bpdy}{u - tq}$, quae aequatio exprimit naturam superficiei propositae. Haec igitur aequatio cum assumta generali $dz = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ comparata dat $\mathrm{P} = \frac{bpq}{u - tq}$ et $\mathrm{Q} = \frac{bp}{u - tq}$, vnde fit $1 + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2$

$=$

$= \frac{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}{(u-tq)^2}$. Ad valorem iam ipsius $\frac{P^3dxdy}{1+P^2+Q^2}$ inveniendum, notari debet, dum dy consideratur, dx tanquam constans tractari debere; facto autem $dx = 0$ fit $dr = \frac{-rdt}{t}$, adeoque $dy = \frac{-rudt}{bt} + \frac{rqdt}{b} = \frac{-rdt(u-tq)}{bt}$; atque dum dx consideratur, dy constans est ponendum seu $dt = \frac{-udr}{rq}$ vnde fit $dx = \frac{+udr}{bq} - \frac{tdr}{b} = \frac{dr(u-tq)}{bq}$. Sed cum hinc non pateat quomodo variabiles r et t a se inuicem discerni debeant, oportebit loco alterutrius elementorum dx et dy inducere tertium elementum dz, cum id in assumtis quantitatibus variabilibus ipsum contineatur. Est autem $dxdy = \frac{dzdx}{Q} = \frac{dzdy}{P}$; nam dum x tanquam constans consideratur loco dy scribi potest $\frac{dz}{Q}$, et dum y constans assumitur loco dx scribere licet $\frac{dz}{P}$ ex quibus hanc nanciscimur formulam $\frac{p^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$, quae bis integrari debet, altera integratione ponendo z altera y constans. At est $dz = pdr$, et si z constans ponitur fit $dy = \frac{rqdt}{b}$; quamobrem fiet formula generalis $\frac{P^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$ pro nostro casu $= \frac{bp^3q^3rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$, quae bis integrari debet altera vice ponendo r, altera t constans. Ac primo quidem vtraque integratio ita est instituenda vt integrale euanescat, posito vel r vel t, prout vel r vel t pro variabili est sumta $= 0$, tumque faciendum est vel $r = b$ vel $t = a$. His igitur de modo integrationum praemonitis si altitudo celeritati, qua corpus progreditur debita ponatur $= v$, erit resistentiae vis horizontalis repellens corpus secundum directionem AC $= 2bv\iint \frac{p^2q^3rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Deinde vis verticalis ex resistentia orta, quae est $\iint \frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2} = 2v\iint \frac{Pdzdy}{1+P^2+Q^2}$ fiet pro nostro casu $= 2v\iint \frac{p^2q^2rdrdt(u-tq)}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq^2)^2}$ quae applicata erit in puncto

puncto O axis AC, cuius distantia a puncto A reperietur si diuidatur $\iint\frac{(ab(u-tq)-rt(u-tq)+b^2pqz)p^2q^2rdrdt}{b(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$, praescripto modo euolutum per $\iint\frac{(u-tq)p^2q^2rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Hisque cognitis totius resistentiae effectus cognoscetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

734. Figura sectionis diametralis AFD hinc facillime ex curua CBD definitur. Nam quoniam est BC: HI = AC:FI applicatae FI et HI eidem abscissae CI respondentes datam inter se tenent rationem; ex quo curua AFD affinis erit curuae BHD

Coroll. 2.

735. Hancobrem problema, quo loco curuae BHD data fuisset curua AFD, sectiones vero omnes horizontales inter se sint similes, vt in praesente quaestione, simili modo resoluetur, atque adeo solutio ab hac non differet nisi scribendo a loco b siquidem r et z denotent coordinatas curuae DFH

Coroll. 3.

736. Cum soliditas in genere sit $= -2\iint Q\,y\,dx\,dy = -2\iint Q\,dx\,dz$ posito $\frac{dxdz}{Q}$ loco $dx\,dy$; fiet pro nostro casu soliditas $= \frac{2}{bb}\iint pr^2u\,dr\,dt = \frac{2}{bb}\int pr^2\,dr\int u\,dt$. Cum igitur $\int u\,dt$ exprimat aream ACB, dicatur ea $= ff$, erit soliditas $= \frac{2ff}{bb}\int pr^2\,dr = \frac{2ff}{bb}\int r^2\,dz$ posito $r = b$ post integrationem ita absolutam vt prodeat 0, si fiat $r = 0$.

Coroll.

Coroll. 4.

737. Superficies autem ABDb in aquam incurrens generaliter est $2\iint dx\,dy\sqrt{(1+P^2+Q^2)} = 2\iint\frac{dx\,dz}{Q}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. quamobrem nostro casu haec superficies exprimetur hac forma $2\iint\frac{r\,dr\,dt}{bb}\sqrt{(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$.

Coroll. 5.

738. Colligere etiam licet, quoties curuae CBD et CAD fuerint affines, toties corporis omnes sectiones horizontales esse inter se similes. Cum igitur sectiones verticales sectioni CBD parallelae similes sint, quando curvae CBA et CDA fuerint affines; intelligitur si tres curvae CBD, CAD et CAB fuerint inter se affines, tum omnes sectiones vnicuique illarum sectionum parallelas inter se similes fore.

Scholion.

739. Quo appareat, quomodo formulae differentiales supra datae in quibus $dxdy$ inest, ad alias reduci queant in quibus vel $dxdz$ vel $dydz$ insit, notandum est $dxdy$ ideo esse in illas formulas ingressum, quod inerat in elemento superficiei $dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Quoniam autem hoc elementum natum est ex aequatione canonica $dz = Pdx+Qdy$ simili modo ex ista aequatione canonica $dy = \frac{dz}{Q}-\frac{Pdx}{Q}$ nascetur hoc superficiei elementum $\frac{dxdz}{Q}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$, atque ex hac aequatione $dx = \frac{dz}{P}-\frac{Qdy}{P}$ Prodit elementum superficiei istud $\frac{dydz}{P}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Cum igitur haec tria elementa bis integrata praebeant totam superficiem, manifestum est ea sibi mutuo substitui posse. Hancobrem

obrem formulae pro resistentia supra inuentae in alias formas aequiualentes reduci possunt, quibus illarum loco vti licebit. Ita resistentiae vis horizontalis quae supra inuenta erat $= 2v\iint\frac{P^3dydx}{1+P^2+Q^2}$ quoque hoc modo $2v\iint\frac{P^2dydz}{1+P^2+Q^2}$ siue hoc modo $2v\iint\frac{P^3dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$ exprimi poterit. Simili modo vis resistentiae verticalis tribus hisce diuersis modis exprimi potest; erit scilicet vel $2v\iint\frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v\iint\frac{Pdydz}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v\iint\frac{P^2dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$; ex quibus formulis quouis casu oblato iis vti conueniet, quae pro ratione quantitatum variabilium ita sunt comparatae, vt alterutra variabilium in formula contentarum ab vnica variabilium assumtitiarum pendeat. Ita in hoc casu opus erat eiusmodi formulis vti in quibus inesset dz, quia z inter ipsas variabiles assumtas reperiebatur.

Exemplum.

740. Sint omnes sectiones horizontales HFb semicirculi, seu solidum genitum ex rotatione figurae CBD circa axem CD, erit figura CBA quadrans circuli et propterea $b = a$, atque ex circuli natura $u = \sqrt{(a^2-t^2)}$ et $q = \frac{-t}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $u - tq = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$, et $1 + qq = \frac{a^2}{a^2-t^2}$; His substitutis erit resistentiae vis horizontalis in directione AC motum retardans $= \frac{2v}{a^3}\iint\frac{p^3t^3rdrdt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2v}{a^3}\int\frac{t^3dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}}\int\frac{p^3rdr}{1+pp}$ vbi variabiles t et r a se inuicem sunt separatae. Signum quidem haec formula haberet negatiuum, sed eius loco + tuto substituitur cum transformatio formularum generalis pendeat a signo radicali, in quod vtrumque signum aequaliter competit. At est $\int\frac{t^3dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2}{3}a^3$ posito

post

poſt integrationem $t = a$, vnde vis reſiſtentiae horizontalis eſt $= \frac{4}{3} v \int \frac{p^3 r dr}{1 + pp}$. Simili modo erit vis reſiſtentiae verticalis $= \frac{2v}{a^2} \iint \frac{p^2 t^2 r dr dt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2v}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} \int \frac{p^2 r dr}{1+pp} = \frac{\pi v}{2} \int \frac{p^2 dr}{1+pp}$. quia eſt $\int \frac{tt dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{\pi}{4}$. De loco autem applicationis $\underline{o}$, quia formula minus fit ſimplex non erimus ſolliciti.

Coroll. 1.

741. Si idem hoc ſolidum inuertatur vt BDb fiat ſectio aquae et BAb ſectio ampliſſima, atque hoc ſolidum in directione CD celeritate altitudini $\underline{v}$ debita promoueatur tum reſiſtentia motum retardans erit $= \pi v \int \frac{r dr}{1+p^2}$. Hoc enim caſu omnes ſectiones verticales axi CD normales erunt ſemicirculi.

Coroll. 2.

742. Reſiſtentia ergo huius corporis, ſi mouetur ſecundum directionem CA ſe habebit ad reſiſtentiam eiusdem corporis moti in directione CD vt $\frac{4}{3} \int \frac{p^3 r dr}{1+pp}$ ad $\pi \int \frac{r dr}{1+pp}$.

Coroll. 3.

748. Si ergo figura BDb abeat in triangulum iſosceles, ſeu corpus in ſemiconum rectum axis CD atque ponatur $CD = c$ exiſtente $BC = AC = a$. erit $z = c - \frac{cr}{a}$ et $o = -\frac{c}{a}$. Reſiſtentia ergo quam hic conus in directione CA motus patietur erit $= -\frac{4v}{3a} \int \frac{c^3 r dr}{a^2+c^2} = \frac{2ac^3 v}{3(a^2+c^2)}$; neglecto ſigno vt iam notaui.

Coroll. 4.

744. Reſiſtentia autem, quam idem ſemiconus in directione axis CD motus ſufferet, erit $= \pi v \int \frac{a^2 r dr}{a^2+c^2} = \frac{\pi a^4 v}{2(a^2+c^2)}$.

$\frac{\pi a^4 v}{2(a^2+c^2)}$. Quare haec reſiſtentia ſe habet ad priorem vt $\frac{\pi a^3}{2}$ ad $\frac{2c^3}{13}$. Vnde hae duae reſiſtentiae inter ſe erunt aequales ſi fuerit $c^3 = \frac{3\pi a^3}{4}$. ſeu $\frac{c}{a} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$. ſiue ſi ſit CD : CB $= \sqrt[3]{6\pi} : 2 = 2,661341 : 2$ vnde fit proxime CD : CB $= 4 : 3$.

Coroll. 5.

745. Si ponatur ſectio BDb etiam ſemicirculus, ita vt corpus fiat quadrans ſphaerae, vtraque reſiſtentia debebit eſſe eadem. Oritur autem ob $z = \sqrt{(a^2-r^2)}$ et $p = \frac{-r}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ reſiſtentia pro motu ſecundum CA $= \frac{4}{3} v \int \frac{r^4 dr}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}} = \frac{2\pi a^2 v}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\pi a^2 v}{4}$. Pro motu autem ſecundum directionem CD erit reſiſtentia $= \pi v \int \frac{r dr (a^2-r^2)}{a^2} = \frac{\pi a^2 v}{4}$.

Scholion.

746. Abſoluimus igitur his propoſitionibus omnes caſus quibus corporis ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales eaeque vel ſectioni diametrali vel ampliſſimae parallelae ſunt ſimiles inter ſe. Atque ad huiusmodi corpora determinanda opus fuit trium ſectionum principalium ſcilicet ſectionis aquae, ſectionis ampliſſimae atque ſectionis diametralis duas tanquam datas aſſumere, quia ex hac conditione tertia ſectio ſponte determinatur. Dantur autem praeter has corporum ſpecies, quae ſectiones quasdam inter ſe parallelas ſimiles habent, innumerabiles aliae corporum ſpecies, quibus euoluendis nec locus nec tempus ſuppeteret. Harum vero primarias aliquas ſpecies examini ſubiicere iuuabit, quae ad nauium figuras prope accedant.

cedant. Eiusmodi ſcilicet ſpecies contemplabimur, in quibus ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales ſint affines, cuius vocis ſignificationem hic in multo latiore ſenſu accipimus quam vocem ſimilitudinis. Figuras enim affines vocamus, in quibus ſumtis abſciſſis in data ratione, applicatae reſpondentes quoque conſtantem teneant rationem, ex qua definitione intelligitur figuras ſimiles ſub affinibus tanquam ſpeciem contineri, figurae enim affines euadunt ſimiles, ſi applicatae eandem rationem teneant, quam abſciſſae; affines autem et non ſimiles prodeunt figurae, ſi rationes abſciſſarum et applicatarum fuerint inaequales. Sic omnes ellipſes inter ſe ſunt figurae affines, quoniam abſciſſis in ratione axium transuerſorum aſſumtis reſpondent applicatae rationem axium coniugatorum tenentes ſi quidem abſciſſae in axibus transuerſis capiantur. Similiquoque modo omnia triangula rectangula figurae ſunt inter ſe affines. Data igitur curua quacunque datam baſin datamque altitudinem habente, facile erit aliam ipſi affinem deſcribere, quae baſin quamcunque et altitudinem quamcumque praeſcriptam habeat. Nam ſi datae curuae baſis ſit $= a$ et altitudo $= b$, abſciſſaque quaecunque in baſi accepta vocetur x, eique reſpondens applicata altitudini parallela ſit y, hoc modo ſuper baſi alia A ad aliam altitudinem B conſtruetur curua affinis, in baſi A ſumatur abſciſſa $= \frac{Ax}{a}$, atque reſpondens applicata $= \frac{By}{b}$, eritque curva hoc modo deſcripta priori affinis. His igitur notatis non difficile erit ſequentia problemata aggredi.

PROPOSITIO 71.
Problema.

Tab. XXXI. fig. 2. 747. *Sint omnes tres principales ſectiones datae, ſcilicet ſectio aquae* ACB *ſectio ampliſſima* BCD *atque ſectio diametralis* ACD; *ſolidum vero ita ſit comparatum, vt omnes ſectiones* STP *ſectioni ampliſſimae* BDC *parallelae eidem ſint affines, hocque corpus in aqua moueatur ſecundum directionem* CAL: *determinare reſiſtentiam, quam patietur.*

Solutio.

Cum primum ſectio diametralis ATD data ſit, ponatur pro ea abſciſſa $CP = r$, et applicata $PT = s$, dabiturque relatio inter r et s ſitque $ds = p\,dr$. Secundo ob curuam CBA ſeu ſectionem aquae datam, ponatur pro ea abſciſſa $CP = t$, et applicata $PS = u$, ſitque $du = q\,dt$. Tertio pro ſectione ampliſſima CBD ſit abſciſſa $CG = \tau$ et applicata $GH = \upsilon$, atque $d\upsilon = \varrho\,d\tau$. His pro curuis datis poſitis concipiatur ſectio quaecunque SPT ſectioni BCD parallela, quae ex natura ſolidi affinis erit ipſi ſectioni BCD; atque ad ſolidi indolem exprimendam accipiantur hae tres variabiles $AP = x$, $PM = y$ et $MQ = z$ eritque prioribus notationibus ad hunc caſum accommodatis $t = r$, atque $x = a - r$ poſita longitudine $AC = a$. Iam cum ſectionis SPT baſis ſit $PS = u$ et altitudo $PT = s$; ſectionis vero BCD ponatur baſis $BC = b$ et altitudo $CD = c$; hinc ob affinitatem ſi ſit PM, $y = \frac{u\tau}{b}$ erit MQ, $z = \frac{s\upsilon}{c}$. Nunc ob $x = a - r$ erit $dr = -dx$; atque $dy = \frac{u\,d\tau + \tau q\,dr}{b}$ propter $t = r$ et $dz = \frac{s\varrho\,d\tau + \upsilon p\,dr}{c}$. Cum igi-

igitur ſit $d\tau = \frac{b\,dy}{u} + \frac{\tau q\,dx}{u}$ ob $dr = -dx$ fiet $dz = \frac{(s\tau q\rho - u\vartheta p)dx}{cu} + \frac{bs\varrho\,dy}{cu}$, quae aequatio cum generali ſupra aſſumta $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata dat $P = \frac{s\tau q\rho - u\vartheta p}{cu}$ et $Q = \frac{bs\rho}{cu}$, vnde fit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\vartheta p)^2}{c^2u^2}$. Accedamus nunc ad formulas $\frac{P^3\,dx\,dy}{1+P^2+Q^2}$. $\frac{P^2\,dx\,dy}{1+P^2+Q^2}$ et $\frac{P^2(x+Pz)\,dx\,dy}{1+P^2+Q^2}$ pro viribus reſiſtentiae et directione determinandis inuentas, quae duplicem integrationem requirunt, alteram in qua x alteram in qua y ponatur conſtans. Cum igitur ſit $dx = -dr$, atque poſito x conſtante fiat $dy = \frac{u\,d\tau}{b}$; hi valores ſubſtituantur loco dx et dy, vt fiat $dx\,dy = -\frac{u\,dr\,d\tau}{b}$; ac ſi in illis formulis integratio inſtituatur poſito r conſtante, ſimul conſtantes erunt quantitates ab r pendentes velut s, t, u, p, q. in altera vero integratione in qua τ ponitur conſtans, conſtantes inſuper erunt ϑ et ϱ. Integratio autem in qua r ponitur conſtans ita abſoluatur vt integrale euaneſcat poſito $\tau = 0$, tumque ponatur $\tau = b$ ſeu $\vartheta = 0$. ſimili modo altera integratio in qua τ conſtans ponitur eſt abſoluenda, vt integrale euaneſcat poſito $r = 0$, hocque facto ponatur $r = a$. Perinde autem eſt a quanam integratione incipiatur, cum variabiles r et τ, reliquaeque, quae per has duas dantur, a ſe inuicem non pendeant. His igitur praemiſſis obtinebitur reſiſtentiae vis horizontalis motui contraria et ſecundum directionem AC vrgens $= \frac{-2v}{bc}\iint \frac{(s\tau q\rho - u\vartheta p)^3\,dr\,d\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\vartheta p)^2}$. vis vero reſiſtentiae verticalis, qua corpus ſurſum vrgetur erit $= \frac{-2v}{b}\iint \frac{(s\tau q\rho - u\vartheta p)^2\,u\,dr\,d\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\varrho^2 + (s\tau q\rho - u\vartheta p)^2}$. Punctum autem O, in quo haec vis applicata eſt concipienda reperietur diuidendo hanc expreſ-

expressionem $\iint \frac{P^2(x+Pz)udr\,d\tau}{1+P^2+Q^2}$ per istam $\iint \frac{P^2udr\,d\tau}{1+P^2+Q^2}$, quotus enim dabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. 1.

748. Cum soliditas ingenere sit $= -2\iint Qy\,dx\,dy$ pro nostro casu autem sit $-dx\,dy = \frac{udr\,d\tau}{b}$, $y = \frac{u\tau}{b}$ et $Q = \frac{bs\rho}{cu}$, erit nostri solidi capacitas $= \frac{2}{bc}\iint us\tau\varrho\,dr\,d\tau = \frac{2}{bc}\int usdr\int\tau\varrho\,d\tau$. Est vero $\int\tau\varrho\,d\tau = \int\tau\,d\upsilon = -$ area BCD haec ergo area si dicatur ff erit soliditas $= \frac{-2ff}{bc}\int usdr$.

Coroll. 2.

749. Si sectio diametralis ACD affinis sit sectioni aquae, tum omnes sectiones ipsi BCD parallelae simul erunt similes. Tum autem fit $s:u = c:b$ atque $u = \frac{bs}{c}$ et $q = \frac{bq}{c}$, quibus valoribus substitutis prodeunt supra inventae expressiones pro sectionibus similibus.

Coroll. 3.

750. Si linea DTA abeat in rectam horizontalem fiet $s = c$ et $p = 0$, hinc resistentiae vis horizontalis fiet $= \frac{-2v}{b}\iint \frac{\tau^3q^3\rho^3\,dr\,d\tau}{u^2+b^2\rho^2+\tau^2q^2\rho^2}$. Atque si area ACB ponatur $= gg$, existente area BCD $= ff$ erit soliditas huius corporis $= \frac{2ffgg}{b}$.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XXX. fig. 2. 751. *Sint iterum datae tres sectiones principales* ACB, ACD et BCD, *atque omnes sectiones* FGH *sectioni di-*

diametrali ACD *parallelae eidem sectioni sint affines: hocque corpus moueatur in aqua secundum directionem* CAL; *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Sit iterum vt ante pro sectione diametrali ACD abscissa CR $= r$ et applicata RS $= s$ atque $ds = p\,dr$. Deinde pro sectione aquae CBA sit abscissa in AC sumta ipsique GF aequalis $= t$ et ei applicata respondens, quae aequalis erit CG sit u atque $du = q\,dt$. Pro tertia denique sectione BCD sit abscissa CG $= \tau$ et applicata GH $= ȣ$ existente $dȣ = \varrho\, d\tau$. Si nunc concipiatur sectio verticalis FGH parallela sectioni diametrali ACB fiet $u = \tau$, et $d\tau = q\,dt$, vnde τ, q, u, $ȣ$ et ϱ functiones erunt ipsius t ab eoque pendebunt, eritque $dȣ = q\varrho\, dt$. Positis ergo AC $= a$, BC $= b$ et CD $= c$, quoniam figura FGH affinis est figurae ACD sumatur in ea abscissa GM $= \frac{tr}{a}$ eritque applicata MQ $= \frac{ȣ s}{c}$. Quamobrem si vocentur AP $= x$, PM $= y$ at MQ $= z$; erit $x = a - \frac{tr}{a}$, $y = \tau = u$; et $z = \frac{ȣ s}{c}$. Cum igitur sit $dy = q\,dt$, seu $dt = \frac{dy}{q}$, erit $dx = \frac{-r\,dy}{aq} - \frac{t\,dr}{a}$ et $dz = \frac{ȣ p\,dr}{c} + \frac{sq\varrho\,dt}{c} = \frac{ȣ p\,dr}{c} + \frac{s\varrho\,dy}{c}$, unde fit $dz = \frac{-aȣ p\,dx}{ct} + \frac{(tsq\varrho - rȣ p)dy}{ctq}$; quae cum generali aequatione $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata dat $P = \frac{-aȣ p}{ct}$ et $Q = \frac{tsq\varrho - rȣ p}{ctq}$ atque $1 + P^2 + Q^2 = \frac{c^2t^2q^2 + a^2ȣ^2p^2q^2 + (tsq\varrho - rȣ p)^2}{c^2t^2q^2}$. Quod autem ad formulas differentiales attinet in quibus est $dx\,dy$ atque x et y a se inuicem non pendere, ponuntur; cum sit $dy = q\,dt$; ideoque y a solo t pendet erit $dx = \frac{-t\,dr}{a}$; ob $dy = 0$, quando de dx est quaestio. Erit ergo go $dxdy = \frac{-tqdrdt}{a}$, atque resiſtentiae vis horizontalis ſecundum directionem AC ſollicitans erit $= \frac{2a^2v}{c} \iint \frac{ȣ^3 p^3 q^3 dr\,dt}{c^2t^2q^2 + a^2ȣ^2p^2q^2 + (tsq\rho - rȣp)^2}$ vbi duplici integratione opus eſt, altera in qua ponitur t conſtans, cum eoque u, $ȣ$, q et ϱ in altera vero ponitur r conſtans cum ſuis ſunctionibus s et p. Simili vero modo erit vis reſiſtentiae verticalis $= -2av \iint \frac{ȣ^2p^2q^3drdt}{c^2t^3q^2 + a^2ȣ^2tp^2q^2 + t(tsp\rho - rȣp)^2}$ cuius locus applicationis erit punctum O, eiusque interuallum A O erit quotus qui reſultat ex diuiſione huius quantitatis $\iint \frac{P^2(x + Pz)tqdr\,dt}{1 + P^2 + Q^2}$ per hanc $\iint \frac{P^2tqdrdt}{1 + P^2 + Q^2}$. Q. E. I.

Coroll. I.

752. Soliditas huius corporis reperietur ex formula generali $-2\iint Qy\,dx\,dy$, quae pro noſtro caſu tranſit in hanc $\frac{2}{ac}\iint (tsuq\varrho\,dr\,dt - ruȣp\,dr\,dt)$ quae primo integrata poſito t conſtanti, dat $\frac{2ff}{ac}\int (tuq\varrho + uȣ)dt = \frac{2ff}{ac}\int tȣ\,du$ ob $q\varrho\,dt = dȣ$; denotante ff aream ACD.

Coroll. 2.

753. Si curuae CBA et CBD fuerint affines hoc eſt GF : GH $= a : c$, ita vt ſit $ȣ = \frac{ct}{a}$ et $q\varrho = \frac{c}{a}$, omnes ſectiones FGH fierent inter ſe ſimiles, atque reſiſtentia corporis horizontalis erit $= 2av\int \frac{tp^3q^3dr\,dt}{a^2q^2(1 + p^2) + (s - rp)^2}$ vti iam ex ſuperioribus conſtat.

Coroll. 3

754. Si curua BD abeat in rectam ipſi BC parallelam, ita vt ſectio ampliſſima BDb fiat rectangulum, erit $ȣ = c$ et $\varrho = 0$; huiusmodi ſolidi ergo reſiſtentia horizontalis ſeu motum retardans eſt $= 2a^2v\iint \frac{p^3q^3dr\,dt}{a^2p^2q^2 + r^2p^2 + t^2q^2}$.

Co-

Coroll. 4.

755. Quoniam in hac expressione p et q, itemque r et t aequaliter insunt, intelligitur sectiones ACB et ACD eadem manente resistentia inter se commutari posse. Si quidem sectio amplissima fuerit parallelogrammum rectangulum.

Coroll. 5.

756. Si insuper sectiones ACB et ACD fiant triangula rectangula, quo casu solidum abit in piramidem, curuilineam cuius basis erit rectangulum, vertex vero A. Cum igitur hoc casu sit $u = b - \frac{bt}{a}$ hincque $q = -\frac{b}{a}$; et $s = c - \frac{cr}{a}$ hincque $p = -\frac{c}{a}$ erit resistentia huius corporis $= \frac{2b^3c^3v}{a^2} \iint \frac{drdt}{b^2c^2 + b^2t^2 + c^2r^2} = \frac{2b^2c^2v}{a^2} \int \frac{dr}{\sqrt{(b^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}}$.

PROPOSITIO 73.

Problema.

757. *Datae sint denuo tres sectiones principales* ACB, Tab. XXXI. fig. 1.
ACD *et* BCD, *atque corpus* ABDb *ita sit comparatum, vt omnes sectiones horizontales* FHI *sint inter se affines: moueaturque hoc corpus secundum directionem* AC *in aqua: determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Sit primo pro sectione diametrali ACD abscissa in axe CA assumta ipsique IF aequalis $= r$ eique respondens applicata quae erit $=$ CI $=$ GH $= s$, sitque $ds = pdr$. Tum pro sectione aquae CBA sit abscissa CT $= t$ et applicata TV $= u$ sitque $du = qdt$. Tertio pro sectione

 am-

ampliſſima ſit abſciſſa $CG = \tau$ et applicata $GH = ȣ$ exiſtente $dȣ = \varrho d\tau$. Si nunc concipiatur ſectio horizontalis quaecunque FIH, ſuperiores denominationes ad eam applicatae praebebunt $ȣ = s$ indeque $pdr = \varrho d\tau$. Quoniam autem ſectio FIH affinis eſt ſectioni ACB, ſi ponatur $AC = a$ $BC = b$ et $CD = c$, ſumaturque $IK = \frac{rt}{a}$ erit reſpondens applicata $KQ = \frac{\tau u}{b}$. Si nunc ponatur $AP = x$, $PM = y$ et $MQ = z$ erit $x = a - \frac{rt}{a}$, $y = \frac{\tau u}{b}$ et $z = ȣ = s$: vnde fit $dz = pdr$; $dy = \frac{\tau q dt}{b} + \frac{upd r}{b\rho}$, ob $d\tau = \frac{pdr}{\rho}$, et $dx = \frac{-rdt}{a} - \frac{tdr}{a}$; ex quibus ſequens aequatio inter x, y et z conficitur $dz = \frac{bpr\rho dy + a\tau pq\rho dx}{urp - t\tau q\rho}$ quae cum generali aequatione ſupra aſſumta comparata dat $P = \frac{a\tau pq\rho}{urp - t\tau q\rho}$ et $Q = \frac{brp\rho}{urp - t\tau q\rho}$ ita vt ſit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho^2)}{(urp - t\tau q\rho)^2}$. Iam quoniam z per vnicam conſtitutarum variabilium determinatur, eiusmodi formulas ad reſiſtentiam inueniendam aſſumere conuenit in quibus ſit dz. Cum enim ſit $dz = pdr$, et poſito z ſeu r conſtante fiat $dy = \frac{\tau q dt}{b}$, erit $dzdy = \frac{\tau pqdrdt}{b}$, in qua duae variabiles a ſe inuicem non pendentes inſunt, altera r et quantitates per eam datae s, p, $ȣ$, τ et ϱ, altera vero t, cum u et q, quae in integrationibus probe a ſe inuicem ſunt ſecernendae, ita dum alterae variabiles ponuntur, alterae tanquam conſtantes tractentur. Cum iam vis reſiſtentiae horizontalis ſeu ſecundum directionem AC vrgens ſit $= 2v \iint \frac{P^2 dzdy}{1 + P^2 + Q^2}$, fiet haec reſiſtentia pro noſtro caſu $= \frac{2a^2v}{b} \iint \frac{\tau^3p^3q^3\rho^2 drdt}{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho)^2}$ quae vti iam ſaepius eſt praeceptum, debito modo bis debet integrari. At reſiſtentiae vis verticalis fit $= \frac{2av}{b} \iint \frac{\tau^2p^2q^2\rho drdt(urp - t\tau q\rho)}{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho)^2}$ locus autem ſeu punctum O

vbi

vbi haec vis applicata eſt concipienda, reperietur eo modo, quem generaliter dedimus, ſcilicet interuallum AO eſt quotus, qui reſultat ſi $\iint \frac{P(x+Pz)\tau pqdrdt}{1+P^2+Q^2}$ diuidatur per $\iint \frac{P\tau pqdr\,dt}{1+P^2+Q^2}$, integrationibus vtrisque legitimo modo abſolutis. Q. E. I.

Coroll. 1.

758. Ad ſoliditatem huius ſolidi inueniendam conſiderari oportet hanc expreſſionem $-2\iint y\,dxdz$; pro qua applicanda quoniam eſt $dz = pdr$ et poſito z conſtante $dx = \frac{-rdt}{a}$ atque $y = \frac{\tau u}{b}$ fiet ſoliditas $= \frac{2}{ab}\iint \tau\, urpdrdt = \frac{2}{ab}\int udt. \int \tau rpdt$.

Coroll. 2.

759. Quoniam vero $\int udt$ integratum dat aream ACB, quae ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{2ff}{ab}\int \tau prdr = \frac{2ff}{ab}\int \tau rds$ ob $pdr = ds$ ſeu eſt $= \frac{2ff}{ab}\int \tau rd\sigma$ ob $d\sigma = ds$, quae integratio ab vtriusque curuae CDA et CDB natura pendet.

Coroll. 3.

760. Si fiat linea AFD recta verticalis erit $r = a$ et $p = \infty$, vnde reſiſtentia horizontalis, poſtquam in formula inuenta poſitum erit $\varrho d\tau$ loco pdr, prodit $= \frac{2v}{b}\iint \frac{\tau^3 q^3 \varrho dt d\tau}{b^2+u^2+\tau^2 q^2}$.

Scholion

761. Hisce ſatis prolixe reſiſtentiam, quam corpora plano diametrali praedita in aqua directe promota patiuntur, ſumus proſecuti; vix enim figura, quae quidem ad naues eſſet idonea concipi poterit, quae non in per-

 tracta-

tractatis corporum ſpeciebus contineatur. Ordo igitur requireret vt etiam, vti in figuris planis fecimus ad motum obliquum conſiderandum progrederemur, ſed cum in figuris planis haec tractatio tam difficilis extitiſſet, multo maiori difficultati, quando de corporibus quaeſtio agitatur, haec inquiſitio foret obnoxia, et praeterea ſi quid de directione vis reſiſtentiae per prolixiſſimos calculos erueretur, tamen parum vtilitatis inde ad nauium perfectionem conſequeremur. Quamobrem his cauſis impediti iſti capiti finem imponere cogimur, id quod ſine notabili in ſequentibus incommodo facere poſſumus, cum ea quae de figuris planis ſi motu obliquo promoueantur, ſunt prolata, ſatis prope media directio reſiſtentiae et centrum reſiſtentiae aeſtimari queat.