vam producentem minimam resistentiam posterior vero curuam, cui solidum maximae resistentiae respondet.

Coroll. 3.

693. Quia aequatio inuenta $ss = cf - \frac{-2cp^3s}{(1+pp)^2}$ posito $f=0$, diuisibilis est per s, patet aequationem $s=0$ casum quoque continere in quaestione contentum. Perspicuum autem est hunc casum praebere eam curuam quae producit solidum minimae capacitatis.

Coroll. 4.

604. Cum sit $x = \frac{3cp^2+cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ intelligitur continuo ipsi p maiorem valorem tribuendo initio facto a $p=0$, tam x quam s vsque ad certum terminum crescere, deinde vero iterum decrescere. Maxima autem erunt x er s si fiat $p=\sqrt{3}$, seu eo loco vbi tangens curuae cum axe AC angulum constituit 60. Erit autem hoc casu $x = \frac{9c}{8}$ et $s = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$.

Coroll. 5.

695. Si autem haec aequatio cum §. 532. comparetur, deprehendetur haec curua congruere cum ea curva supra inuenta, quae inter omnes alias eandem aream continentes patiatur minimam resistentiam. Curua igitur hic inuenta erit curua illa triangularis AMBCDNA. Tab. XXIV. fig. 1.

Coroll. 6.

696. Huius igitur curuae portio AMB circa axem AC rotata producet solidum, quod simul maximam habe-

bit

bit capacitatem, atque ſecundum directionem axis CA motum minimam patietur reſiſtentiam. Altera vero portio BCD circa axem eundem CE rotata ſolidum dabit maximam reſiſtentiam patiens.

Coroll. 7.

697. In hac igitur curua, quae ad axem ACE vtrinque ſibi eſt ſimilis et aequalis ipſe axis CA erit tangens in A; vnde aſcendet et deſcendet vsque ad B et D, exiſtente $AE = \frac{9c}{8}$ et $BE = DE = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$. Deinde ex cuspidibus B et D cum axe in C vnitur exiſtente $AC = c$: eius vero tres portiones AMB, BCD et AND inter ſe aequales erunt et ſimiles.

Scholion.

698. Problema iſtud ab aliis, qui hoc argumentum pertractauerunt, omiſſa ea conditione, qua ſimul ſolidum capaciſſimum requiritur, proponi eſt ſolitum, ita vt inter omnes omnino curuas eam determinare ſint conati, quae circa axem rotata ſolidum producat quod in directione axis motum minimam pateretur reſiſtentiam. At hoc modo nulla inuenitur curua idonea quaeſito ſatisfaciens, reſoluetur enim iſte caſus ex noſtra ſolutione ponendo $c = \infty$, unde fit $s = \frac{f(1+pp)^2}{2p^3}$ ex quo nunquam fieri poteſt $s = 0$, ideoque curua deſiderata cum axe nunquam concurreret, id quod eſt contra conditionem intentam. Hancobrem iſtam quaeſtionem hic penitus omittere viſum eſt, eiusque loco praeſentem proponere, qua praeter minimam reſiſtentiam maxima capacitas requiritur. Haec enim quaeſtio eo magis ad inſtitutum noſtrum eſt accommodata, cum in naui-

bus

bus non ſolum minima reſiſtentia deſideretur, ſed ſimul naues maxime capaces eſſe oporteat. Facile autem perſpicitur figuram inuentam nimis abhorrere a figuris nauium conſuetis, aliasque circumſtantias prohibere, quominus nauibus talis figura vel ſaltem affinis tribuatur. Ceterum notatu dignum euenit quod curua inuenta ſit algebraica; cuius vero ordinis ſit, eliminando p ita inueſtigabitur. Cum ſit $x = \frac{3cp^2 + cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ erit $\sqrt{(xx-3ss)} = \frac{3cpp - cp^4}{(1+pp)^2}$ indeque $\frac{x}{\sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{3+pp}{3-pp}$; vnde fit $pp = \frac{3x - 3\sqrt{(xx-3ss)}}{x+\sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{(x-\sqrt{(xx-3ss)})^2}{ss}$ et $p = \frac{x-\sqrt{(xx-3ss)}}{s}$. porro eſt $pp+1 = \frac{2xx-2ss-2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$, atque $pp+3 = \frac{2xx-2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$. His autem valoribus in aequatione $(1+pp)^2 x = cpp(3+pp)$ ſubſtitutis atque irrationalitate ſublata emerget iſta aequatio $4s^4 + 8xxss - 36cxss + 27ccss - 4cx^3 + 4x^4 = 0$. Poſito autem $c = 2a$ orietur iſta aequatio $s^4 + 2xxss - 18axss + 27a^2ss - 2ax^3 + x^4 = 0$, ita vt curua ſatisfaciens inuenta pertineat ad lineas quarti ordinis. Ex hac igitur aequatione elicitur $ss = -xx + 9ax - \frac{27}{2}a^2 \pm \frac{(9a-4x)\sqrt{a(9a-4x)}}{2}$, vnde conſtructio curuae non ſit difficilis. Commodius vero partis hucſeruientis AMB natura cognoſcetur ex hac ſerie $ss = xx\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{4x}{9a} + \frac{1\cdot 3}{6\cdot 8}\cdot\frac{4^2\cdot x^2}{9^2\cdot a^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{4^3\cdot x^3}{9^3\cdot a^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{4^4\cdot x^4}{9^4\cdot a^4} + \right.$ etc. vel poſito $\frac{9a}{4} = b$, vt ſit $b = \frac{9c}{8} = AE$ erit $ss = xx\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{b} + \frac{1\cdot 3}{6\cdot 8}\frac{x^2}{b^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\, x^3}{6\cdot 8\cdot 10\, b^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\, x^4}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\, b^4} + \text{etc.}\right)$ ex qua aequatione facile intelligitur tangentem in A in axem AC incidere, quod ex aequatione ſuperiore difficilius perſpicitur. Nunc autem ad alias corporum ſpecies progrediamur minus determinatas quam hactenus tractatae, in quibus ſcilicet duae curuae ſuperſint arbitrariae.

PROPOSITIO 66.
Problema.

Tab. XXX. fig. 1. 669. *Sit non ſolum ſectio aquae* ABb *ſed etiam ſectio ampliſſima* BDb *curua quaecunque data, ſolidumque* ABDb *hanc habeat proprietatem, vt omnes ſectiones verticales* STs *ad axem* AC *normales ſint ſectioni* BDb *ſimiles atque moueatur hoc corpus in aqua ſecundum directionem* CAL *determinari oportet reſiſtentiam quam patietur.*

Solutio.

Primo cum ſectio aquae AB*b* ſeu potuis eius ſemiſſis ACB ſit curua quaecunque data; ſumta in ea abſciſſa AP $= x$, et poſita applicata PS $= s$, erit s functio quaedam ipſius x data. Deinde cum etiam curua BD*b* ſeu potius eius ſemiſſis BDC data ſit poſitis ad eam coordinatis CG $= r$ et GH$= u$, dabitur aequatio inter u et r atque u aequabitur functioni cuidam ipſius r. Cum nunc ſectio STP ſimilis ſit ſectioni BDC, lineae in iis homologae tenebunt rationem vt PS ad CB. Poſito igitur CB $= b$, et pro ſectione SPT ſumtis coordinatis PM $= y$, et MQ $= z$ ſimilibus ipſis r et u, erit $y = \frac{rs}{b}$ et $z = \frac{us}{b}$. Cum nunc s ſit functio ipſius x, ponatur $ds = pdx$, vt p ſit functio ipſius x, ſimiliterque ob u functionem ipſius r ponatur $du = qdr$, vt q ſit functio ipſius r. His igitur factis erit $dy = \frac{rpdx}{b} + \frac{sdr}{b}$, et $dz = \frac{updx}{b} + \frac{sqdr}{b}$; vnde ob $\frac{sdr}{b} = dy - \frac{rpdx}{b}$ ſequens emergit aequatio inter tres coordinatas x, y, et z qua natura ſuperficiei propoſitae continetur. $dz = \frac{(u-aqr)pdx}{b} + qdy$; quae cum generali aequatione in prop. 61. aſſumta $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata praebet $P = \frac{(u-qr)p}{b}$ et $Q = q$, vbi notandum quantitates s et p a ſola x pendere, u vero et q ab r, atque r et x a ſe mutuo non pendere. Ad reſiſtentiam iam motui contrariam inueniendam oportet primum huius formulae $\frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ poſito x conſtante integrale reperire, atque poſt integrationem facere $y = s$. Quoniam igitur x eſt conſtans, erit $dy = \frac{s\,dr}{b}$, atque ob $1 + P^2 + Q^2 = \frac{b^2 + (u-qr)^2 p^2 + b^2 q^2}{b^2}$ fiet $\frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-qr)^2}$ in cuius integrali capiendo p et s tanquam quantitates conſtantes conſiderari debent. Inuento igitur integrali $\frac{p^3 s}{b^2}\int\frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$ ita vt euaneſcat poſito $r = 0$, tumque facto $r = b$, integrale hoc multplicandum eſt per dx, denuoque integrale capiendum, vnica enim inerit variabilis x, atque integratione peracta poni debet $x = AC = a$. Vel quod eodem redit iſta formula $\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq)+b^2 p^2(u-qr)^2}$ bis eſt integranda, in altera integratione x, p, et s ponendo conſtantia, in altera autem r, q et u; perinde enim eſt quaenam integratio prius inſtituatur. Deſignata autem quantitate, quae per duplicem integrationem, poſt quam poſitum eſt $r = b$ et $x = a$, prodit, per hanc formam $\iint\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq)+b^2 p^2 (u-qr)^2}$ erit reſiſtentiae vis, quae ſecundum directionem AC retro pellit corpus $= \frac{2v}{bb}\iint\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$. Simili autem modo rem peragendo reperietur reſiſtentiae vis verticalis corpus ſurſum ſollicitans $= \frac{2v}{b}\iint\frac{(u-qr)^2 p^2 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$. Denique ſi eodem modo quaeratur valor $\iint\frac{(u-qr)^2(bbx+pus(u-qr))p^2 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq)+b^2 p^2(u-pr)^2}$ isque diuidatur per $\iint\frac{(u-qr)^2 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$ prodibit diſtantia AO, ex eaque ſitus puncti O per quod vis reſiſtentiae verticalis tranſit. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

700. Cum ſit $\frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = dr\left(\frac{(u-qr)^3}{b^2(1+qq)} - \frac{p^2(u-qr)^5}{b^4(1+qq)^2} + \frac{p^4(u-pr)^7}{b^6(1+qq)^3} - a\right)$ fiet $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = \frac{1}{bb}\int p^3 s dx.\int\frac{(u-qr)^3 dr}{1+qq} - \frac{1}{b^4}\int p^5 s dx.\int\frac{(u-qr)^5 dr}{(1+qq)^2} + \frac{1}{b^6}\int p^7 s dx.\int\frac{(u-qr)^7 dr}{(1+qq)^3} -$ etc. in quibus integrationibus variabiles r et x, a ſe inuicem prorſus ſunt ſeparatae.

Coroll. 2.

701. Si igitur ſingulae formulae differentiales, in quibus tantum ineſt r et quantitates inde pendentes u et q ita integrentur vt euaneſcant poſito $r = b$; ſimilique modo alterae formulae integrales in quibus tantum inſunt x et s et p integrentur, tumque ponatur $x = a$; obtinebitur deſideratus valor formulae $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$.

Coroll. 3.

702. Simili igitur modo reliquae formulae differentiales, quae duplicem integrationem requirunt, per ſeries ita exprimi poterunt, vt binae variabiles x et r prorſus a ſe inuicem ſeparentur; quo facto ſingulae ſine vllo reſpectu ad reliquas habito ſeorſim integrari poterunt.

Coroll. 4.

703. Cum ſoliditas corporis in genere ſit $= -2\int dx \int Q y dy$, vbi in integtatione $\int Q y dy$ ponitur x conſtans, erit pro noſtro caſu ob $y = \frac{rs}{b}$ et $dy = \frac{s dr}{b}$ atque $Q = q$, formula $\int Q y\,d y = \int\frac{q r s^2 dr}{bb} = \frac{s^2}{b^2}\int r du = -\frac{s^2}{b^2}\int u dr$, vbi $\int u dr$ denotat aream BCD vnde tota ſoliditas erit $= 2\int\frac{ssdx}{bb}\int u dr$.

Coroll. 5.

704. Superficies vero solidi ABDb ex formula generali $2\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ inuenietur, quae ob x constans in altera integratione abit in $2\iint \frac{sdrdx}{bb} \sqrt{(bb(1+qq)+pp(u-qr)^2)}$ vbi duplici integratione est opus, altera in qua r, altera in qua x ponitur constans.

PROPOSITIO 67.

Problema.

705. *Si data fuerit sectio verticalis* BDb *ad axem* AC *normalis, cui omnes reliquae sectiones ipsi parallelae* S Ts *sint similes; determinare curuam* ASB, *ex qua natum solidum* ABDb *pro capacitate sua minimam patiatur resistentiam, si quidem moueatur in aqua secundum directionem axis* CAL. Tab. XXX. fig. 1.

Solutio.

Manentibus vt ante, $BC=b$, $CG=r$, atque $GH=u$, positoque $du=qdr$, ita vt u et q futurae sint functiones datae ipsius r; sit $AP=x$ $PS=s$ ponaturque $ds=pdx$, quibus positis erit resistentia vt $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\, drdx}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$ quae quantitas ideo bis integrata minimum esse debet. Concipiatur autem integratio ea primum institui in qua r cum inde pendentibus s et q ponitur constans, atque post integrationem fieri $x=AC=a$, manifestum est in altera integratione naturam curuae ASB non amplius contineri. Quo circa requiritur vt quantitas, quae per priorem integrationem prodit, reddatur minima Multiplicatum autem hic est dx per $\int \frac{(u-qr)^3 p^3 sdr}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$, in qua p et s tantum

tantum sunt quantitates variabiles. Ponatur breuitatis gratia $u - qr = t$ et $1 + qq = w^2$, habebitur ista formula $\int \frac{t^3 p^3 s dr}{bb w^2 + ttp^2}$, quae differentiata ponendis semper r, t et w constantibus dat $p^3 ds \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + ttp^2} + pp dp \int \frac{(3b^2 w^2 + ttp^2) t^3 s dr}{(b^2 w^2 + ttp^2)^2}$ vnde oritur iste valor ad determinationem minimi requisitus $p^3 \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + ttp^2} - \frac{1}{dx} d. pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s dr}{(b^2 w^2 + ttp^2)^2}$, qui poni deberet $= 0$ nisi capacitatis ratio esset habenda. Capacitas vero est vt $\int ssdx \int udr$, in quo integrali multiplicatum est dx per $ss \int udr$, cuius differentiale est $2sds \int udr$, ex quo valor ad maximum determinandum inseruiens est $2s \int udr$. His ergo valoribus coniunctis emerget ista aequatio $\frac{2s \int udr}{c} = p^3 \int \frac{t^3 dr}{b^2 w^2 + ttp^2} - \frac{1}{dx} d. pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$, quae multiplicata per $pdx = ds$, et integrata dat $\frac{ss \int udr}{c} - f^3 = \int \frac{t^3 p^3 s dr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} - \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 p^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} = - \int \frac{2b^2 w^2 t^3 p^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo ergo fieri queat $s = 0$, necesse est vt sit $f = 0$; ita vt facto c negatiuo ista habeatur aequatio pro curua quaesita $s = \frac{2b^2 cp^3}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$ cui valor sequens ipsius x valor respondebit $x = \int \frac{s}{p} = \frac{s}{p} + \int \frac{sdp}{pp} = \text{Const.} + \frac{2b^2 cp^2}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} \frac{-b^2 c}{\int udr} \int \frac{w^2 tdr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} = \text{Const.} - \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{(b^2 w^2 - t^2 p^2) w^2 tdr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo x simul euanescat, si fit $p = 0$, quippe quo casu simul fit $s = 0$, fiet Const. $= \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{tdr}{b^2}$ ita vt fiat $x = \frac{cpp}{\int udr} \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quoniam autem $\int udr$ valorem habet constantem ratione variabilium nostrarum x, s et p, ea in constanti c comprehendatur, atque restitutis pristinis valoribus pro w et t, haec habetur constructio: $x = \frac{cpp}{bb} \int \frac{(3b^2(1+qq) + pp(u-qr)^2)(u-qr)^3 dr}{(b^2(1+q^2) + p^2(u-qr)^2)^2}$ et $s = 2cp^3 \int \frac{(1+}{}$

$\int \frac{(1+qq)(u-qr)^3 dr}{(b^2(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^2}$. Quae formulae integrales constructionem minime turbant, cum in iis p constans ponatur, ideoque ex aequatione inter r et u data integratio actu absolui queat; ita autem integratio absolui debet vt prodeat o posito $r = 0$, quo facto faciendum est $r = b$. Q. E. I.

Coroll. 1.

706. Haec igitur curua pariter in A tangentem habebit in axem AL incidentem, cum initio quo tam x et s euanescunt fit $p = 0$. Insuper vero alio loco curua in axem AC cadet, quod eueniet si $p = \infty$, hoc enim casu fit $s = 0$ et $x = \frac{c}{bb}\int(u - qr)\,dr = \frac{2c}{bb}\int udr$; seu x aequabitur areae basis BDb ductae in $\frac{c}{bb}$; vel erit $x = \frac{2c \cdot BCD}{BC^2}$.

Coroll. 2.

707. In altero hoc puncto, vbi curua iterum in axem AC incidit, tangens erit normalis ad axem AC, ex quo ista curuae portio solidum generabit maximam patiens resistentiam.

Coroll. 3.

708. Cum insuper axis AC sit diameter curuae inventae, quod constat ex eo, quia facto p negatiuo x manet, s vero in sui negatiuum abit, curua non multum dissimilis erit ei quam ante inuenimus, cum sectio BDb sit semicirculus.

Coroll. 4.

709. Ab inito autem vbi fit $p = 0$, crescente p

 crescent

crescent tum abscissa x quam applicata s vsque ad certum terminum, qui terminus reperietur differentiando $\int \frac{p^3(1+qq)(u-qr)^3 r}{(b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2)^2}$ posito tantum p variabili, faciendoque differentiali $=0$.

Coroll. 5.

710. Absoluta autem hac differentiatione reperietur sequens aequatio ex qua valor ipsius p determinabitur $0=\int \frac{p^2(3b^2(1+q^2)-p^2(u-qr)^2(1+q^2)(u-qr)^3 dr}{(b^2(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^3}$ quae integratio modo praescripto perfici debet, postea que poni $r=b$.

Coroll. 6.

711. Si fuerit $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ quod accidit, si curua BDb fuerit semicirculus, tum quantitas p ex formulis integralibus eliminari poterit. Erit nempe hoc casu $x=\frac{cf^5 p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$ et $S=\frac{2cf^3p^3}{(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$.

Coroll. 7.

712. Si igitur $\int dr\sqrt{(1+qq)}$ seu arcus BD tanquam quantitas constans in c comprehendatur fiet $x=\frac{c^5 p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}$ et $S=\frac{2c^5p^3}{(bb+ffp^2)^2}$.

Scholion.

713. Notandum ceterum est hanc proprietatem, qua est $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ seu $-u+qr=f\sqrt{(1+qq)}$, in nullam aliam curuam praeter circulum competere. Nam sumtis differentialibus ob $du=qdr$ erit $rdq=\frac{fqdq}{\sqrt{(1+qq)}}$ ideoque $r=\frac{fq}{\sqrt{(1+qq)}}$ vel etiam propter diuisionem

dy

$dy = 0$, vnde primo linea recta dicta proprietate gaudet. Deinde cum ſit $u = qr - f\sqrt{(1+qq)}$ erit $u = \frac{fqq}{\sqrt{(1+qq)}} - f\sqrt{(1+qq)} = -\frac{f}{\sqrt{(1+qq)}}$. Erit ergo $\frac{r}{u} = -q$ vnde fit $r = \frac{fr}{\sqrt{(r^2+u^2)}}$ ſeu $f = \sqrt{(r^2+u^2)}$. Quia autem facto $u = 0$ fieri debet $r = b$ erit $f = b$, indeque $b^2 = r^2 + uu$. Caſus itaque memoratus quo fit $(u - qr)^2 = ff(1+qq)$ locum non habet, niſi ſectio BDb, fuerit ſemicirculus vel triangulum iſoſceles. Denique id etiam hic generaliter locum habet, vt, quaecunque fuerit curua BDb, curua AB quaeſtioni ſatisfaciens ſemper euadat algebraica, cum formulae integrales conſtructionem algebraicam non afficiant.

PROPOSITIO 68.

Problema.

714. *Si data ſit corporis* ABDb *tum ſectio ampliſ-* Tab. XXX. fig. 2. *ſima* BDb, *tum etiam figura ſpinae* ASD *ſeu ſectio diametralis* ACD, *ſolidumque ita ſit comparatum vt omnes ſectiones verticales parallelae ſectioni mediae* ACd *eidem ſint ſimiles: determinare reſiſtentiam, quam hoc corpus ſentiet, ſi curſu directo ſecundum directionem* CAL *in aqua promoueatur.*

Solutio.

Cum primo data ſit ſectio verticalis diametralis ACD dabitur aequatio inter eius abſciſſam AR $= r$ et aplicatam RS $= s$, ita vt s aequetur functioni ipſius r futurumque ſit $ds = p\,dr$ exiſtente p pariter functione ipſius r. Deinde ſit interuallum AC $= a$, quo vertex A a ſectione ampliſſima BDb diſtat, atque pro hac ſectione

 BDC

BDC ponatur abscissa $CG = y$, quippe quae aequalis euadet secundae variabili $PM = y$, trium illarum x, y et z, quae in aequationem localem totius superficiei ingredientur, atque applicata $GH = u$, eritque ob hanc curuam cognitam u functio quaedam ipsius y, ita vt posito $du = qdy$ futura sit etiam q functio ipsius y; posito vero $y = 0$, abibit GH, u in CD, quae sit $= c$ ita vt c tam fiat valor ipsius u posito $y = 0$ quam valor ipsius s posito $r = a$. Iam cum sectio FGH, parallela sectioni ACD, eidem sit similis erit $CD : AC = GH : FG$, ex quo fit $FG = \frac{au}{c}$. Sumto nunc in sectione FGH puncto M homologo puncto R in sectione ACD erit $FM = \frac{ru}{c}$, et $MQ = z = \frac{su}{c}$. Porro ex M ad axem AC ducatur normalis $MP = y$, quippe quae aequalis est ipsi CG, et posito $AP = x$ erit $CP = a - x = GM = \frac{au}{c} - \frac{ru}{c}$, vnde fit $x = a - \frac{(a-r)u}{c}$. Quare cum ex curuis ACD et BCD datis sequentes variabilium x, y, et z habeamus valores $x = a - \frac{(a-r)u}{c}$; $y = y$ et $z = \frac{su}{c}$, erit $dx = \frac{-aqdy + rqdy + udr}{c}$; et $dz = \frac{sqdy + updr}{c}$ vbi cum sit $\frac{udr}{c} = dx + \frac{aqdy - rqdy}{c}$ fiet $dz = pdx + \frac{(ap - rp + s)qdy}{c}$, quae aequatio cum canonica $dz = Pdx + Qdy$ comparata praebet $P = p$ et $Q = \frac{(ap - rp + s)q}{c}$, ita vt sit $1 + P^2 + Q^2 \frac{c^2 + c^2p^2 + (ap - rp + s)^2 q^2}{c^2}$: quae expressiones duas complectuntur quantitates variabiles a se inuicem non pendentes scilicet y, et per y datas u et q, atque r ex eaque datas s et p. Hinc erit $\frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{c^2 p^3 dy}{c^2(1 + p^2) + q^2(ap - rp + s)^2}$ in cuius differentialis integratione tantum y est variabilis, atque r, s et p tanquam constantes spectantur. Integratione

autem

autem ita absoluta vt prodeat o; posito $y = o$ fieri debet $y = BC$ seu $u = o$; quo facto prodibit functio mera ipsius r quae in dx ducta denuo integrari debet. Sed cum dx posito y constanti fiat $= \frac{udr}{c}$, ideoque ab y pendeat, duplex ista integratio inuerso modo est instituenda, ponendo primo y constans. Nam quoniam formula generalis ad resistentiam definiendam est $\iint \frac{P^3 dy dx}{1 + P^2 + Q^2}$, quae duplicem integrationem requirit alteram posito x constante, alteram posito y constante, ea ob $dx = \frac{udr}{c}$ pro nostro casu abit in hanc $\iint \frac{cp^3 udrdy}{c^2(1+p^2) + q^2(ap-rp+s)^2}$ cuius valor pariter duplici integratione est eruendus, in quarum altera y cum u et q, in altera vero r cum p et s poni debet constans. Hocque modo rem absoluendo perinde est vtra integratio primum absoluatur. Vtraque autem integratio ita perfici debet, vt integralia per omnes valores variabilium r et y extendantur. Hoc ergo monito prodibit resistentiae vis horizontalis in directione AC repellens $= 2cv \iint \frac{p^3 udrdy}{c^2(1+p^2) + q^2(ap-rp+s)^2}$ Resistentiae vero vis verticalis corpus sursum vrgens erit $= 2cv \iint \frac{p^2 udrdy}{c^2(1+p^2) + q^2(ap-rp+s)^2}$. Ad cuius locum applicationis seu punctum O inueniendum ob $x + Pz = \frac{ac-(a-r)u+psu}{c}$ ista quantitas $\iint \frac{(ac-(a-r)u+psu)\, p^2 udrdy}{c^2(1+p^2) + q^2(ap-rp+s)^2}$ diuidi debet per $\iint \frac{cp^2 udrdy}{c^2(1+p^2) + q^2(ap-rp+s)^2}$, quotusque indicabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. I.

715. Cum in sectione aquae BAb applicata GF ad applicatam GH sectionis amplissimae BDb constantem habeat rationem, curua CBA affinis erit curuae CED, vt si data sit curua CBA sectio aquae ACB facillime innotescat.

 Coroll.

Coroll. 2.

716. Huius igitur problematis ſolutio ſimilis manebit, ſi loco curuae BCD daretur ſectio aquae ACB; quamobrem dummodo omnes ſectiones verticales FGH inter ſe ſint ſimiles, perinde ſe habebit ſolutio, ſiue curva ACB detur ſiue altera BCD.

Coroll. 3.

717. Quoniam porro tota corporis ABDb ſoliditas generaliter eſt $= -2\int\int Q y\,dy\,dx$ erit pro noſtro caſu ob $dx = \frac{udr}{c}$ et $Q = \frac{(ap-pr+s)q}{c}$ ſoliditas $= \frac{-2}{cc}\int\int(ap-pr+s)qu\,y\,dr\,dy$.

Coroll. 4.

718. Harum duarum integrationum inſtituatur primum, in qua y, ſimulque u et q ponuntur conſtantes, fiet $\int(ap-pr+s)dr = \int s\,dr + \int(a-r)ds = t$ areae ACD ſi poſt integrationem ponatur $r = a$. Haec area ACD ergo ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{-4ff}{cc}\int q u y\,dy$.

Coroll. 5.

719. Deinde cum ſit $\int quy\,dy = \int uy\,du$ erit $\int quy\,dy = \frac{u^2y}{2} - \frac{1}{2}\int u^2\,dy = -\frac{1}{2}\int u^2\,dy$ poſito $u = 0$. Quare tota ſoliditas prodibit $= \frac{2ff}{cc}\int u^2 dy$, quae expreſſio eadem ex natura conſtructionis oritur.

Scholion.

720. Quoniam figura ſectionis aquae ACB ex ſola ſectione ampliſſima BCD determinatur neque a figura ſe-

sectionis diametralis ACD pendet, simul etiam ista quaestio est resoluta, qua solidi resistentia quaeritur, quod ex datis curuis ACB et ACD ita generetur vt omnes sectiones FGH plano diametrali ACD parallelae sint inter se similes; adeo vt non opus sit hanc quaestionem seorsim tractare. Simili modo in casu praecedente, quo datae erant sectio aquae ACB et sectio amplissima BCD huic autem parallelae sectiones omnes SPT positae sunt inter se similes, curua ATD a sola curua ASB determinatur vbique enim habet PT ad PS eandem rationem eam scilicet quam habet CD ad CB, ita vt curua ATD affinis sit curuae ASB: voco autem curuas affines, quae communem habent abscissam, et quarum applicatae aequalibus abscissis respondentes datam inter se tenent rationem; ita omnes ellipses vnum axem communem habentes sunt secundum hanc definitionem curuae affines; sed mox hanc definitionem pluribus euoluemus. Propter istam igitur affinitatem, quae inter sectiones ACB et ACD intercedit alteram quaestionem etiam non attigimus, qua quaeri posset resistentia eiusmodi solidorum, quae ex datis curuis BCD et ACD ita generantur vt omnes sectiones SPT sectioni ACD parallelae ipsi simul sint similes. Hinc etiam in sequentibus, vbi omnes sectiones horizontales inter se similes ponuntur alterutram curuarum BCD et ACD pro data assumere sufficiet, cum pari modo altera alteri sit affinis. Hoc igitur pacto numerus problematum pertractandorum, si quidem perfectam enumerationem facere volemus, ad sui medietatem diminuitur.

Tab. XXX. fig. 1.

Exem-

Exemplum 1.

Tab. XXX. fig. 2.

721. Ponamus omnes ſectiones verticales FGH, ſectioni diametrali ACD parallelas eſſe quadrantes circuli, centris G deſcriptos, ſeu ſolidum ABDb generatum conuerſione figurae BDb circa axem immobilem Bb. Erit ergo ACB quadrans circuli, ideoque $c = a$, et $s = \sqrt{(2ar - rr)}$: vnde fit $p = \frac{(a-r)}{\sqrt{(2qr-rr)}}$ et $1 + pp = \frac{a^2}{2ar-rr}$. atque $ar - rp + s = \frac{aa}{\sqrt{(2ar-rr)}}$. His ſubſtitutis prodit reſiſtentiae horizontalis vis $= \frac{2v}{a^2} \iint \frac{(a-r)^3 u\,dr\,dy}{(1+qq)\sqrt{(2ar-rr)}}$. Ponatur primo u cum y et q conſtans, atque integrale $\int \frac{(a-r)^3 dr}{\sqrt{(2ar-rr)}}$ poſito poſt integrationem $r = a$ fiet $= \frac{2}{3}a^3$ quare vnica integratio reſtat, ideoque erit reſiſtentia queſita $= \frac{4v}{3} \int \frac{u\,dy}{1+qq}$, quod integrale ita eſt accipiendum, vt euaneſcat poſito $y = 0$, tumque ponatur $u = 0$. Reſiſtentiae autem vis verticalis, qua corpus ſurſum vrgebitur erit $= \frac{2v}{a^3} \iint \frac{(a-r)^2 u\,dr\,dy}{(1+qq)}$; prior vero integratio poſito y conſtante, facto $r = a$ dat $\int (a-r)\,dr = \frac{a^3}{3}$. Hinc ergo prouenit reſiſtentiae vis verticalis $\frac{2v}{3} \int \frac{u\,dy}{1+qq}$. Denique cum ſit $\frac{ac-(a-r)u+psu}{a} = a$, erit interuallum AO $= a$, ſeu punctum O, cui vis illa verticalis eſt applicata incidet in ipſum punctum C.

Coroll. 1.

722. In huiusmodi igitur corporibus, quae reſpectu axis Bb ſunt rotunda, reſiſtentiae vis horizontalis ad verticalem conſtantem habet rationem; ſcilicet reſiſtentia verticalis ſe habebit ad horizontalem vt 1 ad 2, ita vt vis verticalis ſit duplo minor, quam horizontalis.

Coroll. 2.

723. Si ſectio ampliſſima BDb quoque fuerit ſemicirculus ita vt corpus fiat quadrans ſphaerae; ob $CB = CD = a$, erit $u = \sqrt{(a^2-y^2)}$ et $q = \frac{-y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$; quare fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \int \frac{dy(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = \frac{3\pi a^2}{16}$; ita vt reſiſtentia horizontalis prodeat $= \frac{\pi a^2}{4}$ et verticalis $= \frac{\pi a^2}{8}$.

Coroll. 3.

724. Si ſectio ampliſſima BDb fiat triangulum iſoſceles, ita vt ſit $BC = Cb = b$ erit $u = a - \frac{ay}{b}$, et $q = \frac{-a}{b}$ Ex his fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \frac{ab}{aa+bb} \int (b-y)\,dy = \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$ · quare reſiſtentia horizontalis erit $= \frac{2ab^3}{3(aa+bb)}$ et verticalis $= \frac{ab^3}{3(a^2+b^2)}$

Coroll. 4.

725. Intelligitur ex hoc caſu reſiſtentiam ceteris paribus eo fore minorem, quo maius fuerit diſcrimen inter latitudinem BC et altitudinem CD. Manente enim b in his formulis, reſiſtentia fit maxima ſi ponatur $a = b$.

Exemplum 2.

726. Sint nunc omnes ſectiones verticales FGH, quae ſectioni diametrali ſunt parallelae quadrantes elliptici inter ſe ſimiles: eritque ſectio diametralis ACD pariter quadrans ellipticus cuius alter ſemiaxis $AC = a$, alter $CD = c$, vnde fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(2ar-rr)}$ atque $p = \frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$. Sit breuitatis gratia $a - r = t$, fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-t^2)}$ et $p = \frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $1 + pp = \frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$ porroque $(a-r)p + s = \frac{ac}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$:

ex quibus fit $\frac{p^3 u d r d y}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2} = \frac{-ct^3 u d t d y}{(a^5(1+qq)-a(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Integretur primo haec formula ponendo y et u et q constantes, ita vt integrale euanescat posito $t = a$, quo facto fiat $t = 0$; orieturque $\frac{cudy}{a^2-c^2}\left(-1+\frac{a^2(1+qq)}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2q^2+c^2)}}\text{ A tang. }\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2q^2+c^2)}}\right)$ seu per seriem $\frac{cudy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}-\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$, quae commodiorem praestat vsum quam illa expressio, quippe quae si $c > a$ cessat a quadratura circuli penderet, sed ad logarithmos reducitur. Hinc itaque resistentiae vis horizontalis, quam hoc corpus sentiet, erit $= 2c^2 v \int \frac{udy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}-\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$ integratione ita absoluta vt fiat integrale $= 0$ si ponanur $y = c$, tumque poni debet $y =$ CB seu $u = 0$.

Exemplum 3.

727. Sit nunc tam curua ACD quam BCD quadrans ellipticus, ita vt quadrantis elliptici ACD semiaxes sint $AC = a$ et $CD = c$; alterius vero BCD semiaxes $BC = b$ et $CD = c$; erit ergo primo vt ante $s = \frac{c}{a}\sqrt{(2ar-rr)}$ et $p = \frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$ seu posito $a-r = t$ erit $s = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-tt)}$; $p = \frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ $1+p^2 = \frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$; formulaque resistentiae horizontali inueniendae inseruiens $\frac{p^3 u d r d y}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ fiet $= \frac{ct^3 u d t d y}{a(a^4(1+qq)-(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Cum nunc porro sit $u = \frac{c}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$ erit $q = \frac{-cy}{b\sqrt{(b^2-y^2)}}$ et $1+qq = \frac{b^4-(b^2-c^2)y^2}{b^2(bb-yy)}$, atque formula illa differentialis transibit in hanc

$$\frac{bc^2t^3 dt dy (b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a(a^4b^4-a^4(b^2-c^2)y^2-b^4(a^2-c^2)t^2+b^2(a^2-c^2)t^2y^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$$

cuius