Coroll. 4.

648. Niſi ergo ſit $b=c$, reſiſtentia coni circularis ſemper erit maior quam reſiſtentia coni elliptici. Sumtis enim quadratis perſpicuum eſt eſſe $a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 > a^4+2a^2bc+bbcc$, quia ſemper eſt $bb+cc>2bc$, niſi ſit $b=c$.

Coroll. 5.

649. Manente ergo area baſis elliptica BDb et altitudine coni AC eadem, reſiſtentia erit maxima, ſi baſis abeat in ſemicirculum. Eo minor igitur erit reſiſtentia, quo maior inaequalitas inter altitudinem et latitudinem baſis intercedet.

Scholion 2.

650. Ex his igitur ſatis perſpicuum eſt corpus conoidicum, quod minimam patiatur reſiſtentiam in finitis aſſignari non poſſe. Nam ſi altitudo coni a maneat conſtans, reſiſtentia eo minor euadet, quo minor accipiatur baſis BDb ceteris paribus. At ſi inſuper baſi data area tribuatur, reſiſtentia ſemper magis diminui poteſt inaequalitatem inter eius altitudinem CD et latitudinem CB maiorem ponendo. Hancobrem iſtud problema non attingemus, quo vel inter omnes conos abſolute, vel inter aequicapaces tantum is deſideretur qui minimam patiatur reſiſtentiam. Ad alias igitur corporum ſpecies progrediamur et quomodo reſiſtentia ſe in iis habeat, inquiramus. Eiusmodi vero adhuc contemplabimur corporum figuras, in quibus unica curua maneat indeterminata, quemadmodum euenit in his corporibus conoidicis in quibus ſola baſis ſupererat indeterminata.

PRO-

PROPOSITIO 63.

Problema.

651. *Sit partis submersae nauis pars anterior in motu directo resistentiam patiens cono cuneus latissimo sensu acceptus* AEDHBbbD, *ex data curua tanquam basi* BD*b* *et recta verticali* AFE *ita generatus vt eius superficies terminetur rectis horizontalibus* HF, *b*F *ex singulis perimetri basis* BD*b* *punctis ad rectam* AE *ductis; haecque figura cursu directo in aqua progrediatur secundum directionem axis* CAL: *determinare resistentiam quam patietur* Tab. XXIX. fig. 2.

Solutio.

In hac igitur figura planum verticale diametrale ACDE erit parallelogrammum rectangulum, atque sectio aquae AB*b* triangulum isosceles; similique modo omnes sectiones horizontales FH*b* erunt triangula aequicrura. Porro ex constructione apparet omnes sectiones verticales per rectam AE factas, cuius modi est AGHF esse parallelogramma rectangula. Tota ergo figura in prora desinit in aciem rectilineam verticalem AFE; amplissima autem sectio verticalis axi AC normalis erit basis huius cono-cunei BD*b*, a cuius natura totius figurae natura pendet. Posita ergo longitudine $AC = a$, sumatur in basi abscissa $CG = r$ et applicata $GH = u$, atque ob basin datam dabitur aequatio inter u et r, seu u per r. Sit autem $du = pdr$, et quantitas p erit cognita per r. Concipiatur nunc sectio verticalis ST*s* basi parallela, pro qua sit $AP = x$, et per GH et AE alia fiat sectio AGHF, quae erit rectangulum, eiusque latus HF in superficie figurae erit situm. Positis ergo $PM = y$ et $MQ = z$ erit $z =$

 GH

GH $= u$, atque $x:y = a:r$, vnde fit $y = \frac{rx}{a}$. Ex his reperitur $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$, et $dz = du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$. Pro superficie igitur huius cono-cunei iſta habetur aequatio $dZ = \frac{-apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$, qua cum aequatione canonica $dZ = Pdx + Qdy$ comparata dat $P = \frac{-apy}{xx} = \frac{-pr}{x}$, ob $y = \frac{rx}{u}$ atque $Q = \frac{ap}{x}$. Hinc oritur $1 + P^2 + Q^2 = \frac{x^2 + p^2(a^2 + r^2)}{x^2}$, atque formulae integrales propoſitionis 61. in quibus poſitum eſt x conſtans in ſequentes transmutantur, ob $dy = \frac{xdr}{a}$ quia x eſt conſtans: ſcilicet fit $\int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = -\int \frac{p^3r^3dr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$; et $\int \frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2r^2xdr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$ atque cum ſit $x + Pz = x - \frac{pru}{x}$ erit $\int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2r^2(xx - pru)dr}{axx + ap^3(a^2+r^2)}$ quae integralia ita ſunt accipienda poſito x conſtante, vt euaneſcant poſito $r = 0$, tum vero poni debet $r =$ CB ſeu $u = 0$. Ad reſiſtentiam deinde ipſam inueniendam ſumi debet hoc integrale $\int dx \int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = -\int \frac{dx}{a} \int \frac{p^3r^2dr}{xx + p^2(a^2+r^2)}$. At quoniam poſt integrationem poſterioris formulae r et p ab x non pendebunt, quaeſtio huc eſt reducta vt $\frac{-p^3r^3drdx}{ax^2 + ap^2(a^2+r^2)}$ bis integretur ponendo in altera integratione x in altera vero r et p conſtantes; perinde autem eſt ab vtra integratione initium fiat. Quare ponamus primo p et r conſtantes eritque integrale $\frac{-p^2r^3dr}{a\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ poſito poſt integrationem vti oportet $x = a$. Integratione ergo altera inſtituta et poſtea poſito $r =$ CB ſeu $u = 0$, prodibit $\int dx \int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{-P^2r^3dr}{a\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$. Hancobrem ſi cono-cuneus moueatur ſecundum directionem axis CAL celeritate altitudini v debita, erit reſiſtentiae vis, qua ſecundum directionem AC repelletur $= \frac{-2v}{a} \int \frac{p^2r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ ſimili modo integrationes abſoluendo erit $\int dx \int \frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2} =$

ſſ

$\iint \frac{p^2 r x^2 dx dr}{axx + ap^2(a^2 + r^2)}$, vbi bis integrari oportet, altera vice x altera vero r et p ponendo constantes; posito igitur primo r constante, erit $\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2 r^2 dr}{a} \left(\frac{\surd(a^2 + p^2(a^2+r^2))}{p\surd(a^2+r^2)} \right. = \int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \left(\frac{a^2 + a^2 p^2 + p^2 r^2}{a^2 p^2 + p^2 r^2} \right.$. Facto ergo post integrationem $r = CB$ seu $u = 0$ prodibit vis resistentiae, qua corpus verticaliter sursum vrgebitur $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \left(\frac{a^2 + p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} \right.$. Denique ad locum applicationis huius vis, qui fit in O inueniendum bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{p^2 r^2 (x^2 - pru) dx dr}{axx + app(aa+rr)}$. Ponatur primo x tantum variabile, positoque post integrationem $x = a$ habebitur pro altera integratione $\int p^2 r^2 dr \left(1 - \frac{(p(a^2+r^2)+ru)}{a\surd(a^2+r^2)} \right.$ A tang. $\frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}$; quod integrale, cum positum fuerit $u = 0$, diuisum per integrale ante inuentum $\int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \left(\frac{a^2 + p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} \right.$ dabit distantiam AO puncti O, per quod resistentiae vis verticalis transit a prora A. Q. E. I.

Coroll. 1.

652. Quaecunque ergo curua pro basi B D b accipiatur, resistentiae motui contrariae determinatio, quae est $= \frac{-2v}{a} \int \frac{p^2 c^3 dr}{\surd(a^2+r^2)}$ A tang. $\frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}$ quadraturam circuli requirit. At contra resistentiae vis, quae sursum vrget pendet a logarithmis.

Coroll. 2.

653. Ex his formulis etiam perspicitur vtramque resistentiae vim eo fore minorem quo maior sit longitudo; vtraque etim euanescit si ponatur $a = \infty$. Magis vero dum crescit a, decrescit vis resistentiae horizontalis quam verticalis.

Coroll.

Coroll. 3.

654. Si longitudo $AC = a$ fuerit tam magna respectu basis BDb, vt p et r prae a euanescant erit resistentiae vis horizontalis $= \frac{-2v}{aa} \int p^2 r^3 dr$. A tang. $\frac{1}{p}$ resistentiae vero vis verticalis erit $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \left(\frac{1+pp}{pp}\right.$.

Coroll. 4.

655. At si longitudo $AC = a$ euanescat vt tota figura abeat in solam basem BDb tum resistentia horizontalis fiet $= \frac{-2v}{a} \int p^2 r^2 dr$ A tang. $\frac{a}{pr} = -2v \int prdr = 2v \int udr$, prout per se patet; at resistentia verticalis euanescet.

Coroll. 5.

656. Soliditas totius huius cono-cunei reperitur ex §. 617. quippe quae est $2\int -dx \int Qy\,dy = 2\int -dx \int \frac{xprdr}{a}$. Quae cum x in priore integratione sit constans, abit in $-2\int \frac{xdx}{a} \int prdr = \int \frac{2xdx}{a} \int udr$, denotatque $\int udr$ aream CBD. Vnde tota soliditas $= a\int udr$, quae quidem sponte patet.

Coroll. 6.

657. Superficies autem huius cono-cunei in aquam incurrentis est ex §. 616. $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)} = 2\int dx \int \frac{dr}{a} \sqrt{(x^2 + p^2(a^2 + r^2))}$. Vnde bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{2dxdr}{a} \sqrt{(x^2 + p^2(a^2 + r^2))}$, altera vice x altera r ponendo constans. Si autem primo r ponatur constans, erit integrale $\frac{xdr}{a} \sqrt{(x^2 + p^2(a^2 + r^2))} + \frac{p^2 dr(a^2+r^2)}{a} l \frac{x + \sqrt{(x^2 + p^2(a^2+r^2))}}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$. Posito igitur $x = a$, erit

erit ſuperficies cono-cunei quaeſita $= \int dr \sqrt{(a^2 + p^2(a^2 + r^2))} + \int \frac{p^2 dr (a^2 + r^2)}{a} \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + p^2(a^2 + r^2))}}{p\sqrt{(aa + rr)}} \right)$.

Coroll. 7.

658. Inuentio ergo ſuperficierum cono-cunei cuiuscunque pendet a logarithmis ſeu quadratura hyperbolae, atque inſuper ab aliis quadraturis, niſi formulae illae differentiales integrationem admittant.

Scholion.

659. Quamuis huiusmodi figurae, quas hic cono-cunei nomine appellamus, non ita pridem conſiderari coeperint, eas tamen hic tanquam ſecundam corporum ſpeciem proferre viſum eſt, quoniam magnam habent affinitatem cum corporibus conicis, quae nobis primam ſpeciem conſtituerunt. Quanquam enim, ſi ſimplicitatem conſtructionis ſpectemus, corpora cylindrica et priſmatica primo loco collocari merentur, tamen eas hic prorſus ne quidem attingemus, cum reſiſtentia, quam patiuntur, ex praecedentibus, quae de figuris planis ſunt prolata, facillime innoteſcat, ibique iam indicata ſit. Nam ſi omnes ſectiones horizontales ſunt inter ſe ſimiles et aequales, reſiſtentia obtinebitur ex reſiſtentia vnicae ſectionis, eam ducendo in altitudinem figurae. At ſi omnes ſectiones plano diametrali parallelae fuerint inter ſe aequales et ſimiles, tum pariter reſiſtentia habebitur reſiſtentiam vnicae ſectionis hanc per latitudinem multiplicando, quemadmodum attendenti ſponte patebit. Hic autem vocabulum cono-cunei in latiore ſenſu accipimus, quam Walliſius, curuam

enim quamcunque basis BDb loco contemplamur, cum Wallisius circulum tantum assumserit. Generatim autem omnium horum cono-cuneorum natura cognoscetur ex aequatione canonica inuenta $dz = -\frac{apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$ in qua cum sit p functio quaecunque ipsius r et $r = \frac{ay}{x}$, fiet p functio quaecunque ipsarum x et y nullius dimensionis. Quare pro cono-cuneis erit $dz = -\frac{ap(ydx-xdy)}{xx}$, et cum sit $\frac{xdy-ydx}{xx} = d.\frac{y}{x}$ aequabitur z functioni nullius dimensionis ipsarum x et y. Vnde ex quaque oblata aequatione pro quapiam superficie perspici poterit vtrum figura sit cono-cuneus an secus. Similiter natura corporum conicorum innotescet ex aequatione canonica supra inuenta $dz = \frac{udx}{a} - \frac{pydx}{x} + pdy$, quae cum sit $u = \frac{az}{x}$ abit in hanc $\frac{dz}{x} - \frac{zdx}{xx} = \frac{pdy}{x} - \frac{pydx}{xx}$. Quoniam vero ob $r = \frac{ay}{x}$ est p functio quaecunque nullius dimensionis ipsarum x et y, erit z = producto ex x in functionem nullius dimensionis ipsarum x et y. Quoties igitur $\frac{z}{x}$ aequatur functioni nullius dimensionis ipsarum x et y toties aequatio erit pro superficie conica. Omnis ergo aequatio inter x et y et z, in qua hae tres variabiles vbique eundem dimensionum numerum constituunt, naturam exprimet coni cuiusdam. At omnis aequatio inter x, y et z ita comparata vt tantum binae variabiles x et y vbique eundem dimensionum numerum adimpleant, superficiem cono-cunei cuiusdam exhibebit.

Exemplum 1.

660. Abeat basis BDb cono-cunei in triangulum Isosceles, quo casu corpus ABDb mixtum erit ex pyramide

mide et cuneo. Sit ſemi-latitudo huius baſis $CB = Cb = b$, et altitudo $CD = c$, erit $u = c - \frac{cr}{b}$, atque $p = -\frac{c}{b}$. Cum igitur reſiſtentiae, quam hoc corpus celeritate altitudini v debita ſecundum directionem CA promotum patitur, vis retrourgens in directione A C inuenta ſit $= \frac{-2v}{a}\int \frac{p^2 r^3 dr}{\surd(a^2+r^2)} \text{A tang.} \frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}$ fiet ea hoc caſu $= \frac{2c^2v}{ab^2} \int \frac{r^3 dr}{\surd(a^2+r^2)} \text{A tang.} \frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)}$. Cum autem ſit $\int \frac{r^3 dr}{\surd(a^2+r^2)} = \frac{2a^3}{3} + \frac{(r^2-2a^2)\surd(a^2+r^2)}{3}$ erit $\int \frac{r^3 dr}{\surd(a^2+r^2)} \text{A tang.} \frac{ab}{(c\surd a^2+r^2)} = \frac{(r^2-2a^2)\surd(a^2+r^2)}{3} \text{A tang.} \frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)} + \frac{abc}{3}\int \frac{rdr(r^2-2a^2)}{a^2c^2+a^2b^2+c^2r^2} = \frac{(r^2-2a^2(\surd(a^2+r^2)}{3} \text{A tang.} \frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)} + \frac{abr^2}{6c} - \frac{a^3b(bb+3cc)}{3c^3} \left(\frac{cr+\surd)a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2)}{a\surd(bb+cc)}\right. + \frac{2a^3}{3} \text{A tang.} \frac{b}{c}$; tali addita conſtante, vt prodeat nihil poſito $r = 0$. Fiat nunc $r = b$, atque integra reſiſtentia quam figura in directione AC ſentiet, erit $= \frac{2ccv(bb-2aa)\surd(a^2+b^2)}{3ab^2} \text{A tang.} \frac{ab}{c\surd(a^2+b^2)} + \frac{bcv}{3} - \frac{2a^2v(bb+3cc)}{3bc} \left(\frac{bc+\surd(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{a\surd(b^2+c^2)}\right. + \frac{4a^2c^2v}{3bb} \text{A tang.} \frac{b}{c}$. Deinde vis reſiſtentiae quae ſurſum vrget eſt $= \frac{v}{a}\int p^2r^2dr \left(\frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)}\right. = \frac{ccv}{abb}\int r^2dr \left(\frac{a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2}{cc(a^2+r^2)}\right.$ quae expreſſio commodius exhiberi non poteſt, quamobrem ſufficiat reſiſtentiam, qua motus retardatur, quippe ad quam potiſſimum attendemus, determinaſſe per quantitates finitas.

Coroll. 1.

661. Si longitudo $AC = a$ fuerit vehementer magna prae b et c reſiſtentia commodius ex formula differentiali eruetur quae abibit in hanc $\frac{2ccv}{a^2b^2}\int r^3dr \text{ A tang.} \frac{b}{c}$, cuius integrale poſito $r = b$ eſt $= \frac{b^2c^2v}{2a^2} \text{ A tang.} \frac{b}{c}$; quae eſt reſiſtentia retardans.

Co-

Coroll 2.

662. Si igitur detur area basis B D b, quae est bc, et longitudo A C fuerit perquam magna, resistentia eo erit minor, quo minor fuerit fractio $\frac{b}{c}$, hoc est quo acutior fuerit angulus BDb. Maxima vero erit resistentia, si capiatur ratio $b:c$ infinita magna, quo tamen casu resistentia erit finita ob A tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$.

Coroll. 3.

663. Per seriem etiam commode resistentia exprimi potest generaliter pro quauis longitudine a. Cum enim sit A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = \frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} - \frac{a^3b^3}{3c^3(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^5b^5}{5c^5(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$ — etc. erit, posito post integtationem $r=b$ resistentia $\frac{2c^2v}{abb}\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = v\,(bc - \frac{2a^2(b^2+c^2)}{3bc}$ $(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2b} - \frac{a^4b(3bb+5cc)}{1\cdot3\cdot5\cdot c^3(a^2+b^2)} + \frac{a^6b^3(5bb+7cc)}{2\cdot5\cdot7c^5(a^2+b^2)^2} - \frac{a^8b^5(7bb+9cc)}{3\cdot7\cdot9\,c^7(a^2+b^2)^3} + \frac{a^{10}b^7(5bb+11cc)}{4\cdot9\cdot11\,c^9(a^2+b^2)^4}$ — etc. quae vehementer conuergit si fuerit a valde paruum.

Coroll. 4.

664. Si autem series desideretur, quae vehementer conuergat, si sit a quantitas valde magna, reperietur resistentia motum retardans $= \frac{4a^2c^2v}{3bb}$ Atang. $\frac{b}{c} - \frac{2ccv(2a^2-b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{3ab^2}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2)}} - \frac{2bc^3v}{3(bb+cc)} + \frac{v(b^2+3c^2)}{3bc}(\frac{b^4c^4}{2a^2(b^2+c^2)^2} - \frac{b^6c^6}{3a^4(b^2+c^2)^3} + \frac{b^8c^8}{4a^6(b^2+c^2)^4}$ — etc.

Co-

Coroll. 5.

665. Soliditas vero huius corporis reperitur $= \frac{abc}{2}$, superficies autem eius basi et sectione aquae exceptis erit $= \int \frac{dr}{b} \surd(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2) + \frac{cc}{abb} \int dr (a^2 + r^2)\, l \frac{ab + \surd(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2)}{c\surd(a^2 + r^2)}$. Cuius integrale posito $\frac{bb + cc}{cc} = m$, et facto $r = b$, reperitur $= \frac{c}{2} \surd(ma^2 + b^2) + \frac{ma^2c}{2b}\, l \frac{b + \surd(ma^2 + b^2)}{a\surd m} + \frac{cc(3aa + bb)}{3ab}\, l \frac{ab + c\surd(ma^2 + b^2)}{c\surd(a^2 + b^2)} + \frac{cc}{3bb} \int \frac{(3a^2 + r^2)((m-1)ac + c\surd(ma^2 + r^2))r^2 dr}{(a^2 + r^2)(ab + c\surd(ma^2 + r^2))\surd(ma^2 + r^2)}$ adeo vt integratio huius formulae restet.

Coroll. 6.

666. Casus quo $m = 2$ seu $b = c$ aliquanto fit simplicior, prodit enim superficies $= \frac{c}{2} \surd(2a^2 + c^2) + a^2\, l \frac{c + \surd(2a^2 + c^2)}{a\surd 2} + \frac{c(5a^2 + c^2)}{3a}\, l \frac{a + \surd(2a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} + \frac{1}{3} \int \frac{(3a^2 + r^2)r^2 dr}{(a^2 + r^2)\surd(2a^2 + r^2)} = \frac{c}{2} \surd(3a^2 + c^2 + a^2\, l \frac{c + \surd(2a^2 + c^4)}{a\surd 2} + \frac{c(3a^2 + c^2)}{a}\, l \frac{a + \surd(2a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} + \frac{c}{6} \surd(3a^2 + c^2) + \frac{aa}{3}\, l \frac{c + \surd(2a^2 + c^2)}{a\surd 2} - \frac{2a^2}{3} \text{A tang.} \frac{c}{\surd(2a^2 + c^2)}$. Erit ergo superficies quaesita $= \frac{2c}{3} \surd(2a^2 + c^2) + \frac{4a^2}{3}\, l \frac{c + \surd(2a^2 + c^2)}{a\surd 2} + \frac{c(5a^2 + c^2)}{3a}\, l \frac{a + \surd(2a^2 + c^2)}{\surd(a^2 + c^2)} - \frac{2a^2}{3} \text{A tang.} \frac{c}{\surd(2a^2 + c^2)}$.

Coroll. 7.

667. Si insuper sit $c = a$; ita vt sit $AC = CB = CD$ erit superficies $= \frac{2aa}{\surd 3} + \frac{4aa}{3}\, l(2 + \surd 3) - \frac{\pi a^2}{9}$; cuius expressionis valor proximus est $a^2 . 2,56156$, seu superficies se habet ad basem proxime vt $2\frac{1}{2}$ ad 1.

Exemplum 2.

668. Sit nunc corpus nostrum Wallisii cono-cuneus, seu basis BDb, abeat in semicirculum, cuius semi-

 diame-

diameter ſit CB $=$ CD $= b$. Erit igitur $u = \sqrt{(b^2 - r^2)}$, ideoque $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hoc ergo valore ſubſtituto, inuenietur reſiſtentiae vis motum retardans $= \frac{2v}{a} \int \frac{r^5 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a\sqrt{(bb-rr)}}{r\sqrt{(aa+rr)}}$. Quamuis autem ſit $\int \frac{r^5 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}} =$
$$\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + (a^2-b^2)\sqrt{(a^2+r^2)} + \frac{b^4}{2\sqrt{(a^2+b^2)}}\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a^2+r^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$$
tamen hinc plenaria integratio non multum iuuatur. Deinde ſi arcus cuius tangens eſt $\frac{a\sqrt{b^2-r^2}}{r\sqrt{a^2+r^2}}$ in ſeriem reſoluatur, integratio quidem ſingulorum terminorum in $\frac{r^5 dr}{(b^2-r^2\sqrt{a^2+r^2})}$ ductorum facilior euaderet, ſed conſtans infinita eſſet addenda, quo prodeat nihil poſito $r = 0$. Hoc incommodum quodammodo euitatur ſi loco illius arcus, ſubſtituatur aequiualens $\frac{\pi}{2}$ — A tang. $\frac{r\sqrt{a^2+r^2}}{a\sqrt{bb-rr}}$, ſed quomodocunque calculus inſtituatur; nihil, cuius operae foret pretium deriuatur, quapropter cono-cuneos relinquamus, ad aliam corporum ſpeciem plurimum iam pertractatam, corporum ſcilicet rotundorum progreſſuri.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1.

669. *Sit ſectio aquae* ABb *curua quaecunque ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus* ACB, ACb *conſtans, atque omnes ſectiones verticales* STs *ad planum diametrale* ACD *normales ſemicirculi ſeu quod eodem redit, ſit corpus* ABDb *genitum conuerſione curuae* ACB *circa axem* AC;

hoc-

hocque corpus moueatur in aqua directe in directione CAL; *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Ex constructione huius corporis intelligitur non solum planum diametrale ATD sed omnes sectiones per axem AC transeuntes fore curuas similes et aequales semisectioni aquae ASBC. Cum igitur curua ASB data ponatur, vocatis $AP = x$, et $PS = PT = s$, dabitur aequatio inter x et s, seu s erit functio quaedam ipsius x, ita vt si ponatur $ds = p\,dx$ futura sit p pariter functio ipsius x. Sumtis nunc reliquis ambabus coordinatis $PM = y$ et $MQ = z$ quoniam sectio SQTs est semicirculus centro P descriptus cuius radius est $PS = PT = s$, erit $z^2 + y^2 = s^2$ et $z = \surd(s^2 - y^2)$; vnde fit $dz = \frac{sds - ydy}{\surd)s^2 - y^2)} = \frac{psdx - ydy}{\surd(s^2 - y^2)}$, qua aequatione natura superficiei huius corporis exprimitur. Haec ergo aequatio si comparetur cum canonica supra assumta $dz = P\,dx + Q\,dy$, fiet $P = \frac{ps}{\surd(s^2 - y^2)}$ et $Q = \frac{-y}{\surd(s^2 - y^2)}$. Ponamus iam sectionem BDb omnium sibi parallelarum esse amplissimam existente $AC = a$, seu latitudinem Bb esse maximam; ac tota superficies ABDb resistentiam patietur; sitque celeritas qua hoc corpus in aqua progreditur secundum directionem AL debita altitudini v. His praemissis ex prop. 61 resistentia sequenti modo definietur: cum sit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{(1 + p^2)s^2}{ss - y^2}$; erit $\frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^3 s dy}{1 + pp)\surd(ss - y^3)}$ et $\frac{P^2 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^2 dy}{1 + p^2}$ atque $\frac{P^2(x + Pz)dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^2(x + ps)dy}{1 + p^2}$, quae differentialia ponendo x et quantitates inde pendentes p et s constantes ita sunt accipienda vt euanescant posito $y = 0$, quo

facto

facto poni debet $y = PS = s$. Hoc autem modo reperietur $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{\pi p^3 s}{2(1+p^2)}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est 1; et $\int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s}{1+p^2}$, atque $\int \frac{p^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s(x+ps)}{1+pp}$. Nunc positis x et p et s variabilibus habebitur resistentiae vis horizontalis, qua corpus in directione AC repellitur $= \pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+p^2}$ in quo integrali, cum ita fuerit acceptum, vt euanescat posito $x = 0$, fieri debet $x = a$. Deinde vis resistentiae, qua corpus sursum vrgebitur est $= 2v \int \frac{p^2 s dx}{1+pp}$, haecque vis transibit per punctum axis O existente $AO = \frac{\int \frac{p^2 s dx(x+ps)}{1+pp}}{\int \frac{p^2 s dx}{1+pp}}$, singulis his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x = 0$, atque tum facto $x = a$. Q. E. I.

Coroll. 1.

670. Si sectio aquae A B b in B habuerit tangentem ad B b normalem seu axi A C parallelam, tum omnia plana superficiem tangentia in punctis H sectionis B D b ad hanc ipsam sectionem erunt normalia.

Coroll. 2.

671. Simili modo quem angulum tangens sectionis aquae in S constituit cum axe P A, eundem angulum plana tangentia omnia in singulis punctis Q sectionis S T s cum axe P A constituent: ex quo singula elementa Q sectionis S T s eandem patientur resistentiam, quam patitur aequale elementum in S situm.

Co-

Coroll. 3.

672. Ad ſoliditatem totius huius corporis cognoſcendam ex §. 617 primum integrandum eſt differentiale $-Q y dy = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ss-yy)}}$, cuius integrale poſito $y=s$ poſt integrationem eſt $= \frac{\pi ss}{4}$. Vnde tota ſoliditas fit $= \frac{\pi}{2} \int ss dx$ poſito poſt integrationem $x=a$

Coroll. 4.

673. Deinde cum ſuperficies $ABDb$ in genere ſit $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$, erit ſuperficies ſolidi noſtri rotundi $= 2\int dx \int \frac{s dy \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(ss-yy)}} = \pi \int s dx \sqrt{(1+pp)}$, in quo integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $x=0$, fieri debet $x=a$.

Coroll. 5.

674. Si integrum ſolidum rotundum, quod generatur dum figura ACB circa axem AC penitus conuertitur in aqua ſecundum directionem axis CAL moueatur, tum reſiſtentiam motui directe contrariam patietur duplo maiorem, eaque ideo erit $= 2\pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$.

Scholion.

675. Huiusmodi corpora rotunda fere ſola ab iis, qui reſiſtentiam calculo inueſtigarunt, ſunt conſiderata, longe alio autem modo in eorum reſiſtentiam inquiſiuerunt, huic corporum ſpeciei proprio. Deriuauerunt enim reſiſtentiam ex ea conſideratione, quam corollario ſecundo indicauimus, quae via quamquam eſt multo facilior, quam ea quam hic ſumus ſecuti, tamen quoniam ad alias corporum ſpecies non patet, methodo generali vti maluimus. Hinc autem generatim innoteſcit natura omnium corporum ro-

tundorum per aequationem generalem pro iis inuentam $z^2+y^2=s^2$ scilicet sumtis abscissis x in axe AC est semper z^2+y^2 aequale functioni cuidam ipsius x, et quoties talis aequatio occurrit, toties ea erit ad solidum rotundum. Sed quo resistentia huiusmodi corporum plenius cognoscatur, iuuabit casus nonnullos particulares euoluere, quibus determinata curua pro sectione aquae ACB accipitur.

Exemplum 1.

Tab. XXVIII fig. 2.

676. Sit primo sectio aquae ABb triangulum isosceles, seu corpus ABDb semissis coni recti circularis, qui casus, quanquam iam ante est pertractatus, tamen eum hic etiam affere visum est, quo conuenientia magis perspiciatur, atque ipsa propositio illustretur. Posita itaque semidiametro basis BC$=$CD$=b$ erit $a:b=x:s$, ideoque $s=\frac{bx}{a}$, et $p=\frac{b}{a}$. Vnde resistentiae vis horizontalis erit $=\pi v\int\frac{p^3 sdx}{1+pp}=\frac{\pi b^4}{aa}v\int\frac{xdx}{a^2+b^2}=\frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$ vis verticalis autem ex resistentia orta, qua corpus ex aqua eleuabitur erit $=2v\int\frac{p^2 sdx}{1+pp}=\frac{2b^3 v}{a}\int\frac{xdx}{aa+bb}=\frac{ab^3 v}{a^2+b^2}$. Denique punctum O in quo haec vis erit applicata, ita definietur: cum sit $AO=\frac{\int p^2 sdx(x+ps):(1+pp)}{\int p^2 sdx(1+pp)}$ erit pro nostro casu $AO=\frac{(aa+bb)\int xxdx}{aa\int xdx}=\frac{2(aa+bb)}{3a}$, quae omnia apprime conueniunt cum supra §. 639 inuentis.

Exemplum 2.

Tab. XXX. fig. 1.

677. Sit sectio aquae ABb semicirculus centro C descriptus, cuius propterea radius AC$=$CB$=$CD erit $=a$: hoc ergo casu corpus nostrum abibit in quartam partem sphaerae centro C radio AC$=a$ descriptae. Ex-

nasnatura circuli igitur erit $s = \sqrt{(2ax - xx)}$ atque $p = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; et $1 + pp = \frac{aa}{2ax - xx}$. His substitutis prodibit $\frac{p^3 s dx}{1+pp} = \frac{(a-x)^3 dx}{aa}$ cuius integrale est $\frac{a^2}{4} - \frac{(a-x)^4}{4a^2}$, quod posito $x = a$ fit $= \frac{a^2}{4}$. Resistentia igitur horizontalis, quam hoc sphaerae frustum in motu suo sentiet, erit $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Deinde cum sit $\frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{(a-x)^2 dx}{aa} \sqrt{(2ax - xx)}$, erit eius integrale posito $x = a$ post integrationem $= \frac{\pi a^2}{16}$, vnde corpus hoc verticaliter sursum vrgebitur a resistentia vi $= \frac{\pi a^2 v}{8}$. Denique cum sit $x + ps = a$, erit $\int \frac{p^2 s dx (x + ps)}{1+pp} = \int \frac{(a-x)^2 dx}{a} \sqrt{(2ax - xx)} = \frac{\pi a^3}{16}$, ex quo punctum O per quod resistentiae vis verticalis transit, ipsum sphaerae centrum C incidet. Soliditas porro huius sphaerae quadrantis erit $= \frac{\pi}{2} \int ss dx = \frac{\pi}{2} \int (2ax - xx) dx = \frac{\pi a^3}{3}$, atque superficies eius $= \pi \int s dx \sqrt{(1+pp)} = \pi \int a dx = \pi a^2$; quae quidem ex natura sphaerae sponte fluunt.

Coroll. 1.

678. Vis igitur resistentiae verticalis quae est $= \frac{\pi a^2 v}{8}$ duplo minor est quam eius vis horizontalis, qua motus retardatur. Media igitur directio resistentiae transibit per C et in plano verticali diametrali ACD sita angulum constituet cum AC cuius tangens erit $= \frac{1}{2}$.

Coroll. 2.

679. Cum basis BDb area sit $= \frac{\pi a^2}{2}$ si basis nuda eadem celeritate secundum CA moueretur in aqua, foret eius resistentia $= \frac{\pi a^2 v}{2}$; ita vt resistentia horizontalis figurae ABDb duplo sit minor, quam resistentia basis.

Co-

Coroll. 3

680. Intelligitur etiam quantam resistentiam patiatur globus integer in aqua motus; cum enim eius semissis resistentiae sit opposita, erit resistentia ipsa $= \frac{\pi a^2 v}{4}$, si eius radius ponatur $= a$. Globus itaque in aqua motus duplo minorem patitur resistentiam, quam eius circulus maximus.

Coroll. 4.

681. Hinc resistentia, quam diuersi globi in aqua moti patiuntur erit in ratione composita ex duplicata diametrorum et duplicata celeritatum, quibus progrediuntur.

Exemplum 3.

682. Sit figura aquae innatans ABDb sphaeroidis elliptici portio, eiusmodi vt sectio aquae ABb sit semiellipsis centrum habens in C cuius semiaxes coniugati sint AC$=a$ et BC$=b$, erit ex natura ellipsis $s = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - xx)}$ hincque $p = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{(2ax-xx)}}$ et $1 + pp = \frac{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}{a^2(2ax-xx)}$. Ad resistentiam igitur cognoscendam sequentes formulae integrales sunt considerandae, quarum prima est $\int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$, quae abit in $\frac{b^4}{a^2} \int \frac{(a-x)^3 dx}{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}$, cuius integrale est $\frac{-b^4}{2(a^2-b^2)} + \frac{a^2 b^4}{(a^2-b^2)^2} (\frac{a}{b}$. Ex hoc vis resistentiae motui contraria cuius directio est AC erit $= \pi b^2 v (\frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^2} (\frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2-b^2)})$ vel eadem vis per seriem expressa erit $= \frac{\pi b^4 v}{2a^2} (\frac{1}{2} + \frac{a^2-b^2}{3a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{4a^4} + \frac{(a^2-b^2)^3}{5a^6} + \frac{(a^2-b^2)^4}{6a^8} + \text{etc.})$ quae eo magis conuergit, quo minor fuerit differentia inter a et b. Deinde cum sit $\int \frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{b^3}{a} \int \frac{(a-x)^2 dx \sqrt{(2ax-xx)}}{a^2 b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2}$,

erit

erit eius integrale posito $x = a$, sequens quantitas $\frac{\pi a b^3}{4(a+b)^2}$; vnde vis resistentiae verticalis est $= \frac{\pi a b^3 v}{(a+b)^2}$; ipsam autem directionem huius vis seu locum applicationis ob prolixitatem calculi non determinamus.

Coroll. 1.

683. Si ellipsis ABb abeat in circulum ita vt sit $a = b$; tum resistentia horizontalis a logarithmis liberabitur, fietque per seriem datam $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Vis vero qua sursum pellitur fiet $= \frac{\pi a^2 v}{8}$, vti ante iam est inuentum.

Coroll. 2.

684. Si ellipsis ABb quam minime a circulo discrepet ita vt sit $b = a + \alpha$, denotante α quantitatem valde exiguam, erit ex serie resistentiae vis horizontalis secundum AC$= \frac{\pi a^2 v}{4} + \frac{2\pi a \alpha v}{3} = \frac{\pi b^2 v}{4} + \frac{\pi b \alpha v}{6}$, ob $a = b - \alpha$.

Coroll. 3.

685. Manente igitur axe $AC = a$, resistentia eo maior euadet, quo magis crescit $BC = b$. A si b maneat eadem, resistentia descrescet crescente axe $AC = a$. Atque ex ipsa resistentiae expressione $\pi b^2 v \left(\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)} \left(\frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)^2} \right) \right.$ intelligitur si a fiat infinite magnum, tum resistentiam penitus euanescere.

Coroll. 4.

686. Resistentia igitur motum retardans diminuetur augendo longitudinem sphaeroidis elliptici AC atque diminuendo latitudinem $BC = b$. Vnde quo magis axes ellipsis fuerint inter se inaequales, eo minor euadet resistentia.

Coroll. 5.

687. Cum ſoliditas in genere ſit $=\frac{\pi}{2}\int ssdx$ erit pro noſtro caſu ſoliditas ſphaeroidis elliptici ABD$b=\frac{\pi b^2}{2aa}\int(2ax-xx)dx=\frac{\pi ab^2}{3}$: poſito poſt integrationem $x=a$.

Coroll. 6.

688. Superficies denique huius ſphaeroidis, quae in genere eſt $\pi\int sdx\sqrt{(1+pp)}$, fiet $=\frac{\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{(a^2b^2+2a(a^2-b^2)x-(a^2-b^2)x^2)}$: quae expreſſio poſito $a-x=u$ tranſit in hanc $-\frac{\pi b}{a^2}\int du\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)u^2)}=\frac{-\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A ſin. $\frac{u\sqrt{(aa-bb)}}{aa}+\frac{u\sqrt{(aa-bb)}}{a^4}\sqrt{(a^4-(aa-bb)uu)}+\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A ſin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}+\frac{b\sqrt{(aa-bb)}}{a^2}$. Poſito ergo $x=a$ ſeu $u=0$ prodibit tota ſuperficies $=\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A ſin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}+\frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}}{aa})=\frac{\pi bb}{2}+\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ A ſin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$.

Coroll. 7.

689. Quare ſi a et b non multum a ſe inuicem diſcrepent, ob A ſin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}=$ A tang. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}-\frac{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3}+\frac{(a^2-b^2)^{\frac{5}{2}}}{5b^5}$ - etc. ſuperficiei inueniendae inſeruiet iſta expreſſio $\frac{\pi}{2}(bb+aa-\frac{a^2(aa-bb)}{3b^2}+\frac{aa(a^2-b^2)^2}{5b^4}-\frac{aa(a^2-b^2)^3}{7b^6}+$ etc.) quae vehementer eſt conuergens.

PROPOSITIO 65.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1. 690. *Maneant vt ante omnes ſectiones verticales* S T s *ad axem* AC *normales ſemicirculi, quaeraturque natura curuae* ASBC *ſeu ſectionis aquae quae formet eiusmodi ſolidum.*

idum ABDb, *quod secundum directionem* CAL *in aqua motum minimam patiatur resistentiam simul vero maxime sit capax.*

Solutio.

Positis vt ante in sectione aquae quaesita abscissa AP $= x$, et applicata PS $= s$, atque $ds = p\,dx$; erit resistentia, quam patietur solidum rotundum huic aquae sectioni respondens; vt $\int \frac{p^3 s\,dx}{1+pp}$, quae ergo formula debet esse minimum. Hunc in finem differentietur $\frac{p^3 s}{1+pp}$, erit eius differentiale $\frac{p^3 ds}{1+pp} + \frac{(3p^2+p^4)s\,dp}{(1+pp)^2}$ ex quo secundum regulam supra datam §. emergit iste valor $\frac{p^3}{1+pp} + \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$, qui poni deberet $= 0$, si solidum desideretur, quod absolute minimam pateretur resistentiam. At cum insuper soliditas debeat esse maxima, soliditas vero sit vt $\int ss\,dx$, huicque formulae respondeat iste valor $2s$. huius multiplum quodcunque illi valori aequale est ponendum. Hinc ergo obtinebitur ista aequatio $\frac{2s}{c} = \frac{p^3}{1+pp} - \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$ multiplicetur per ds seu $p\,dx$, habebitur $\frac{2s\,ds}{c} = \frac{p^3 ds}{1+pp} - p\,d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2} = d. \frac{p^3 s}{1+pp} - d. \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)^2}$ vnde integrale erit $\frac{ss}{c} - f = \frac{p^3 s}{1+pp} - \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)} = \frac{-2p^3 s}{(1+pp)^2}$ seu $ss = cf - \frac{2cp^3 s}{(1+pp)^2}$; ex qua aequatione intelligitur fieri non posse $s = 0$, quod tamen conditio quaestionis requirit, nisi sit $f = 0$. Ponatur ergo $f = 0$, et c negatiuum erit $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$. Cum autem sit $ds = p\,dx$ erit $x = \frac{s}{p} + \int \frac{s\,dp}{pp} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} + 2c\int \frac{p\,dp}{(1+pp)^2} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} - \frac{c}{1+pp} +$ Const. vnde proueniet $x =$ Const. $- \frac{c+cpp}{(1+pp)^2}$. Quoniam vero x eodem casu quo s euanescere debet, s autem duobus casibus euanescat, quorum al-

ter

ter eſt ſi $p = 0$, alter ſi $p = \infty$, conſtans ex eo debet determinari. Sit igitur in puncto A, $p = 0$, ſeu tangens curuae AC in A incidat in ipſam rectam AL, fietque Conſt. $= c$, ex quo erit $x = \frac{3cpp + cp^4}{(1 + pp)^2}$, atque $s = \frac{2cp^3}{(1 + pp)^2}$, haecque curua generabit ſolidum, quod minimam patietur reſiſtentiam ob cuſpidem in A acutiſſimam, contra vero caſus, quo in A fit $p = \infty$, producet corpus maximae reſiſtentiae quippe qui caſus pariter in quaeſtione latet. Quamobrem curua quaeſita ita erit comparata vt abſciſſae $x = \frac{3cpp + cp^4}{(1 + pp)^2}$ reſpondeat applicata $s = \frac{2cp^3}{(1 + pp)^2}$ vnde intelligitur ſectionem aquae ASB quaeſtioni ſatisfacientem fore curuam algebraicam; quae ideo inter omnes alias aequalia ſolida generantes tale producet ſolidum, quod in directione axis AL motum minimam ſufferet reſiſtentiam. Q. E. I.

Coroll. 1.

691. Cum curua ASB, quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, ex eadem aequatione reſultet augendo abſciſſam x quantitate conſtante, intelligitur vtramque curvam tam eam ſcilicet quae ſolidum minimae reſiſtentiae, quam eam quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, portionem eſſe eiusdem curuae continuae.

Coroll. 2.

692. Quoniam igitur s duobus caſibus euaneſcit, ſeu curua ASB in duobus punctis axi AC occurrit, primo nimirum ſi $p = 0$ quo caſu etiam x fit $= 0$, et tum ſi $p = \infty$, quo caſu fit $x = c$, prior concurſus dabit curvam