Caput Sextum
DE
RESISTENTIA, QVAM CORPORA QVAECVNQVE IN AQVA MOTV DIRECTO LATA PATIVNTVR.

PROPOSITIO 61.
Problema.

612. *Sit* ATDB*b figura nauis anterior aquae immersa et plano diametrali verticali* ACD *in duas portiones aequales et similes diremta; haecque figura in aqua cursu directo progrediatur secundum directionem* CAL: *determinare resistentiam, quam haec figura in motu suo patietur.* Tab. XXVIII. fig. 1.

Solutio.

Repraesentatur in hac figura partis anterioris seu prorae nauigii aliusue corporis similis aquae innatantis ea portio quae aquae est immersa, cuiusque superficies in cursu directo ab aqua resistentiam patitur. In ea igitur est planum horizontale AB*b* sectio aquae, planum verticale ACD dirimit istam portionem ita in duas partes similes et aequales ACDB et ACD*b*, vt omnes rectae horizontales in plano ACD ductae sint totidem diametri sectionum horizontalium seu plano AB*b* parallelarum solidi propositi. Cum igitur motus huius corporis in aqua fiat secundum directionem horizontalem CAL, manifeftum eft mediam refiftentiae directionem incidere debere in ipfum planum diametrale ACD; vnde vis refiftentiae partim motum retardabit, partim corpus ex aqua eleuabit, fi quidem media directio non fuerit horizontalis, fed furfum vergens. Ad hunc ergo refiftentiae duplicem effectum definiendum, fit primo altitudo celeritati, qua corpus in directione CAL progreditur debita altitudini v. Deinde fumta recta AC pro axe fit in ea abfciffa $AP = x$, atque per punctum P facta concipiatur fectio verticalis STs ad planum diametrale ACD normalis, in cuius bafi Ss ponatur portio quaecunque $PM = y$; et verticalis $MQ = z$. Definietur igitur hoc modo in fuperficie corporis propofiti punctum Q per aequationem inter tres variabiles x, y et z. Sit autem ifta aequatio reducta ad hanc aequationem differentialem $dz = Pdx + Qdy$, in qua P et Q fint functiones quaepiam ipfarum x et y, non inuoluentes z; haecque aequatio ob partes vtrinque circa diametrale planum ACD fitas fimiles et aequales vtriusque medietatis ACDB, ACDb naturam exprimet. Iam quo pateat fub quonam angulo elementum fuperficiei in Q fumtum in aquam impingat, vel planum tangens fuperficiem in Q vel recta normalis QR ad fuperficiem in puncto Q definiri debebit. Inveftigemus ergo pofitionem normalis huius QR, quem in finem primo folum fectionem STs confiderabimus, cuius natura ob x conftans hac exprimetur aequatione $dz = Qdy$, ex qua ita definietur pofitio normalis QN ad arcum SQT, vt fit fubnormalis $MN = -\frac{zdz}{dy} = -Qz$; vnde fit $PN = -y - Qz$. Quare fi in plano ABb ad MN

MN ducatur perpendicularis NR, omnes rectae ex Q ad hanc rectam NR ductae ad curuam SQT in puncto Q erunt normales; quarum quae simul ad ipsam superficiem in puncto Q sit normalis, reperietur hoc modo. Per puncta M et Q concipiatur sectio verticalis IMGH plano diametrali ACD parallela, ac curuae IQH ob y constans natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$. Sit nunc recta QK normalis ad curuam IQH in puncto Q, erit sub normalis $MK = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Si ergo in plano ABb ad rectam MK ducatur normalis KVR, omnes quoque rectae ex Q ad lineam KR ductae normales erunt in Q ad curuam IQH. Cum itaque rectae NR et KR sese interfecent in puncto R, existente $AV = x + Pz$, et $VR = PN = -y - Qz$, quarum haec VR ad alteram AV est perpendicularis; erit recta QR in puncto Q tam ad curuam SQT quam IQH normalis; et hancobrem haec recta QR normalis erit ad superficiem ipsam in puncto Q. Angulus ergo quo superficiei elementum in Q in aquam impingit, complementum erit ad rectum eius anguli quem normalis QR cum directione cursus CAL seu cum recta RN huic parallela constituit, qui angulus est QRN. At ob $MN = -Qz$; erit $QN = z\sqrt{(1+QQ)}$ et ob $NR = MK = Pz$ erit $QR = z\sqrt{(1+PP+QQ)}$ vnde anguli QRN sinus erit $= \frac{\sqrt{(1+QQ)}}{\sqrt{(1+PP+QQ)}}$ cosinus vero $= \frac{P}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, qui cosinus simul sinus erit anguli sub quo superficiei elementum in Q situm in aquam impingit. Quare si elementum superficiei ponatur $= dS$, erit vis resistentiae quam patietur $= \frac{P^2 v dS}{1+P^2+Q^2}$: huiusque vis dire-

 ctio

ctio ſita erit in ipſa normali QR ad ſuperficiem. Oportet autem elementum ſuperficiei dS per differentialia coordinatarum x, y et z exprimi, quo per integrationem totalis reſiſtentia colligi queat. Concipiatur igitur abſciſſa x creſcere elemento dx, et applicata y elemento dy; orieturque in P rectangulum infinite paruum $dxdy$ in plano ABb poſitum, cui ex angulis eius deorſum ductis verticalibus in ſuperficie reſpondebit elementum dS, cuius inclinatio ad planum ABb, quae aequalis eſt angulo MQR praebebit $dS = dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Hinc ergo reſiſtentia quam elementum dS patietur erit $= \frac{P^2 v dx dy}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, eiusque directio incidet in normalem QR. Reſoluatur nunc haec reſiſtentiae vis in ternas inter ſe normales quarum directiones ſint parallelae coordinatis tribus AP, PM, et MQ. Cum igitur hae tres vires concipi queant in puncto R applicatae, figura in R verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; tum vrgebitur in directione Rn axi AC parallela vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; denique vrgebitur in directione Rk rectae Ss parallela vi $= \frac{-P^2 Q v dx dy}{1+P^2+Q^2}$. Si nunc reſiſtentia elementi in altera medietate ACDb analogi ſimili modo colligatur, eaque cum inuenta coniungatur, vires in directionibus ipſi Ss parallelis ſe mutuo deſtruent; at in V corpus verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{2P^2 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$; ſimulque in directione axis VC directe retrorſum vrgebitur vi $= \frac{2P^3 v dx dy}{1+P^2+Q^2}$. A reſiſtentia igitur, quam patitur portio ſuperficiei a duabus ſectionibus STs et altera huic parallela et interuallo dx diſſita abſciſſae figura retrorſum vrgebitur

tur in directione AC vi $= 2\,vdx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, quae integratio in qua ponitur x constans ita absoluatur vt euanescat posito $y = 0$, tumque ponatur $y =$ PS. Sursum vero vrgebitur vi $= 2\,vdx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$ cuius vis momentum respectu puncti A erit $2\,vdx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$; quae integralia eodem modo quo ante sunt accipienda. Totalis ergo resistentia quam integra superficies ab aqua patietur, reducitur ad duas vires quarum altera retrorsum vrgebitur in directione AC vi $= 2\,v \int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, vbi notandum integrale $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ praescripto modo sumtum fore functionem ipsius x tantum; ex quo posterius integrale $\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, ita sumi debet vt euanescat posito $x = 0$, hocque facto poni debet $x =$ AC, quo resistentia totius corporis propositi obtineatur. Simul vero figura sursum verticaliter vrgebitur vi $= 2\,v \int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$, cuius vis momentum cum sit $= 2\,v \int dx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$ ea censenda est applicata in puncto O axis AC, ita vt sit AO $=$

$$\frac{\int dx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}$$

integralibus ea lege, qua est praeceptum sumtis. Ex his ergo ambabus viribus resistentiae aequiualentibus reperietur media totius resistentiae directio, quae per punctum O in plano ACD transibit, atque cum AC angulum constituet cuius tangens erit $= \frac{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}}$ sub quo angulo media directio resistentiae ex O versus puppim sursum verget Q. E. I.

 Co-

Coroll. 1.

613 Nauis igitur curſus directo ſecundum directionem AL progrediens a reſiſtentia retardabitur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, quae expreſſio volumen aquae indicat cuius pondus ipſi vi eſiſtentiae eſt aequale.

Coroll. 2.

614. Cum autem nauis inſuper ſurſum vrgeatur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$, tanta vi nauis quaſi leuior facta eſt cenſenda, eaque ex aqua attolletur, aequiualet vero etiam ponderi aquae, cuius volumen iſta expreſſione indicatur.

Coroll. 3.

615. Praeterea vero, niſi media directio reſiſtentiae per ipſum grauitatis centrum tranſeat, nauis a reſiſtentia circa axem latitudinalem conuertetur, eiusque prora vel eleuabitur vel deprimetur, prout directio reſiſtentiae vel ſupra vel infra centrum grauitatis dirigatur.

Coroll. 4.

616. Denique ex inuentis expreſſionibus manifeſtum eſt, omnes reſiſtentiae effectus, quitum in retardanda tum alleuanda tum inclinanda naui conſiſtunt rationem ſequi duplicatam celeritatum, quibus nauis promouetur.

Coroll. 5.

616. Superficies tota huius corporis ex datis formulis ita calculo ſubducetur. Cum elementum ſuperficiei

dS

dS ſit $= dx\,dy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ integretur primo $dy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ poſito x conſtante ita vt integrale euaneſcat poſito $y=0$ tumque ponatur $y=PS$; quo facto integrale abibit in functionem quandam ipſius x; ita vt $\int dx\int dy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ aſſignari queat, quod integrale poſito $x=AC$ bis ſumtum, totam ſuperficiem praebebit.

Coroll. 6.

617. Ad ſoliditatem autem totius figurae $ABDb$ inueniendam, ſit $PT=t$ et $PS=s$ erunt t et s functiones ipſius x ex aequatione $dz=P\,dx+Q\,dy$ aſſignabiles. Tum vero erit area $PTS=\int z\,dy=-\int y\,dz$ ob $z=0$ quando fit $y=s=-\int Q\,y\,dy$. Integrale $\int Q\,y\,dy$ ita ſumatur poſito x conſtante, vt euaneſcat poſito $y=0$ tumque ponatur $y=s$. Quo facto $2\int -dx\int Q\,y\,dy$ poſito poſt integrationem $x=AC$ dabit ſoliditatem totius figurae.

Coroll. 7.

618. Cum ſuperficies $ABDb$ ponatur tota atque ſola reſiſtentiam pati, ſi quidem nauis in directione AL progrediatur, neceſſe eſt vt planum BDb ſit ampliſſima nauis ſectio transuerſalis, atque inſuper vt omnia totius huius portionis $ABDb$ plana tangentia verſus proram inclinent.

Coroll. 8.

619. Hinc etiam colligitur, ſi figura $ABDb$ fuerit ſemiſſis corporis cuiusdam aqua grauioris, hocque corpus in aqua vel deſcendat vel totum aquae ſubmerſum moueatur in directione AL, tum reſiſtentiam eſſe paſſurum ſe-

cundum directionem AC tantum, quae erit $= 4 v \int dx \int \frac{PPdy}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$.

Scholion.

620. Ex aequatione differentiali $dz = Pdx + Qdy$, cuius quidem integrale notum esse assumimus, qua naturam superficiei ATDB expressimus, tota ista superficies perfecte cognoscitur. Sectio enim aquae ABb primo cognoscetur si fiat $z = o$, quo casu si ponatur PS $= s$, fit $y = s$ atque aequatio $Pdx + Qds = o$ naturam sectiones aquae seu relationem inter AP $= x$ et PS $= s$ exhibebit. Simili modo quaeuis alia sectio horizontalis innotescet ponendo $z =$ constanti seu $dz = o$, ex aequatione $Pdx + Qdy = o$, in qua x abscissam in axe ipsi AC parallelo sumtam et y applicatam denotabit. Quamuis autem pro his omnibus sectionibus eadem prodeat aequatio $Pdx + Qdy = o$, tamen hinc omnes inter se aequales non sint censendae, cum aequatio $Pdx + Qdy = o$ sit differentialis et in integratione innumerabiles constantes recipere queat. Pro qualibet autem sectione horizontali integrale formulae $Pdx + Qdy$ aequale poni debet valori ipsius z, seu interuallo, quo quaeque sectio a sectione aquae ABb distat. Semper vero formula differentialis $Pdx + Qdy$ integrationem admittet, quia generaliter est $dz = Pdx + Qdy$ atque P et Q a z non pendere ponuntur, ita vt $Pdx + Qdy$ sit differentiale eius functionis ipsarum x et y, cui z aequatur. Hancobrem P et Q eiusmodi erunt functiones ipsarum x et y, vt si fuerit $dP = Rdx + Sdy$ et $dQ = Tdx + Vdy$, futurum sit $S = T$, vnde generatim nexus inter P et Q inspicitur. Sin autem P et Q

fuerint

fuerint functiones, in quibus x et y vbique eundem dimensionum numerum puta n teneant, erit $Px+Qy=(n+1)z$, vnde immediate ex dato valore ipsius P valor ipsius Q reperitur. Deinde etiam natura plani diametralis verticalis ACD exprimetur ponendo $y=0$, quo casu fit $z=PT=t$, ita vt habeatur inter $AP=x$ et $PT=t$ ista aequatio $dt=Pdx$, posito in P, quae generaliter est functio ipsarum x et y, $y=0$. Natura denique sectionis nauis transuersalis amplissimae BDb habebitur cognita ex aequatione $dx=Pdx+Qdy$ ponendo $x=AC=a$; tum enim ob $CG=y$ et $GH=z$ erit $dz=Qdy$. Quemadmodum autem ex aequatione canonica $dz=Pdx+Qdy$ natura totius superficiei ATDB cognoscitur, ita vicissim ex data superficiei natura aequatio canonica elicietur. Si enim dentur aequationes tum pro sectione aquae ACB, tum pro plano diametrali ATD, tum etiam pro singulis sectionibus transuersalibus SPT, definire licebit longitudinem $MQ=z$, quae ex quouis puncto M sectionis aquae deorsum vsque ad superficiem demittitur; hocque modo z exprimetur per quantitatem ex x, et y ex constantibus compositam, qui valor differentiatus dabit $dz=Pdx+Qdy$ aequationem canonicam naturam superficiei exprimentem. Praecipuas igitur huiusmodi superficierum species in sequentibus problematis euoluemus, atque resistentiam, quam quaeque in aqua directe promota patitur, definiemus; postquam praecipuas species ad aequationem canonicam huius formae $dz=Pdx+Qdy$ reduxerimus.

PROPOSITIO 62.
Problema.

Tab. XXVIII. fig. 2.

621. *Sit pars corporis aquae innatantis, quae in aqua versatur, figura conica* ABDb *basin habens datam* BDb *et verticem in* A *ita vt eius superficies terminetur lineis rectis* HA *ex singulis basis* BD*b punctis ad verticem* A *ductis moueaturque haec figura secundum directionem axis* CAL, *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

In hoc igitur corpore sectio aquae BA*b* erit triangulum isosceles, planum diametrale ACD vero triangulum rectangulum. Deinde quaeuis sectio transuersalis ST*s* basi seu sectioni amplissimae BD*b* parallela erit ipsi basi BD*b* similis. Sit ergo semissis basis CBD, quippe cui altera semissis C*b*D similis est et aequalis, curua quaecunque data ita vt eius natura sit cognita per aequationem inter coordinatas CG et GH. Positis igitur $CG = r$ et $GH = u$, erit u functio quaecunque ipsius r. Ductis iam rectis GA et HA positoque $AC = a$ erit ob triangula similia AC (a): Ap (x) = CG (r): PM (y) = GH (u): MQ (z) vnde erit $y = \frac{rx}{a}$; et $z = \frac{uy}{r} = \frac{ux}{a}$. Sit $du = pdr$, existente p functione quadam ipsius r, erit ob $r = \frac{ay}{x}$; $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$ atque $du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$; vnde fit $dz = \frac{udx}{a} + pdy - \frac{pydx}{x}$, quae aequatio cum generali canonica comparata $dz = Pdx + Qdy$ dat $P = \frac{u}{a} - \frac{py}{x} = \frac{u - pr}{a}$ ob $y = \frac{rx}{a}$ atque $Q = p$; vnde obtinetur $1 + P^2 + Q^2 = 1 + p^2 +$

(u—

$\frac{(u-pr)^2}{aa}$. Ad refiftentiam vero definiendam oportet ante omnia fequentia inuenire integralia $\int\frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$; $\int\frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, $\int\frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$ pofito x conftante, integralibusque ita fumtis vt euanefcant pofito $y=0$, ponere $y=PS$ vel $z=0$. At pofito x conftante eft $dy=\frac{xdr}{a}$; vnde fit $\int\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a}\int\frac{(u-pr^2)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ $\int\frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; atque $\int\frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{xx}{a^3}-\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ quae cum ita fuerint accepta vt euanefcant pofito $y=0$ feu $r=0$, poni debet $z=0$ feu $u=0$. Quoniam vero ifta integralia hoc modo inuenta ab x non pendebunt, erit totalis refiftentia qua figura fecundum directionem AC retropellitur $=2v\int\frac{xdx}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=v\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; integrali hoc eodem modo accepto quo modo eft praeceptum. Simul vero a refiftentia corpus hoc conicum furfum vrgebitur vi $=2v\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=av\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ cuius vis directio verticalis tranfibit per punctum O ita vt

fit $AO=\dfrac{\int\frac{xxdx}{a^3}\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}$ feu

$AO=\dfrac{2\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{3a\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}$. Ex hisque duabus viribus vna cum puncto O cognitis tota refiftentiae vis innotefcit. Q. E. I.

Coroll. 1.

622. Intelligitur ex formulis inuentis primum quo longius vertex A a bafi BDb diftet, eo minorem fore vim refiftentiae, quam figura patitur: refiftentiam vero non tenere rationem quampiam affignabilem pro varietate longitudinis axis AC $=a$.

Coroll.

Coroll. 2.

623. At ſi longitudo AC fuerit vehementer magna vt prae $\underline{a}$ reliquae quantitates ad baſem BDb pertinentes negligi queant, tum reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC erit $= \frac{v}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{1+pp}$ vis autem qua ſurſum pelletur $\frac{v}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{1+pp}$, cuius directio tranſibit per punctum O exiſtente AO $= \frac{2}{3}a$.

Coroll. 3.

624. Hoc ergo caſu vis reſiſtentiae corpus retropellentis in directione AC reciproce ſe habebit vt quadratum longitudinis coni AC. At vis ſurſum pellens rationem tenebit reciprocam longitudinis coni: ſcilicet ſi longitudo coni fuerit vehementer magna.

Coroll. 4.

625. Cum area baſis BDb ſit $= 2\int udr$ poſito poſt integrationem $r =$ CB ſeu $u = 0$, erit reſiſtentia, quam baſis pateretur, ſi directe ſecundum CA eadem celeritate in aqua moueretur $= 2v\int udr$, eiusque directio eſſet normalis ad baſin et per eius centrum grauitatis tranſiret.

Coroll. 5.

626. Idem vero caſus, quo ſola baſis promouetur, obtinetur ſi fiat $a = 0$. Tum autem reſiſtentiae vis ſurſum vrgens euaneſcit, vis autem retroagens erit $= v\int(u-pr)dr = v\int udr - v\int rdu$. At ſi poſt integrationem ita peractam vt prodeat nihil, ſi ponatur $r = 0$, ponatur $u = 0$, tum eſt $\int rdu = -\int udr$, ex quo reſiſtentia retropellens prodit $= 2v\int urd$.

Coroll.

Coroll. 6.

627. Tota ſuperficies huius corporis eſt $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ (610). Sit vero $\int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)} = \int \frac{dy}{a} \sqrt{(a^2+a^2p^2+(u-pr)^2)}$, quae cum ponatur x conſtans abit in $\frac{x}{a^2}\int dr \sqrt{(a^2+a^2p^2+(u-pr)^2)}$; vnde tota ſuperficies prodit $= \int dr \sqrt{(a^2+a^2p^2+(u-pr)^2)}$ poſito poſt integrationem poſtremam $x = a$.

Coroll. 7.

628. Cum denique ſoliditas ſit $= 2\int -dx \int Q\, y\, dy$ (617) ob $Q = p$ et $y = \frac{rx}{a}$, fiet ea $= 2\int - dx \int \frac{x^2 p r\, dr}{aa} = 2\int - \frac{xxdx}{aa} \int r\, du = \frac{2}{3} a \int u\, dr$ denotante $\int u\, dr$ aream BCD; id quod quidem vltro patet ex elementis Geometriae.

Scholion 1.

629. In hac ergo propoſitione primam atque facillimam corporum ſpeciem examini ſubiecimus, quae omnis generis corpora conoidica ſub ſe complectitur: non ſolum enim conus rectus qui baſin habet circularem in ea continetur, ſed etiam coni obliqui, quippe qui ad rectos reduci poſſunt ſumta quapiam ſectione conica pro baſi, deinde etiam generaliter huc pertinent omnia corpora, quae ex data quacunque baſe ad punctum quoddam ſublime ductis lineis rectis generantur, quorſum praeter conos baſes curuilineas habentes etiam pyramides pertinent. Hic autem ſecundum noſtrum inſtitutum eiusmodi tantum corpora conoidica conſideramus, quae duas habent partes ſimiles et aequales ex vtraque plani diametralis parte ſitas, quo tota tractatio nauibus maxime ſit accommodata. Cum

 vero

vero rem tam generaliter concipiendo formulae ſuper ſin integrales, de quarum integratione non conſtat, iuuabit caſus quosdam ſpeciales euoluere, quibus data figura determinata pro baſi BDb accipitur.

Exemplum I.

Tab. XXIX. fig. 1.

630. Sit pars aquae ſubmerſa quae reſiſtentiam ſentit pyramis triangularis $ABDb$ cuius baſis ſeu ſectio ampliſſima BDb eſt triangulum iſoſceles, in quo ſit $CB = Cb = b$ et $CD = c$. Poſito ergo $CG = r$ et $GH = u$, erit $c : u = b : b - r$, hincque $u = c - \frac{cr}{b}$. et $du = -\frac{cdr}{b}$; vnde fit $p = -\frac{c}{b}$. Si nunc haec pyramis directe progrediatur ſecundum directionem AL celeritate debita altitudini v, atque longitudo AC ponatur $= a$, reperietur ob $u - pr = c$ et $aa + aapp = \frac{aa(bb+cc)}{bb}$ reſiſtentiae vis in directione AC retropellens $= v\int\frac{(u-pr)^3 dr}{a^2 + a^2 p^2 + (u-pr)^2} = v\int\frac{b^2 c^3 dr}{aa(bb+cc)+bbcc}$ vnde poſt integrationem poſito $r = b$ prodit iſta reſiſtentiae vis motui directe contraria $= \frac{b^3 c^3 v}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$. Deinde cum ſit $\int\frac{(u-pr)^2 dr}{a^2 + a^2 p^2 + (u-pr)^2} = \int\frac{b^2 c^2 dr}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ erit vis reſiſtentiae verticaliter ſurſum urgens $= \frac{ab^3 c^2 v}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$, cuius directio transibit per punctum O exiſtente $AO = \frac{2\int(aa+cu)dr}{3ab} = \frac{2aa+cc}{3a}$. Soliditas vero totius huius pyramidis $ABDb$ erit $= \frac{2a}{3}\int u\, dr = \frac{abc}{3}$; ſuperficies vero in aquam irruens ſeu duo triangula ABD et $AbD = \int dr\sqrt{(aa + aapp + (u-pr)^2)} = \sqrt{(aabb + aacc + bbcc)}$.

Corol.

Coroll. 1.

631. Cum igitur basis BDb sit $= bc$; et superficies in aquam impingens $= \sqrt{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$, erit resistentia motum retardans aequalis altitudini celeritati debitae ducta in cubum basis et diuisae per quadratum superficiei.

Coroll. 2.

632. Manente igitur basi BDb, eadem resistentia eo erit minor, quo maior fuerit superficies corporis, quae ab aqua resistentiam patitur; est enim resistentia motui contraria reciproce vt quadratum superficiei.

Coroll. 3.

633. Ponatur basis BDb constans seu $bc = ff$, vt sit $c = \frac{ff}{b}$, erit resistentia motum retardans $= \frac{bbf^6v}{a^2b^4 + a^2f^4 + bbf^4}$ vnde intelligitur resistentiam fore minimam, si vel b vel c maximam habuerit quantitatem, maxima autem erit resistentia si fuerit $b = c$.

Coroll. 4.

634. Cum in hoc casu tam ff quam a positum sit constans, atque $\frac{1}{3}aff$ denotet soliditatem figurae, patet inter omnes pyramides triangulares quae aequales bases et altitudines habent eam maximam pati resistentiam, cuius basis sit triangulum isosceles ad D rectangulum.

Coroll. 5.

635. Quo magis igitur angulus BDb differt a recto, eo minorem pyramis in motu suo sentiet resistentiam;

ce-

ceteris paribus. Scilicet manentibus tum baſi tum longitudine eiusdem quantitatis.

Coroll. 6.

636. Si baſis BDb nuda contra aquam directe impingat eadem celeritate altitudini v debita, reſiſtentiam ſentiret $= bcv$. Ex quo reſiſtentia pyramidis ſe habebit ad reſiſtentiam baſis vt b^2c^2 ad $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$; vnde intelligitur reſiſtentiam baſis eo eſſe maiorem reſiſtentia pyramidis, quo maior ſit eius altitudo a.

Coroll. 7.

637. Manente autem latitudine baſis Bb et ſoliditate pyramidis eiusdem quantitatis, reſiſtentia eo erit minor, quo minor fuerit profunditas CD$=c$, ſeu quo longior capiatur pyramidis longitudo AC.

Coroll. 8.

638. Denique notandum eſt vim reſiſtentiae qua corpus ſurſum pellitur et ex aqua eleuatur ſe habere ad vim reſiſtentiae motui contrariam vt ſe habet a ad c hoc eſt vt AC ad CD. Vnde pyramis eo magis ſurſum pelletur, quo longior ſit eius axis AC, ſeu quo fuerit acutior cuſpis in A.

Exemplum 2.

Tab. XXVIII. fig. 2. 639. Abeat corpus noſtrum conoidicum in ſemi conum rectum, ita vt tam baſis BDb quam omnes ſectiones ipſi parallelae STs ſint ſemicirculi. Ponatur autem huius coni altitudo AC$=a$, quae ſimul eſt directio ſecuncundum quam hic conus mouetur celeritate altitudini v debita. Posito igitur basis BDb semidiametro BC $=$ CD $=$ b, erit ob CG $= r$ et GH $= u$ ex natura circuli $u = \sqrt{(bb-rr)}$; vnde fit $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, et $1+pp = \frac{bb}{bb-rr}$ atque $u - pr = \frac{bb}{\sqrt{(bb-rr)}}$. Ex his fit $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2(1+pp)+(u-pr)^2} = \int \frac{b^4 dr}{(a^2+b^2)\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b^4}{(2a^2+2b^2)}$ posito post integrationem $r = b$, et denotante $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum. Quamobrem resistentiae vis, quae vrget secundum directionem horizontalem A C erit $= \frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$. Porro cum sit $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr^2)} = \int \frac{b^2 dr}{a^2+b^2} = \frac{b^3}{a^2+b^2}$ atque $\int \frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr)^2} = \int bb\,dr = b^3$ erit resistentiae vis corpus verticaliter sursum pellens $= \frac{ab^3 v}{a^2+b^2}$, huiusque vis directio transibit per punctum O, ita vt sit AO $= \frac{2aa+2bb}{3a}$. Soliditas ceterum huius corporis erit $= \frac{2a}{3}\int dr \sqrt{(bb-rr)} = \frac{\pi abb}{6}$ atque superficies conica, quae resistentiam sentit prodibit $= \int \frac{bdr\sqrt{(aa+bb)}}{\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, quae quidem facillime ex notis coni proprietatibus deducuntur.

Coroll. 1.

640. Cum basis semiconi seu semicirculus BDb sit $= \frac{\pi bb}{2}$, si ea moueretur in eadem directione CA in aqua foret eius resistentia $= \frac{\pi bbv}{2}$. Vnde resistentia ipsius coni se habebit ad resistentiam basis ut b^2 ad $a^2 + b^2$ hoc est ut CD^2 ad AD^2.

Coroll. 2.

641. Mutetur semicirculus BDb in triangulum isosceles aeque capax, conusque abibit in pyramidem cuius

 lon-

longitudo a ſit eadem. Poſitis autem dimidia latitudine baſis huius pyramidis, $CB = b$, et altitudine $CD = \gamma$ erit $\beta\gamma = \frac{\pi b^2}{2}$; et reſiſtentia pyramidis huius erit $\frac{\beta^3\gamma^3 v}{a^2\beta^2 + a^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}$

Coroll. 3.

642. Cum igitur ſit $bb = \frac{2\beta V}{\pi}$, erit reſiſtentia coni aeque alti et aeque capacis $= \frac{2\beta^2\gamma^2 v}{\pi a^2 + 2\beta V}$, vnde reſiſtentia coni ſe habebit ad reſiſtentiam pyramidis aequalis altitudinis et baſis vt $2a^2\beta^2 + 2a^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2$ ad $\pi a^2\beta\gamma + 2\beta^2\gamma^2$.

Coroll. 4.

643. Reſiſtentia ergo coni aequalis erit reſiſtentiae pyramidis eiusdem baſis eiusdemque altitudinis, ſi fuerit $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\pi\beta\gamma}{2}$ ſeu $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{(\frac{\pi^2}{16} - 1)}$ hoc eſt nunquam. Quare reſiſtentia coni ſemper maior eſt quam reſiſtentia pyramidis.

Exemplum 3.

Tab. XXVIII. fig. 2. 644. Sit nunc baſis coni BDb ſemiellipſis centro C deſcripta, quo caſu figura abibir in conum ſcalenum. Sed ponatur $CB = Cb = b$, et $CD = c$, erit ex natura ellipſis $u = \frac{c}{b}\sqrt{(bb - rr)}$, vnde fit $p = \frac{-cr}{b\sqrt{(bb-rr)}}$ et $1 + pp = \frac{b^4 + (cc - bb)rr}{b^2(b^2 - rr)}$ atque $u - pr = \frac{bc}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hincque $a^2(1+pp) + (u-pr)^2 = \frac{a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr}{b^2(bb-rr)}$. Ex his reperitur $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2 + a^2p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^5c^3 dr}{(a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr)\sqrt{(b^2-r^2)}}$ cuius integrale poſito $r = b$ eſt $= \frac{\pi b^2c^2}{c\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$; vnde reſiſtentiae vis, quae motum retardat et in directione AC vrget eſt $= \frac{\pi b^2c^2 v}{2\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$. Deinde eſt $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2 + a^2p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^4c^2 dr}{b^4(a^2+c^2) + a^2(c^2-b^2)r^2}$ cuius

cuius integrale a quadratura circuli pendebit ſi $c > b$, at ſi $c < b$ pendebit a logarithmis. Cum autem ad noſtrum inſtitutum non multum pertineat, quantum corpus ſurſum vrgeatur a reſiſtentia, et in quanam directione, huic inveſtigationi operam non impendemus; ſed ſufficiat veram reſiſtentiam, qua motus retardatur, determinaſſe.

Coroll. 1.

645. Quoniam in expreſſione reſiſtentiae inuenta $\frac{\pi b^2 c^2 v}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$. ſemiaxes coniugati baſis b et c aequaliter inſunt, ii inter ſe commutari poſſunt manente eadem reſiſtentia. Hoc eſt dummodo ellipſis BDb alter ſemiaxis ſit b alter vero c reſiſtentia prodit eadem.

Coroll. 2.

646. Si area baſis BDb quae eſt $\frac{\pi bc}{2}$ dicatur $=$ A, ob $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} =$ ſinui ang. CAB et $\frac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} =$ ſin. ang. CAD, erit reſiſtentia $=$ Av ſin. CAB. ſin. CAD; vbi notandum Av exprimere reſiſtentiam baſis BDb ſi ea nuda in directione CA promoueretur.

Coroll. 3.

647. Si loco ellipſis BDb ſubſtituatur circulus eiusdem areae, erit eius radius $= \sqrt{bc}$, atque reſiſtentia, quam hic conus patietur erit $= \frac{\pi b^2 c^2 v}{2(a^2+bc)}$. Reſiſtentia igitur coni circularis ſe habebit ad reſiſtentiam coni elliptici aequalis baſis aequalisque altitudinis vt $\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$ ad a^2+bc.