Coroll. 3.

534. Si ponatur $p=\infty$, fiet $x=a$ et $y=a$ hancobrem eo loco vbi eſt $x=a$, curua iterum in axem incidet, hic vero tangens curuae erit normalis ad axem.

Coroll. 4.

535. Deinde perſpicuum eſt tam abſciſſam quam applicatam vsque ad certos tandem terminos creſcere poſſe; obtinebit enim tam x quam y maximum valorem ponendo $p=\sqrt{3}$, hocque caſu fit $x=\frac{9}{8}a$ et $y=\frac{3\sqrt{3}}{8}a$.

Coroll. 5.

536. Denique ſiue p affirmatiuum ſiue negatiuum habeat valorem, abſciſſa x manet eadem, at y negatiuum obtinet valorem ſumto p negatiuo, ex quo intelligitur axem in quo abſciſſae x capiuntur, ſimul eſſe diametrum curuae inuentae.

Scholion. 1.

Tab. XXIV. fig. 1. 537. Cum ſumto $x=\frac{3ap^2+ap^4}{(1+pp)^2}$ ſit $y=\frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$, curua erit algebraica, atque per infinita puncta deſcriptu facilis. Sumatur enim axis AC directioni, ſecundum quam figura in aqua mouetur parallelus, atque conſtructio inuenta praebebit curuam triangularem AMBCDNA tres habentem cuſpides A, B, D ad angulos trianguli aequilateri ABD diſpoſitas, ac tres portiones inter cuſpides comprehenſae, AMB, AND et BCD erunt inter ſe aequales et ſimiles. Erit autem $AC=a$; $AE=\frac{9}{8}a$; et $BE=DE=\frac{3\sqrt{3}}{8}a$ tangentes vero in B et D cum recta BD conſtituant angulum 30 graduum. Cum igitur haec curua ſecun-

ſecundum directionem axis AC mota inter omnes alias eiusdem capacitatis tam maximam quam minimam, in aqua patiatur reſiſtentiam, intelligere licet portionem BM AND minimam eſſe paſſuram reſiſtentiam aream vero B CD maximam. Quare ſi curua deſideretur, quae inter omnes eandem aream continentes minimam patiatur reſiſtentiam; pro ea vel arcus AMB ſeu AND vel portio quaecunque erit accipienda. Pro nauibus autem commodiſſimum erit vtrique ſemiſſi partis anterioris accipere figuram DNAG ſeu BMAF ita vt D cadat in proram, et recta DG in ſpinam nauis; ſi enim figura DNA ad vtramque partem axis DG diſponatur habebitur figura quae in aqua ſecundum directionem GD inter omnes alias eandem aream DNAG continentes, et per puncta D et A tranſeuntes minimam patietur reſiſtentiam; atque haec eadem curua inter omnes alias per A et D ductas et eandem reſiſtentiam patientes maximam habebit aream DNAG. Quo autem natura, huius curuae nauibus maxime accommodata reſpectu axis DG inſpiciatur, ſit DR $=t$; NR $=u$; atque cum ſit $t=\frac{9}{8}a-x$ et $u=\frac{3\sqrt{3}}{8}a-y$, erit DR $=t=\frac{(3-pp)^2 a}{8(1+pp)^2}$, atque NR $=u=\frac{(p-\sqrt{3})^2(3p^2\sqrt{3}+2p+\sqrt{3})a}{8(1+pp)^2}$. Poteſt vero etiam aequatio prima non incongrue conſeruari, qua eſt AP $=$ GR $=x=\frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2}$, et PN $=y=\frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$; ex qua erit $dx=\frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^3}dy=\frac{2appdp(3-pp)}{(1+pp)^3}$; atque $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds=\frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$; vnde fiet ipſe arcus AN $=s=\frac{2a(3pp-1)}{3(1+pp)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2a}{3}$, ita vt curua inuenta ſit rectificabilis; Reſiſtentia autem quam patietur pars AN erit vt $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{\frac{1}{2}ap + \frac{7}{6}ap^3 + 2ap^5}{(1+pp)^3} - \frac{a}{2}\int \frac{dp}{1+pp}$. Poſito igitur $p = \sqrt{3}$ proueniet tota curua AND $= \frac{4}{3}a$; eius vero ſubtenſa AD $= \frac{3\sqrt{3}}{4}a$; vnde arcus AND ſe habebit ad ſubtenſam AD vt 16 ad $9\sqrt{3}$, Reſiſtentia vero quam patietur tota curua DNA erit vt $\frac{11a\sqrt{3}}{32} - \frac{\pi a}{6}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt 1. Reſiſtentia curuae ergo ſe habet ad reſiſtentiam chordae AD vt 4 : 9 proxime. Haec curua AND praeterea in A habet tangentem axi GD parallelam, atque D curua cum axe facit angulum 60. graduum; in A et D vero radius oſculi eſt infinite paruus. Quomodo autem ſe haec curua AND reſpectu ſubtenſae AD habeat; ex parte BCD facilius perſpicitur vbi eſt CE $= \frac{1}{2}a$ BE $=$ DE $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a$, atque radius oſculi in puncto medio C eſt $= 2a$; vnde conſtructio practica facile concinnatur.

Coroll. 9.

538. Si igitur parti nauis anteriori tribuatur figura AND, exiſtente D prora et DG ſpina, nauis in directione GD progrediens non ſolum minimam patietur reſiſtentiam ſed inſuper ſi ita moueatur, vt chorda AD ad curſus directionem fiat normalis, tunc maximam patietur reſiſtentiam; quia curua AND congruit cum BCD.

Coroll. 7.

539. Hoc igitur ipſo haec figura ſe commendat ad nauibus optimam formam tribuendam; nam non ſolum requiritur vt nauis in directione ſpinae progrediens minimam offendat

offendat resistentiam, sed etiam vt in cursu obliquo resistentia fiat vehementer magna.

Coroll. 8.

540. Resistentia vero quam sentiet figura AND si in directione ad chordam AD normali in aqua moueatur, erit ad hanc chordam normalis atque $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi a}{6}$. Si vero figura secundum directionem GD moueatur, atque ex vtraque parte axis D G sui sit similis erit resistentia $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi a}{3}$

Coroll. 9.

541. Si ergo partis anterioris nauis aquae submersae singulae sectiones horizontales habuerint eiusmodi figuram, vt earum semisses omnes aequales sint vel similes figurae DNA, tum nauis aptissimam habebit figuram ad aquae resistentiam superandam, atque simul comprehendet maximum spatium, cuius ratio in nauibus praecipue est habenda.

Scholion 2.

542. Quae autem hic sunt allata proprie tantum ad figuras planas aquae horizontaliter innatantes extenduntur, neque ad corpora solida, ac naues nisi cum summa cautione possunt accommodari. Ita figura plana minimam patiens resistentiam inter omnes aquicapaces, quae hic est inuenta in solidis locum non inuenit nisi omnes corporis natantis sectiones horizontales sint inter se aequales; et hancobrem si haec per experimenta confirmare lubuerit, asseres vbique eiusdem crassitudinis adhibere conuenit, qui eandem resistentiae legem tenebunt ac figurae planae seu crassitiei euanescentis; hoc scilicet casu latera asserum re-

ſiſtentiam excipientia ſitum tenent verticalem, ideoque ſub iisdem angulis in aquae particulas incurrunt, ſub quibus quaelibet ſectiones horizontales. At ſi figura ſubmerſa obliquum teneat ſitum ad aquam, ſeu ſi latera reſiſtentia aquae oppoſita non fuerint verticalia ſed ad horizontem inclinata, tum angulus incidentiae differt, ab illo angulo, ſub quo ſola ſectio horizontalis aquae occurrit; et hancobrem in eiusmodi corporibus, quamuis reſiſtentiae, quas ſingulae ſectiones horizontales ſentiunt, ſint cognitae, tamen reſiſtentia totalis exinde definiri nequit. Quocirca ne ex hic traditis vitioſae deriuentur concluſiones pro reſiſtentia corporum, conſultum eſt iudicium ſuspendere: quoad in ſequentibus resiſtentiam, quam quaecunque corpora in aqua perpetiuntur, ſimus determinaturi.

PROPOSITIO 54.
Problema.

Tab XXV. fig. 1. 543. *Si figura quaecunque plana BCA ſitu verticali in aqua ſecundum directionem horizontalem MD promoueatur data cum celeritate, determinare reſiſtentiae, quam offendet tam quantitatem quam directionem mediam*

Solutio.

Sumatur verticalis AC pro axe, in quo ſit abſciſſa CP $= x =$ MQ, applicata PM $= y =$ CQ; atque arcus AM $= s$; erit ſinus anguli, quo curuae AMB punctum M in aquam incurrit $= \frac{dx}{ds}$, ex quo reſiſtentiae, quam elementum ds patietur, vis erit $= \frac{vdx^2}{ds}$, denotante v altitudinem celeritati qua figura promouetur, debitam, cuius vis

vis directio erit MN normalis ad curuam in M. Resoluatur nunc haec vis in binas laterales, quarum alterius directio sit horizontalis MP, alterius verticalis MQ, eritque vis horizontalis MP $= -\frac{vdx^3}{ds^2}$, et vis verticalis MQ $= +\frac{vdx^2dy}{ds^2}$. Hinc erit summa omnium virium horizontalium quas arcus AM patitur $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$, et summa virium verticalium $= +v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$; ita sumtis his intregralibus vt euanescant facto s vel $y = 0$. Quare si ponatur $x = 0$, tum prodibunt vires quas tota curua AMB ab aqua patitur. Sit autem vis totalis horizontalis $-v\int\frac{dx^3}{ds^2}$ directio OH, vis totalis vero verticalis $+v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ directio OI, erit sumendis momentis respectu puncti C, $-CH.v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -v\int\frac{xdx^3}{ds^2}$; atque $CI.v\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = v\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}$. Hinc igitur obtinetur $CH = \frac{\int xdx^3:ds^2}{\int dx^3:ds^2}$ et $CI = \frac{\int ydx^2dy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$; omnibus integralibus ita sumtis vt euanescant posito s seu $y = 0$ tumque facto $x = 0$. Effectus igitur resistentiae totalis in hoc consistit, vt figura retro vrgeatur in directione horizontali OH a vi $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$; simulque sursum vrgeatur in directione OI a vi $= v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$. Media ergo directio totius resistentiae cadet in OK existente IK : OI $= -\int\frac{dx^3}{ds^2} : \int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, vnde erit $IK = \frac{-OI\int dx^3:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2} = \frac{-\int xdx^3:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$; ideoque $CK = \frac{\int(xdx+ydy)dx^2:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$. Anguli vero OKB tangens erit $= \frac{\int dx^2dy:ds^2}{-\int dx^3:ds^2}$, ex quibus positio mediae directionis resistentiae OK cognoscitur. Ipsa vero resistentiae vis erit $= v\sqrt{\left(\left(\int\frac{dx^3}{ds^2}\right)^2 + \left(\int\frac{dx^2dy}{ds^2}\right)^2\right)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

544. Duplicem igitur resistentia in figuram BCA exerit effectum, quorum alter consistit in motu figurae retardando, atque oritur a vi horizontali $-v\int\frac{dx^3}{ds^2}$, cuius directio est OH.

Coroll. 2.

545. Altera autem vis ex resistentia orta $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, cuius directio est verticalis secundum OI motum figurae non afficit, sed eam ex aqua eleuat et quasi leuiorem facit.

Coroll. 3.

546. Nisi igitur vis verticalis $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ euanescat vel negatiua fiat, figura dum mouetur ex aqua magis emerget, perinde ac si leuior esset facta; eoque magis eleuabitur ex aqua, quo celerius in aqua progreditur; decrementum scilicet grauitatis est vt quadratum celeritatis.

Coroll. 4.

547. Nisi autem vbique sit vel $dy=0$, quod euenit quando linea BMA abit in rectam verticalem, vel vsquam fiat dy negatiuum, vis ista verticalis figuram ex aqua eleuans semper tenebit valorem affirmatiuum.

Coroll. 5.

548. Deinde haec vis verticalis, quia eius directio in proram cadit, figuram etiam ita inclinabit, vt prora eleuetur; puppis vero deprimatur, nisi vis horizontalis OH profundius sit sita quam centrum grauitatis, ideoque inclinationem contrariam efficiat.

Coroll. 6.

549. Vis autem horizontalis OH, qua motus figurae retardatur, eo erit minor, quo magis figura versus B fuerit cuspidata. Atque si inter omnes figuras eandem aream BAC comprehendentes ea quaeratur, quae ab aqua quam minime retardetur, ea ipsa reperietur figura, quae in prop. praecedente est inuenta. Perinde enim se habet resistentia siue figura BMA horizontali situ promoueatur siue verticali.

Coroll. 7.

550. Maxime autem figura ex aqua eleuabitur, seu vis verticalis OI erit maxima, si linea curua BMA abeat in rectam, quae angulum cum horizontali BC constituat $54^\circ, 44'$ seu cuius cosinus est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Scholion 1.

551. Haec propositio potissimum inseruit ad resistentiam definiendam, quam spina nauis in aqua progredientis perpetitur, ex ea enim intelligitur non solum quantum motus nauis a spinae resistentia retardetur, sed etiam quantum ipsa nauis a resistentia aquae eleuetur et quasi leuior reddatur. Si autem praeterea corpus in aqua motum ita fuerit comparatum, vt omnes sectiones verticales in directione motus factae sint inter se similes et aequales, tum ex hac propositione quoque resistentia colligi potest, ita si cylindrus aquae horizontaliter incubans ita moueatur, vt eius axis ad directionem motus sit normalis tum curva AMB erit arcus circuli, atque hinc resistentia innotescet. Deinde vero eadem haec propositio magnam habe-

bebit vtilitatem in ſequentibus, vbi ſumus inueſtigaturi, quantam reſiſtentiam figura plana horizontalis quae in aqua ſecundum directionem obliquam progreditur, patiatur, hoc enim caſu reſiſtentia vtriusque ſemiſſis figurae ſeorſim eſt inueſtiganda, et ex vtraque media directio totius reſiſtentiae concludenda. Noſtro enim caſu perinde ſe habet reſiſtentia ſiue figura BMAC in ſitu verticali ſiue horizontali in aqua progrediatur.

Exemplum I.

Tab. XXV. fig. 2.

552. Sit figura plana triangulum BAC quod in aqua ſecundum directionem MD progrediatur celeritate altitudini v debita; cuius reſiſtentia quamquam facile ex prop. 50 determinatur, tamen eam ope formularum hic inuentarum illuſtrationis cauſa ſumus inueſtigaturi. Sit itaque $BC = a$; $AC = b$, ob $CP = x$; $PM = y$ erit $b-x : y = b : a$ ideoque $y = a - \frac{ax}{b}$; $dy = -\frac{a\,dx}{b}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$. Hinc erit vis horizontalis reſiſtentiae ſecundum directionem OH agens $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -\frac{b^2 v}{a^2+b^2}\int dx$, quae ita integrata, vt euaneſcat poſito $y = 0$ ſeu $x = b$ erit $= \frac{b^2 v(b-x)}{a^2+b^2}$, poſito ergo $x = 0$, erit vis horizontalis totalis $= \frac{b^3 v}{a^2+b^2}$. Vis vero verticalis ſeu cuius directio eſt OI eſt $= v\int\frac{dx^2\,dy}{ds^2} = \frac{-abv}{a^2+b^2}\int dx = \frac{abv(b-x)}{a^2+b^2}$, vnde prodit vis verticalis totalis $= \frac{ab^2 v}{a^2+b^2}$. Ad poſitionem vero rectarum OH et OI inueniendam iam cognita ſunt $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-b^3}{a^2+b^2}$ et $\int\frac{dx^2 dy}{ds^2} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, quamobrem quaerenda ſunt $\int\frac{x\,dx^3}{ds^2}$ et $\int\frac{y\,dx^2 dy}{ds^2}$. Eſt vero $\int\frac{x\,dx^3}{ds^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\int x\,dx = \frac{-b^4}{2(a^2+b^2)}$ et $\int\frac{y\,dx^2\,dy}{ds^2} = \frac{-a^2}{a^2+b^2}$

fcb

$\int(b-x)dx = \frac{aabb}{2(a^2+b^2)}$; integratione vti eſt praeceptum ita abſoluta vt integralia euaneſcant poſito $x=b$ tumque facto $x=0$. Hinc igitur erit $CH = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}AC$, et $CI = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ BC; punctum igitur O cadit in ipſum medium rectae AB. Quoniam autem poſita OK media directione reſiſtentiae, eſt $IK : OI = b : a = AC : BC$, ex qua analogia perſpicitur mediam reſiſtentiae directionem OK eſſe normalem ad rectam AB: vis denique ipſa reſiſtentiae OK eſt $= \frac{bbv}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$: quae quidem omnia ex propoſ. 50 ſponte conſequuntur.

Coroll.

553. Cum igitur ſit $IK : OI = b : a$ erit $IK = \frac{bb}{2a}$, et $CK = \frac{aa-bb}{2a}$; angulus vero quem media directio reſiſtentiae OK cum horizontali BC conſtituit eſt $=$ ang. CAB, eiusve tangens eſt $= \frac{a}{b}$.

Exemplum 2.

554. Sit figura BCA ſemiſegmentum circulare ſeu BMA arcus circuli, cuius tangens in A ſit horizontalis, cuius ideo centrum cadet in E punctum rectae verticalis ACE. Ponatur $BC = a$; $AC = b$; et radius $AE = c$, erit $c^2 = a^2 + (c-b)^2$ ſeu $c = \frac{aa+bb}{2b}$. Poſito nunc $CP = x$, et $PM = y$, erit $EP = c-b+x$, indeque ex natura circuli $c^2 = y^2 + (c-b+x)^2$ ſeu $y = \sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}$ ex qua fit $y=0$, ſi eſt $x=b$. Erit autem porro $dy = \frac{-(c-b+x)dx}{\sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}}$ atque $ds = \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-(c-b+x)^2)}}$; hincque $\frac{dx^2}{ds^2} = 1 - \frac{(c-b+x)^2}{cc}$. Quaerantur igitur ſequentia integralia hac Tab. XXV. fig. 3.

 condi-

conditione vt euanescant posito $y=0$ seu $x=b$, in iisque ponatur post integrationem $x=0$ seu $y=a$. Reperietur autem $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-bb(3c-b)}{3cc}$; $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \int\frac{yydy}{cc} = \frac{a^3}{3cc}$ atque $\int\frac{xdx^3}{ds^2} = \int xdx - \int\frac{xdx(c-b+x)^2}{cc} = \frac{-b^3(4c-b)}{12cc}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2} = \frac{a^4}{4cc}$. Ex his inuenitur $CH = \frac{b(4c-b)}{4(3c-b)}$ et $CI = \frac{3a}{4}$. Praeterea vero erit vis horizontalis $OH = \frac{bbv(3c-b)}{3cc}$ et vis verticalis $OI = \frac{a^3v}{3cc}$ quare media directio totius resistentiae erit OK existente $IK = \frac{b^3(4c-b)}{4a^3}$ seu $CK = \frac{3a^4-4b^3c+b^4}{4a^3}$; angulique OKI tangens erit $= \frac{a^3}{bb(3c-b)}$. Vniuersa igitur resistentia aequipollebit vi in directione OK vrgenti quae est $= \frac{v}{3cc}\sqrt{(a^6+b^4(3c-b)^2)}$.

Coroll. 1.

555. Cum sit $c = \frac{aa+bb}{2b}$; erit $aa = 2bc - bb$ ideoque $CK = \frac{12bbcc-16b^3c+4b^4}{4a^3} = \frac{bb(c-b)(3c-b)}{a^3}$. Si ergo OK producatur concurret ea cum AC in ipso centro circuli E, est enim $\frac{CE}{CK} = \frac{a^3}{bb(3c-b)} =$ tang. ang. $OKI = \frac{OI}{KI}$.

Coroll 2.

556. Resistentiae igitur media directio OE per ipsum circuli centrum E transit, atque cum recta AE angulum AEO constituet, cuius tangens erit $= \frac{bb(3c-b)}{a^3} = \frac{(3c-b)\sqrt{b}}{(2c-b)\sqrt{(2c-b)}}$, sinus vero $= \frac{(3c-b)\sqrt{b}}{c\sqrt{(8c-3b)}}$.

Coroll. 3.

557. Quantitas vero totius resistentiae, quae se in directione OE exerit est $= \frac{v}{3ac}\sqrt{(8b^3c^3-3b^4cc)} =$

$\frac{bv}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$; aequatur ſcilicet ponderi cylindri aquei cuius altitudo eſt v, baſis vero $= \frac{b}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$ ducto in latitudinem ſeu craſſitiem figurae ſi quam habet.

Coroll. 4.

558. Quoniam directio reſiſtentiae, quam ſingula elementa patiuntur, eſt ad curuam normalis, ea per centrum E tranſibit, vnde ſponte ſequitur mediam directionem reſiſtentiae quam arcus BMA patitur, per centrum E tranſire debere.

Coroll. 5.

559. Si arcus AMB quadranti aequetur, fiet $b = c$, atque anguli AEO tangens erit $= 2$: potentiae vero reſiſtentiae aequiualentis quantitas erit $= \frac{c\sqrt{5}}{3}$.

Coroll. 6.

560. At ſi arcus AMB abeat in ſemicirculum vt fiat $b = 2c$, angulus AEO fiet rectus ſeu media reſiſtentiae directio erit horizontalis, vis autem totius reſiſtentiae prodibit $= \frac{4c}{3}$, prout iam ex ante §. 509 traditis colligere licet.

Scholion 2.

561. Cum igitur tam pro figura plana duabus partibus ſimilibus et aequalibus gaudente, ſi ſecundum directionem diametri horizontaliter promoueatur, quam pro figura plana in aqua verticaliter promota reſiſtentiam determinauerimus, ex inſtituto reuertemur ad figuras planas aquae in ſitu horizontali innatantes, atque reſiſtentiam etiam de

finiemus, cum non directe ſecundum diametrum ſed oblique promouentur. Haec enim inueſtigatio multo difficilior eſt, quam praecedens cum reſiſtentia, quam figura ex vtraque diametri parte ob diſſimilem alliſionem ad aquam patitur ſit diſſimilis; et hancobrem tam directionem mediam reſiſtentiae quam ipſam reſiſtentiae quantitatem determinari oportet. Facile enim intelligitur in iſtiusmodi motu obliquo directionem mediam reſiſtentiae non in diametrum incidere, ſed diametrum alicubi ſecare, cum eaque certum quendam angulum conſtituere; vbi illud punctum in quo diameter et media directio reſiſtentiae ſe interſecant breuitatis ergo centrum reſiſtentiae appellabimus; quippe cuius cognitio ad effectum reſiſtentiae, in figura circum axem verticalem conuertenda ſumme eſt neceſſaria, Incipiemus autem hanc tractationem a figuris ſimplicioribus, et primo quidem rectangulum parallelogrammum conſideremus, quo perſpiciatur, quantum tam media directio reſiſtentiae quam ipſa reſiſtentia pro varia curſus obliquitate immutetur.

PROPOSITIO 55.

Problema.

562. *Si parallelogrammum rectangulum* FGIH *in aqua ſecundum directionem quamcunque obliquam* CL *promoueatur, inuenire reſiſtentiae quam patietur tum directionem tum quantitatem.*

Tab. XXV. fig. 4.

Solutio.

Sit rectanguli FGIH latitudo FG$=$HI$=a$; longitudo FH$=$GI$=b$; atque ducatur axis AE itemque per centrum

figurae

figurae C transuersa normalis BD, vt sit AC $= \frac{1}{2}b$; et BC $=$ CD $= \frac{1}{2}a$ Anguli autem obliquitatis cursus ACL sinus sit $= m$, cosinus vero $= n$, posito sinu toto $= 1$, ita vt futurum sit $m^2 + n^2 = 1$; celeritas autem qua rectangulum in directione CL progreditur, debita sit altitudini v. Iam dum haec figura promouetur, latera bina FG et GI erunt resistentiae exposita, atque anguli quo latus FG in aquam impingit sinus erit $= n$; anguli vero quo latus GI in aquam irruit sinus est $= m$. Resistentia igitur quam latus FG patietur erit $= n^2 a v$, eiusque directio incidet in axem ACE; resistentia vero quam patietur latus GI erit $= m^2 b v$, eiusque directio erit recta DB. Resistentia ergo aequiualet duabus viribus in puncto C applicatis quarum altera est $n^2 av$ et directionem habet CE alterius vero $m^2 bv$ directio est CB. Media consequenter resistentiae directio incidet in rectam CR existente anguli RCE tangente $= \frac{m^2 b}{n^2 a}$; ipsiusque resistentiae in directione CR vrgentis quantitas est $v \surd (n^4 a^2 + m^4 b^2)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

563. In quacunque igitur directione parallelogrammum rectangulum progrediatur, media directio resistentiae perpetuo transibit per eius punctum medium C, seu centrum resistentiae incidet in centrum figurae C

Coroll. 2.

564. Si igitur simul centrum grauitatis rectanguli in centrum figurae C incidat, tum resistentia omni carebit vi figuram circa centrum grauitatis conuertendi; atque tota resistentia impendetur ad motum ipsum alterandum.

Coroll. 3.

565. Si anguli LCA tangens ponatur $= v$ erit $\frac{m}{n} = v$, atque anguli RCE tangens erit $\frac{v^2 b}{a}$. Hancobrem reſiſtentiae directio directe contraria erit ipſi motui, ſi fuerit vel $v = 0$, hoc eſt ſi figura ſecundum directionem CA progrediatur, vel $v = \frac{a}{b}$ hoc eſt ſi figura ſecundum diagonalem HCG progrediatur.

Coroll. 4.

566. Sit angulus ACL $<$ ACG ſeu $v = \frac{a}{\alpha b}$ denotante α numerum vnitate maiorem, erit anguli ECR tangens $= \frac{a}{\alpha^2 b}$, vnde ſequitur angulum ECR fore minorem angulo LCA. Contra vero ſi fuerit angulus ACL $>$ ACG tum angulus ECR quoque maior erit quam angulus ACL.

Coroll. 5.

567. Differentiae autem angulorum ACL et ECR tangens eſt $= \frac{v^2 b - va}{a + v^3 b}$, vnde differentia horum angulorum prodibit maxima ſi capiatur v ex hac aequatione $bbv^4 - 2abv^3 - 2abv + aa = 0$.

Scholion.

568. Radices huius aequationis $b^2 v^4 - 2abv^3 - 2ab v + a^2 = 0$, eo modo reperiri poſſunt, quo vulgo aequationes biquadratae ad cubicas reduci ſolent ſed hic commode accidit, vt cubica aequatio prodeat pura. Sit enim $a = kb$, habebitur $v^4 - 2kv^3 - 2kv + kk = 0$ cuius factores ponantur hae aequationes $v^2 - \alpha v + \beta = 0$ et $v^2 - \delta$

$v + \varepsilon$

$v + \varepsilon = 0$; eritque $\alpha + \delta = 2k$; $\beta + \varepsilon + \alpha\delta = 0$; $\alpha\varepsilon + \beta\delta = 2k$ et $\beta\varepsilon = k^2$. Sit $\alpha\delta = 2b$; erit $\alpha - \delta = 2\sqrt{(k^2 - 2b)}$; atque $\alpha = k + \sqrt{(k^2 - 2b)}$ et $\delta = k - \sqrt{(k^2 - 2b)}$. Quia autem porro eſt $\beta + \varepsilon = -2b$, et $\beta\varepsilon = k^2$; erit $\beta - \varepsilon = 2\sqrt{(b^2 - k^2)}$, et $\beta = -b + \sqrt{(b^2 - k^2)}$ ac $\varepsilon = -b - \sqrt{(b^2 - k^2)}$. Cum denique ſit $\alpha\varepsilon + \beta\delta = 2k$ erit $k + kb = -\sqrt{(k^2 - 2b)(b^2 - k^2)}$, vnde ſumendis quadratis oritur $k^2 = -k^4 - 2b^3$, ſeu $b = -\frac{\sqrt[3]{k^2(k^2+1)}}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)}}{2}$

Dato autem b dabuntur α, β, δ; et ε per ſuperiores aequationes, indeque erit vel $v = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{(\frac{\alpha^2}{4} - \beta)}$ vel $v = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{(\frac{\delta^2}{4} - \varepsilon)}$. Factis autem ſubſtitutionibus reperitur vel $v =$

$$\frac{k + \sqrt{(k^2 + \sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})} \pm \sqrt{(2k^2 - \sqrt[3]{4kk(k^2+1)} + 2k\sqrt{(k^2 + \sqrt[3]{4k^2(k^3+1)})} - 2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+1)^2} - 4k^2)})}}{2}$$

vel $v = \frac{k - \sqrt{(k^2 + \sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})} \pm \sqrt{(2k^2 - \sqrt[3]{4kk(k^2+1)} - 2k\sqrt{(k^2 + \sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})} + 2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+1)^2} - 4kk)})}}{2}$

quae ergo ſunt omnes quatuor radices huius aequationis biquadratae $v^4 - 2kv^3 - 2kv + kk = 0$. Poſito igitur $\frac{a}{b}$ loco k habebuntur illi curſus obliqui, cum quibus directio reſiſtentiae minime congruit; ab hoc autem diſcrimine pendet inſignis illa nauium proprietas, qua curſus etiam verſus ventum dirigi poteſt, quam ob cauſam etiam iſtam diſcrepantiam quo caſu maxima euadit diligentius inueſtigandam cenſuimus.

PROPOSITIO 56.

Problema.

569. *Moueatur rhombus* ABED *aquae horizontaliter inſidens oblique ſecundum directionem* CL *ita tamen vt ſola bina* Tab. XXV. fig. 5.

bina latera anteriora AB *et* AD *reſiſtentiam ſuſtineant: definire reſiſtentiae tam directionem quam magnitudinem.*

Solutio.

Ponatur rhombi latus quoduis $AB = AD = a$; ſemidiameter $AC = b$, et alterius diagonalis ſemiſſis $BC = CD = c$, vt ſit $a^2 = b^2 + c^2$. Directio vero motus CL cum axe CA angulum conſtituat ACL cuius ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$ poſito ſinu toto $= 1$; celeritas denique qua rhombus in hac directione promouetur ſit debita altitudini v. Cum iam ſit anguli CAD ſinus $= \frac{c}{a}$ et coſinus $= \frac{b}{a}$. erit anguli ſub quo latus AD in aquam impingit ſinus $= \frac{nc+mb}{a}$, anguli vero ſub quo latus AB in aquam impingit ſinus $\frac{nc-mb}{a}$. Hinc reſiſtentia, quam latus AD patietur erit $= \frac{(nc+mb^3)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta FO, quae ad AD in eius puncto medio F normaliter inſiſtit. Simili modo reſiſtentia lateris AB erit $= \frac{(nc-mb)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta GO in puncto medio G rectae AB ad AB normalis. Centrum igitur reſiſtentiae erit punctum O, exiſtente $AO = \frac{aa}{2b}$ Reſoluatur vtraque reſiſtentiae vis in duas laterales, quae diagonalibus AE et BD ſint parallelae, erit reſiſtentia ſecundum AE vrgens $= \frac{cv(nc+mb)^2 + cv(nc-mb)^2}{a^2} = \frac{2cv(n^2c^2+m^2b^2)}{a^2}$ reſiſtentiae vero vis ſecundum directionem ipſi DB parallelam agens $= \frac{bv(nc+mb)^2 - bv(nc-mb)^2}{a^2} = \frac{4mnb^2cv}{a^2}$. Ex his media totius reſiſtentiae directio reperitur OR, quae cum axe AE angulum conſtituet RCE cuius tangens eſt $= \frac{2mnb^2}{n^2c^2+m^2b^2}$; ipſius

vero