Coroll. 6.

499. Cum autem ſit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$, erit reſiſtentia, quam curuae portio MAN perpetitur $= 2vy - 2v\int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$. Exceſſus ergo reſiſtentiae ordinatae MN ſuper reſiſtentiam arcus MAN erit $= 2v \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$.

Coroll. 7.

500. Si ergo ſola figura MAN curua MAN in qua nusquam ſit $dy = 0$ et recta MN terminata eadem celeritate tum ſecundum directionem PC, tum ſecundum contrariam PR moueatur, erit reſiſtentia in priore caſu ad reſiſtentiam in poſteriore vt $y - \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ad y. Priore ſcilicet caſu curua MAN, poſteriore vero recta MN reſiſtentiae exponitur.

Scholion.

501. Quoniam formula, qua reſiſtentia arcus MAN exprimitur $2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$ generaliter integrari nequit, ipſa reſiſtentia quantitatibus finitis exhiberi non poteſt, ac manifeſtum eſt, reſiſtentiam a mutua poſitione ſingulorum elementorum pendere. Quamobrem expediet ad ſpecialiora deſcendere, atque datas curuas conſiderare, pro quibus valor ipſius $\int\frac{dy^3}{ds^2}$ aſſignari queat: ex his enim facilius colligi poterit, cuiusmodi curuae minorem maioremue reſiſtentiam patiantur. Hoc ſcilicet modo animus lectoris praeparabitur ad curuas, quae vel inter omnes, vel inter eas, quae certa quadam proprietate ſint praeditae, minimam patiantur reſiſtentiam, cognoſcendas; cuiusmodi curuas deinceps ſum inueſtigaturus.

 Exempl.

Exemplum I.

Tab. XXIII. fig. 2. 502. Sit figura seu eius saltem pars anterior EAF, quae resistentiam sentit, triangulum isosceles, quod secundum directionem diametri AB cuspide A antrorsum versa in aqua progrediatur celeritate debita altitudini v: incidet directio resistentiae in rectam AB, eius vero quantitas ita ex generali solutione definietur. Positis $AB = a$; $BE = BF = b$, et vt ante $AP = x$; $PM = PN = y$; erit $a : b = x : y$, vnde fit $y = \frac{bx}{a}$; $dy = \frac{bdx}{a}$; et $ds = \frac{dx}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Ex his fient $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3 dx}{a(a^2+b^2)}$, atque integrando $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3 x}{a(a^2+b^2)}$: quamobrem resistentia, quam pars MAN patietur, erit $= \frac{2b^3 xv}{a(a^2+b^2)}$ atque posito $x = a$, habebitur resistentia desiderata, quam triangulum totum EAF suffert $= \frac{2b^3 v}{a^2+b^2}$.

Coroll. I.

503. Resistentia ergo, quam sentit angulus EAF erit ad resistentiam basis EF eadem celeritate et in eadem directione in aqua motae vt bb ad $a^2 + b^2$, hoc est vt BE^2 ad AE^2.

Coroll. 2.

504. Perspicuum igitur est resistentiam trianguli EAF in aqua vertice A antrorsum verso se habere ad resistentiam, quam idem triangulum base EF antrorsum versa patitur in duplicata ratione sinus anguli BAE ad sinum totum.

Coroll. 3.

505. Quo minor igitur seu acutior fuerit angulus

EAF

EAF manente basi EF eadem, eo minor erit resistentia, quam triangulum vertice A antrorsum verso in aqua sentiet.

Coroll. 4.

506. Figura plana igitur super eadem basi EF constituta, quae minimam patietur resistentiam, erit triangulum infinite magnum, cuius vertex A in infinitum abit: talis quippe trianguli resistentia est nulla.

Exemplum 2.

507. Sit curua MAN parabola, cuiusuis ordinis, siue continua, siue ex aequalibus eiusdem parabolae ramis AM et AN composita, quae celeritate altitudini v debita indirectione AC moueatur in aqua, ita vt sit $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$. Tab. XXIII. fig. 1.

Resistentiae directio, quam portio MAN patietur, incidet vtique in directionem diametri AP, quantitas vero ex aequatione $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$ ita definietur. Cum sit $dy = \frac{m x^{m-1} dx}{a^{m-1}}$, erit $ds^2 = dx^2 (1 + \frac{m^2 x^{2m-2}}{a^{2m-2}}) = \frac{dx^2 (a^{2m-2} + m^2 x^{2m-2})}{a^{2m-2}}$ atque $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{m^3 x^{3m-3} dx}{a^{m-1}(a^{2m-2} + m^2 x^{2m-2})}$ $= dy - \frac{m a^{m-1} x^{m-1} dx}{a^{2m-2} + m^2 x^{2m-2}}$. Hinc igitur oritur $\int \frac{dy^3}{ds^2} =$

$$y - m a^{m-1} \int \frac{x^{m-1} dx}{a^{2m-2} + m^2 x^{2m-2}} = y - \int \frac{a^{\frac{2m-2}{m}} dy}{a^{\frac{2m-2}{m}} + m^2 y^{\frac{2m-2}{m}}}.$$

 quae

quae expreſſio ducta in $2v$ dabit quantitatem reſiſtentiae. Pro parabola ergo Appolloniana quae eſt $m = \frac{1}{2}$, erit reſiſtentia $= 2vy - 2v\int\frac{4yydy}{aa+4yy} = 2v\int\frac{aady}{aa+4yy} = av\,\text{Arc.t.}\,\frac{2y}{a}$. Tota ergo parabola in infinitum continuata reſiſtentiam patitur finitam quae erit $= \frac{\pi}{2}av$, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam. Pro reliquis vero caſibus non admodum concinnae formulae reperiuntur, quamobrem his miſſis ad alias curuas conſiderandas pergemus.

Exemplum 3.

Tab. XXIII. fig. 3. 508. Si curuae in aqua horizontaliter promotae ſecundum directionem CA pars anterior reſiſtentiam excipiens fuerit arcus circuli MAN, cuius radius AC ſit $= a$; reſiſtentiae directio ob partes vtrinque ſimiles cadet in diametrum AC. Poſitis autem $AP = x$ et $PM = PN = y$; erit $x = a - V(a^2 - y^2)$ et $ds = \frac{ady}{V(a^2-y^2)}$ vnde fit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{y^2dy}{aa}$, atque $\int\frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{y^3}{3a^2}$. Reſiſtentia igitur quam patietur arcus MAN in directione AC erit $= 2v(y - \frac{y^3}{3aa})$. Si ergo pars figurae anterior fuerit ſemicirculus integer BAD, erit reſiſtentia quam patietur $\frac{4av}{3}$. Quamobrem ſi integra figura fuerit circulus ABED, in quamcunque plagam is in aqua promoueatur, ſemicirculus ſemper reſiſtentiae erit obnoxius, atque ob omnes partes ſimiles directio reſiſtentiae ſemicirculum anteriorem biſecabit et per centrum tranſibit, ipſaque reſiſtentia perpetuo erit $= \frac{4av}{3}$.

Corol.

Coroll. 1.

509. Resistentia ergo semicirculi BAD se habebit ad resistentiam diametri BD eadem celeritate directe motae vt $\frac{4av}{3}$ ab $2av$ hoc est vt 2 : 3.

Coroll. 2.

510 Si autem concipiatur triangulum isosceles BAD eadem celeritate et in eadem directione aquae innatare, erit eius resistentia $=av$. Duplo igitur minor est resistentia trianguli BAD, quam resistentia diametri BD; atque semicirculi BAD trianguli BAD et diametri BD resistentiae se inter se habebunt vt isti numeri. 4 : 3 : 6.

Coroll. 3.

511. Sin autem arcus indefinitus semicirculo minor MAN solus resistentiam patiatur, erit resistentia ipsius ad resistentiam chordae MN eadem celeritate contra aquam directe impingentis vt $y-\frac{y^3}{3aa}$ ad y seu vt $3aa-yy$ ad $3aa$.

Coroll. 4.

512. Si insuper triangulum isosceles MAN in eadem directione et eadem celeritate moueatur; erit eius resistentia $=\frac{y^3v}{aa-a\sqrt{(aa-yy)}}$. Quamobrem segmenti MAN, trianguli MAN et chordae MN resistentiae erunt inter se vt $\frac{6aa-2yy}{3aa}:\frac{y^2}{a^2-a\sqrt{(aa-yy)}}):2$. seu vt $6aa-2yy:3a^2+3a\sqrt{(aa-yy)}:6aa$.

Coroll. 5.

513. Harum trium ergo resistentiarum maxima est, quam chorda MN patitur. Resistentia vero segmenti MAN aequalis fit resistentiae trianguli MAN, si fit $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, hoc est si arcus AM fit 60. graduum. Resistentiae igitur segmenti MAN erit maior quam resistentia trianguli MAN si arcus AM excedat 60 gradus; minor vero si arcus AM fuerit 60° minor.

Exemplum 4.

Tab. XXIII. fig. 4. 514. Sit nunc figurae planae aquae innatantis pars anterior arcus ellipticus MAN seu portio ellipsis ABED, cuius alter semiaxis AC $= a$; alter BC $= b$, erit positis AP $= x$; PM $= y$, CP $= a - x$, et $a^2 = (a-x)^2 + \frac{aayy}{bb}$, vnde fit $x = a - \frac{a}{b}\sqrt{(bb-yy)}$. Hinc igitur erit $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{(b^2-y^2)}}$ atque $ds^2 = \frac{dy^2(b^4+(a^2-b^2)yy)}{bb(bb-yy)}$, quamobrem habebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bbdy(bb-yy)}{b^4+(aa-bb)yy} = -\frac{bbdy}{aa-bb} + \frac{aab^4dy}{(aa-bb)(b^4+(aa-bb)yy)}$ Ad integrationem huius formulae absoluendam duo considerandi sunt casus, alter si $a > b$, altet si a $< b$. priore enim casu resistentia a quadratura circuli, posteriore a logarithmis pendebit: Moueatur igitur primum ellipsis vertex acutior A in directione axis maioris EA in aqua, erit

$$\int\frac{dy^3}{ds^2} = -\frac{bby}{aa-bb} + \frac{aabb}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}\,\text{A tang.}\,\frac{y\sqrt{(aa-bb)}}{bb};$$ ideoque

resistentia quam arcus MAN patietur erit $= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{y\sqrt{(aa-bb)}}{bb} - \frac{2b^2vy}{aa-bb}$. Quare si integra semiellipsis BAD constituat partem figurae anteriorem, erit resistentia

$= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - \frac{2b^3v}{aa-bb}$. Sit autem nunc $a < b$ seu A ellipsis vertex obtusior, erit $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bby}{bb-aa} - \frac{aabb}{2(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$; hoc igitur casu resistentia arcus MAN prodibit $= \frac{2bbvy}{bb-aa} - \frac{aabbv}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$.

Sive autem b sit maius siue minus quam a per seriem infinitam erit $\int \frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{aay^3}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^5}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^7}{7b^{12}} + \frac{aa(aa-bb)^3y^9}{9b^{16}} - \frac{aa(aa-bb)^4y^{11}}{11b^{20}} +$ etc. vnde fit resistentia quam arcus MAN patietur $= 2vy\left(1 - \frac{aay^2}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^4}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^6}{7b^{12}} + \text{etc.}\right)$ Si igitur ellipsis tota medietas BAD resistentiam patiatur, erit resistentia $= 2bv\left(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(aa-bb)^2}{7b^6} + \frac{a^2(aa-bb)^3}{9b^8} - \text{etc.}\right)$

Coroll. 1.

515. Si igitur eadem ellipsis tum secundum directionem axis EA, tum secundum directionem axis DB in aqua moueatur; erit resistentia in priori casu $= 2bv\left(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(a^2-b^2)^2}{7b^6} + \text{etc.}\right)$, resistentia vero in posteriore $= 2av\left(1 - \frac{bb}{3aa} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^4} - \frac{bb(aa-bb)^2}{7a^6} - \text{etc.}\right)$.

Coroll. 2.

516. Resistentia ergo ellipsis secundum axem maiorem EA progredientis se habet ad resistentiam eiusdem

ellipsis

ellipſis ſecundum axem minorem DB eadem celeritate promotae vt $b - \frac{a^2}{3b} + \frac{a^2(a^2-b^2)}{5b^3}$ — etc. ad $a - \frac{bb}{3a} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^3}$ — etc. vbi $\underline{a}$ eſt ſemiaxis maior, $\underline{b}$ vero ſemiaxis minor.

Coroll. 3.

517. Si ergo differentia axium ſit valde parua puta $a = b + d$ denotante $\underline{d}$ quantitatem vehementer paruam, erit reſiſtentia ſemiſſis ellipſis BAD ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE vt $\frac{2b}{3} - \frac{4d}{15} + \frac{2dd}{21b}$, ad $\frac{2b}{3} + \frac{14d}{15} + \frac{2dd}{21b}$ hoc eſt vt 1 ad $1 + \frac{9d}{5b} + \frac{18dd}{25bb}$; quae congruit maxime cum hac ratione 1 ad $(1 + \frac{d}{b})^{\frac{9}{5}}$ ſeu $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Coroll. 4.

518. Vera autem ratio, quam reſiſtentia ſemiſſis BAD tenet ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE eſt vt $2a^2b^2$ A tang: $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - 2b^3\sqrt{(aa-bb)}$ ad $2a^3\sqrt{(aa-bb)} - a^2b^2\, l\frac{a+\sqrt{(aa-bb)}}{a-\sqrt{(aa-bb)}}$ quae igitur ratio, ſiquidem b ab a non multum diſcrepet, proxime accedet ad hanc $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Exemplum 5.

Tab. XXIII. fig. 5. 519. Sit figura aquae in directione CA innatans compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ABE et ADE, erit poſitis $AC = a$ $BC = CD = b$, radius circuli, cuius ſegmenta ſunt ſumta $= \frac{aa+bb}{2b}$. Quare poſitis $AP = x$, $PM = PN = y$ habebitur $x = a - \sqrt{(a^2 - \frac{(a^2-b^2)}{b}y - yy)}$ atque $dx = \frac{(aa-bb)dy + 2bydy}{2\sqrt{(a^2b^2-(a^2-b^2)by-bbyy)}}$; vnde erit $ds^2 = \frac{(a^2+b^2)^2dy^2}{4a^2b^2-4(a^2-b^2)by-4bbyy}$. Quamobrem obtinebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{4a^2b^2dy-4(a^2-b^2)bydy-4bbyydy}{(a^2+b^2)^2}$,

hincque

hincque $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{4a^2b^2y - 2(a^2-b^2)byy - \frac{4}{3}bby^3}{(a^2+b^2)^2}$; quae expressio ducta in $2v$ dabit resistentiam, quam portio MAN patitur. Quocirca si ponatur $y = b$ proueniet resistentia, quam integra pars anterior BAD sufferet $= \frac{4b^3v(3a^2+b^2)}{3(.^2+b^2)^2}$ Resistentia autem, quam sentiet eadem figura, si in directione CB eadem celeritate moueatur, erit ex exemplo 3. $= \frac{2av(3a^4+2a^2b^2+3b^4)}{3(a^2+6^2)^2}$.

Coroll. 1.

520. Resistentia quam patitur recta BD in directione CA mota, est $= 2bv = \frac{6bv(a^2+b^2)^2}{3(a^2+b^2)^2}$; vnde erit resistentia figurae BAD in directione CA motae ad resistentiam rectae BD in eadem directione motae vt $6aabb + 2b^4$ ad $3a^4 + 6aabb + 3b^4$ vnde resistentia rectae ED multo maior est quam resistentia figurae BAD.

Coroll. 2.

521. Resistentia autem, quam patietur figura ABED mota secundum directionem CA se habebit ad resistentiam eiusdem figurae motae eadem celeritate in directione DB vt $6a^2b^3 + 2b^5$ ad $3a^5 + 2a^3b^2 + 3ab^4$; si ergo $a > b$ resistentia prior semper est minor quam posterior.

Scholion.

522. His consideratis satis intelligitur nullam dari figuram finitam, quae minimam patiatur resistentiam inter omnes alias iisdem terminis contentas. Quaecunque

enim aſſignetur figura minimam patiens reſiſtentiam, ſtatim alia exhiberi poſſet, quae minorem reſiſtentiam ſentiret, tantum datam curuam vel eius tantum portionem verſus eam regionem in quam fit motus elongando. Hanc obrem nequidem quaeſtio foret inſtar ptoblematis proponere inueniendam figuram planam, quae in aqua horizontaliter promota minimam ſentiret reſiſtentiam; ipſa enim ſolutio nullum dari minimum in finitis declararet. Quo autem appareat, quaenam figurae finitae reliquis ratione reſiſtentiae ſint praeferendae ad alias conditiones ſimul eſt attendendum, quibus curua quaeſita cogatur eſſe finita. Eiusmodi autem quaeſtiones formari poſſunt, vt vel inter omnes figuras eandem aream habentes, vel inter omnes eadem perimetro cinctas ea determinetur, quae ſecundum datam directionem in aqua mota minimam patiatur reſiſtentiam. Ad ſoluendas vero iſtius modi quaeſtiones conueniet lemma ſequens praemittere, quo methodus omnia huius generis problemata ſoluendi continetur.

LEMMA.

523. *Inuenire curuam, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, vel inter omnes omnino curuas, vel inter eas tantum, quae vna quadam ſiue pluribus proprietatibus aequaliter ſint praeditae.*

Solutio.

Tam ea proprietas, quae in curua quaeſita maxima minimaue eſſe debet, quam eae proprietates, quae in curuas, e quibus electio eſt facienda, formulis integralibus indefinitis exprimentur; ex iisque formulis nullo discrimine habito, quaenam proprietatem maximam minimamue marnue contineat, aut proprietates communes, natura curvae quaeſitae ſequenti modo definietur. Singulae formulae integrales propoſitae ad ordinatas orthogonales x et y reducantur, vt in illis aliae quantitates non inſint praeter x et y, cum ipſorum differentalibus tam primi quam altiorum graduum. Poſito autem dx conſtante fiat $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; etc. quibus ſubſtitutionibus quaeque formula propoſita integralis reducetur ad huiusmodi formam, $\int Zdx$, in qua Z erit quantitas compoſita ex finitis quantitatibus x, y, p, q, r, etc. Quare ſi iſta quantitas Z differentietur, eius differentiale talem habebit formam, vt ſit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. Ex hoc differentiali formetur ſequens quantitas $V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. atque eiusmodi valores V eliciantur ex ſingulis formulis integralibus propoſitis, quae vel maximum minimumue eſſe, vel omnibus curuis ex quibus quaeſita eſt definienda, communes eſſe debent. Hi denique ſinguli valores V inuenti multiplicentur per conſtantes quantitates quascunque reſpectiue, eorumque productorum ſumma ponatur $= 0$, quae aequatio naturam curvae quaeſitae exprimet. Hoc igitur facto reſtituantur loco p, q, r, etc. aſſumti valores ſcilicet $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ etc. vt obtineatur aequatio pro curua quaeſita ſolas binas variabiles x et y continens cum ſuis differentialibus, in qua ſit dx conſtans Q. E. I.

Coroll. 1.

524. Si igitur area curuae $\int ydx$ vel maxima minimaue eſſe debeat, vel omnes curuae, ex quibus quae-

 ſita

ſita eſt definienda eiusdem areae ponuntur, erit $Z = y$, et $dZ = dy$, vnde formulae $\int y\,dx$ valor ipſi V reſpondens erit $= 1$.

Coroll. 2.

525. Si vel curua maximae minimaeue longitudinis deſideretur, vel omnes curuae, ex quibus quaeſita debet inueniri eiusdem longitudinis ponantur, exprimetur iſta proprietas hac formula $\int V(dx^2 + dy^2)$ quae ope ſubſtitutionis reducitur ad hanc $\int dx\,V(1+pp)$ erit ergo $Z = V(1+pp)$ et $dZ = \frac{p\,dp}{V(1+pp)}$; vnde erit $N = 0$, $P = \frac{p}{V(1+pp)}$; $Q = 0$, etc. ideoque valor ipſius V formulae $\int dx\,V(1+pp)$ reſpondens erit $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}dx}$.

Coroll. 3.

526. Si eiusmodi curua quaeratur, quae aquae horizontaliter innatans ſecundum directionem axis, in quo abſciſſae x capiuntur, minimam pati debeat reſiſtentiam, tum iſta formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ minimam eſſe oportebit, haec vero formula ob $dy = p\,dx$, et $ds^2 = dx^2(1+pp)$ abit in hanc $\int \frac{p^3\,dx}{1+pp}$. Cum igitur ſit $Z = \frac{p^3}{1+pp}$ erit $N = 0$, $P = \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2}$ atque valor ipſius V reſpondens erit $= -\frac{dP}{dx}$.

Coroll. 4.

527. Si igitur inter omnes omnino curuas ea deſideretur, quae maximam minimamue reſiſtentiam patiatur, vnica habebitur formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, cuius propterea valor ipſius V reſpondens debet eſſe $= 0$. Habebitur ergo $dP = 0$, et $P =$

et $P = \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2} = m$ qua aequatione natura lineae quaesitae exprimetur.

Coroll. 5.

528. Cum igitur ex hac aequatione fiat p constans, sit $p = k$ erit $dy = k\,dx$; et $y = kx + c$ vnde fiet $k = \frac{y-c}{x} = p$. Qui valor in aequatione inuenta substitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y hanc $(y-c)^4 + 3xx(y-c)^2 = m(x^2 + (y^2 - c^2)^2$, quae quidem est pro linea recta seu pluribus rectis connexis.

Coroll. 6.

529. Quo posito $x = 0$ fiat simul $y = 0$, debebit esse vel $c = 0$ vel $m = 1$. At si sit $m = 1$ fiet $p = 1$ et $y = x$. sin autem ponatur $c = 0$ habebitur $y^4 + 3x^2y^2 = m(x^2 + y^2)^2$, hincque $y = \frac{\pm x\sqrt{2m}}{\sqrt{(3-2m \pm \sqrt{(9-8m)})}}$, quae aequatio quatuor lineas rectas complectitur.

Scholion.

530. Lemma hoc latissime patet, cum non solum iis problematis, quibus ex omnibus omnino curuis vna, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, desideratur, resoluendis inseruiat; sed etiam ad ea problemata sit accommodatum, quibus non ex omnibus curuis possibilibus, sed ex iis tantum, quae vna pluribusue quibuscunque proprietatibus aequaliter sint praeditae vna maximi minimiue proprietate gaudens desideratut. Multo amplior igitur extat huius lemmatis vsus, quam problematis Isoperimetrici, prout id quidem ad huc est tractatum, quo methodus traditur ex omnibus curuis vel eius-

dem longitudinis vel aliam quandam proprietatem aequaliter poſſidentibus eam definiendi, quae aliqua maximi minimiue proprietate gaudeat. Nam praeterquam quod methodus haec vſitata vnicam tantum ſpectat proprietatem, quae in omnes curuas competat, ea quoque ratione ipſarum formularum integralium quae vel maximae minimaeue vel omnibus curuis communes eſſe debent, ingenti reſtrictioni eſt obnoxia; ceſſat enim eius vſus, ſtatim atque in alteram ſiue in vtramque formulam integralem differentialia ſecundi altiorisue cuiusdam gradus ingrediuntur, dum methodus hoc lemmate tradita ad cuiusuis gradus differentialia extenditur. At ſi ipſe curuae arcus vel aliae formulae integrales in ipſa quantitate Z contineantur, lemma allatum nullum amplius praeſtat vſum, ſed cum alia methodo coniungi debet, quam, quia eius vſus in ſequentibus non occurit, hic praetermiſimus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

531. *Inter omnes curuas* AM *cum axe* AP *et applicata* PM *eandem aream comprehendentes inuenire eam* AM, *quae circa axem* AP *vtrinque diſpoſita formet figuram* AMN *in aqua minimam maximamue patientem reſiſtentiam, ſi quidem in directione diametri* PA *progrediatur.*

Tab. XXIII. fig. 1.

Solutio.

Poſitis abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, quaeſtio huc redit, vt inter omnes curuas, in quibus $\int y\,dx$ eundem obtinet valorem, ea determinetur in qua $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ ſeu

ſeu $\int \frac{p^3 dx}{1+pp}$ poſito $dy = p dx$, ſit maximum vel minimum. Priori igitur formulae $\int y dx$ reſpondet hic valor $V = 1$; poſteriori vero $\int \frac{p^3 dx}{1+pp}$ eſt $V = -\frac{dP}{dx}$ exiſtente $P = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$ et $\int P dp = \frac{p^3}{1+pp}$. Pro curua ergo quaeſita obtinebitur iſta aequatio $dP = \frac{dx}{a}$ atque $P = \frac{x+b}{a} = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$. At ex eadem aequatione differentiali per p multiplicata $p dP = \frac{pdx}{a} = \frac{dy}{a}$ oritur integrando $Pp - \frac{p^3}{1+pp} = \frac{y+c}{a} = \frac{2p^3}{(1+pp)^2}$, vnde fiet $x = \frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2} - b$ et $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2} - c$ ex quibus formulis curua quaeſita non dificulter conſtruitur. Erit autem area $\int y dx = \frac{a^2 P^2 p}{2} - \frac{a^2 P p^3}{1+pp} + \frac{a^2 p^5}{2(1+pp)^2} - cx + 2a^2 \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4} = \frac{2a^2 p^5}{(1+pp)^4} + 2a^2 \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4} - cx$; reſiſtentia vero eſt ſeu $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{aPp^3}{1+pp} - a\int P^2 dp = \frac{2ap^5}{(1+pp)^3} - 4a \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4}$; His autem aequationibus tam ea curua, quae maximam, quam quae minimam patitur reſiſtentiam continetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

532. Si ponatur $b = 0$ et $c = 0$, curua manebit eadem; alius enim tantum axis priori parallelus accipitur, aliudque initium abſciſſarum. Pro hoc itaque axi ſi ſumatur abſciſſa $x = \frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2}$, erit applicata $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$.

Coroll. 2.

533. Si ergo ſumatur $p = 0$, tum fiet tam $x = 0$ quam $y = 0$; in initio igitur abſciſſarum incidet curua in axem, atque ob $\frac{dy}{dx} = 0$, curua hoc loco ab axe tangetur.

Co-