Caput Quintum
DE
RESISTENTIA, QVAM FIGVRAE PLANAE IN AQVA MOTAE PATIVNTVR.

PROPOSITIO 49.
Problema.

465. *Si figura plana data celeritate in aqua directe moueatur, definire resistentiam seu motus diminutionem, quam patietur, dum datum spatium percurrit.*

Solutio.

Tab. XXII. fig. 1. Figura plana in aqua directe moueri dicitur, quando eius directio ad ipsam superficiem planam est perpendicularis. Repraesentet igitur recta AB superficiem planam, cuius area sit $= aa$, in aqua motam in directione CO ad ipsam superficiem normali. Sit pondus seu massa corporis, quod hanc superficiem planam habet, quae in aquam AEFB incurrit $= M$, eiusque celeritas, qua in recta CO progreditur, et reipsa progredi pergeret, nisi resistentia adesset, debita altitudini v. Iam ad vim resistentiae definiendam concipiatur corpus momento temporis progredi, ita vt superficies plana AB perueniat in ab absoluto spatiolo $Aa = Bb = dx$; sitque celeritas, quam peracto hoc spatiolo retinebit debita altitudini $v - dv$. Dum autem corpus per spatiolum Cc progreditur, a-

quam

quam ABba de loco ſuo pellet per conflictum, ita vt corpus interea colliſionem tranſigat cum mole aquea ABba, cuius volumen erit $a^2 dx$, eiusque maſſa ſeu pondus propterea exprimatur per $ma^2 dx$, denotante m aquae grauitatem ſpecificam. Incurrit igitur corpus M celeritate ſua $\surd v$ in molem aqueam $ma^2 dx$ quieſcentem directe, ex quo perſpicuum eſt directionem vis, quam corpus in hoc conflictu ſentiet, fore normalem ad ſuperficiem incurrentem AB, atque tranſituram eſſe per centrum grauitatis C ſuperficiei ipſius, eo quod in recta Cc ſimul centrum grauitatis molis aquae ABba ſitum erit; vrgebitur ergo corpus M in hoc conflictu vi quadam CP, cuius directio directe erit contraria directioni motus CO. Ad diminutionem motus igitur definiendam regulas communicationis motus in ſubſidium vocari oportet, et quidem eas, quae ad corpora perfecte mollia ſpectant, cum aquam hoc ſaltem caſu omni elaſticitate carere experimenta ſatis declarent. Cum itaque ante conflictum motus quantitas adſit $= M \surd v$; poſt conflictum vero, quoniam moles aquea ABba eadem celeritate mouebitur qua corpus M, debita ſcilicet altitudini $v-dv$, erit motus quantitas $(M+ma^2 dx)\surd(v-dv) = (M+ma^2 dx)(\surd v - \frac{dv}{2\surd v})$; has duas motus quantitates inter ſe aequales eſſe oportet, vnde oritur $\frac{M dv}{2\surd v} = ma^2 dx \surd v$, ſeu $M dv = 2 ma^2 v dx$. Ponatur nunc potentia p tanta, vt corpus in directione CP ſollicitando, interea dum corpus per ſpatium $Cc = dx$ mouetur, eandem motus diminutionem producere poſſet, foret $dv = \frac{p dx}{M}$; ideoque $p = 2ma^2 v$; ex quo perſpicitur aquae reſiſtentiam in ſuperficiem a^2 celeritate debita altitudini v directe motam aequi-

aequiualere ponderi voluminis aquae $2a^2v$; seu aequalem esse ponderi cylindri aquei, cuius basis aequalis sit superficiei incurrenti in aquam a^2; altitudo vero adaequet duplam altitudinem celeritati corporis debitam. Idem ergo aqua per resistentiam efficit, ac si corpus M sollicitaretur a potentia tanta, quantam assignauimus in directione CP, ad superficiem corporis in aquam directe impingentem normali, et per eius ipsius superficiei centrum grauitatis C transeunte Q. E. I.

Coroll. 1.

466. Reducta igitur est resistentia, quam corpus plana superficie praeditum directe in aquam incurrens patitur, ad potentiam, cuius tum directio tum quantitas pondere expressa datur.

Coroll. 2.

767. Media igitur directio resistentiae, quam superficies plana in aqua directe mota patitur, est normalis ad ipsam superficiem et per eius centrum grauitatis transit.

Coroll. 3.

468. Quantitas autem resistentiae tenet rationem compositam ex ipsa superficie et quadrato celeritatis; et hancobrem pro eadem superficie resistentiae sunt in duplicata ratione celeritatum.

Coroll. 4.

469. Si aquae volumen pondere ipsius corporis M pondus adaequantis ponatur $= V$; erit $V : M = 2a^2v$ ad pondus cylindri aquei, cuius basis est $\underline{aa}$ et altitudo $2v$: quo

quocirca resistentia, quam superficies plana a^2 celeritate altitudini $\underline{v}$ debita in aquam directe occurrens patitur, aequivalet ponderi $\frac{2Ma^2v}{V}$.

Coroll. 5.

470. Eandem ergo vim corpus quiescens sentiet, in cuius superficiem planam aqua celeritate altitudini $\underline{v}$ debita impingit, ideo quod effectus ex collisione corporum ortus tantum a celeritate respectiua pendet, quae vtroque casu est eadem.

Coroll. 6.

471. Haec ergo propositio aeque valet ad motum corporum in aqua quiescenti, ac in fluuiis determinandum, siquidem superficies resistentiam patiens fuerit plana, atque ea directe in aquam, vel aqua directe in ipsam impingat.

Scholion 1.

472. Multum etiamnum inter Auctores, qui de aquae resistentia scripserunt, disputatur, vtrum resistentia aequiualeat duplo cylindro aqueo, cuius basis aequalis sit superficiei resistentiam directe excipienti, et altitudo aequalis altitudini celeritati debitae, prout hic quidem inuenimus, an simplo tantum cylindro. Elicuimus hic autem duplum eiusmodi cylindri ad resistentiam aquae exprimendam, quia posuimus aquae particulas perfecte molles et omni elatere carentes, quod quidem experimenta suadent. At si aquae perfecta elasticitas tribuatur, vtique alia resistentiae ratio prodiret. Si enim regulae, quae in collisione corporum elasticorum locum habent, in subsidium vocentur, tum

adeo quadruplum memorati cylindri prodiret, reſiſtentiaque reperietur $= 4ma^2 v$; Sed cum hac conſideratione aquae maior celeritas communicetur, quam ipſum corpus retinet, aqua a corpore ita reſilire deberet, vt vacuum inter corpus et aquam relinqueretur. Quod cum ob aquae pondus, quo eius partes inter ſe comprimantur euenire nequeat, regulae communicationis, quae corporibus elaſticis ſunt accommodatae, locum hic inuenire non poterunt; ſed principium generale, quo illae regulae nituntur, et quod in conſeruatione virium viuarum conſiſtit, erit adhibendum. Ob aquae compreſſionem igitur vtique eſt ſtatuendum, corpus M et aquam ABba eandem acquirere celeritatem. Hoc vero poſito, quia ante conflictum vis viua adeſt $= Mv$, poſt conflictum vero vis viua eſt $= (M + ma^2 dx)(v - dv)$, his aequatis fiet $Mdv = ma^2 v dx$; vnde potentia aequiualens reſiſtentiae orietur $=$ ponderi $\underline{m}\,\underline{a}^2\,\underline{v}$, hoc eſt cylindro aqueo baſis a^2 et altitudini v. Quaecunque autem reſiſtentiae ratio locum habeat, calculus manet idem, differt enim tantum coefficiente iſtius cylindri aquei, qui illo caſu eſt 2 hoc vero 1. Quamobrem iſtam controuerſiam non multum curabimus, cum, vteruis caſus valeat, proportiones maneant eaedem, ad quas praecipue attendemus; vtroque enim caſu directio reſiſtentiae eſt normalis ad ſuperficiem planam directe in aquam incurrentem, atque per ipſius ſuperficiei centrum grauitatis tranſit, eſtque praeterea vtroque caſu proportionalis areae ſuperficiei et quadrato celeritatis coniunctim. Experimenta autem, quae circa reſiſtentiam corporum in aqua motorum ſunt inſtituta pro ſimplici cylidro pugnare videntur, id quod cum argumento ex conſeruatione virium viuarum petito mirifice congruit. Facile etiam patet reſiſtentiam minorem

eſſe

esse debere, quam in solutione inuenimus; ibi enim, quia aqua post collisionem corpus comitatur, impulsus sequentes debiliores esse debent quam assumsimus.

Scholion 2.

473. Experimenta scilicet, quae Newtonus cum globis in aqua delapsis instituit, satis clare euincere videntur resistentiam tantum per simplicem cylindrum aqueum, cuius altitudo scilicet aequetur simplici altitudini celeritatem generanti, esse exponendam. Praeterea vero quia aqua praeter hanc resistentiam, quae ab allisione proficiscitur, aliam habet resistentiam a tenacitate particularum oriundam, haud parum difficile est definire per experimenta, quanta sit resistentia a sola allisione orta. Quidquid igitur sit, cum experimenta posteriori hypothesi, qua resistentia per simplum cylindrum aqueum exponitur, satis sint consentanea, eam hypothesin hic adoptabimus, et resistentiam, quam superficies plana in aquam directe impingens patitur, mensurabimus pondere cylindri aquei, cuius basis aequetur areae superficiei, altitudo vero ipsi altitudini celeritati debitae; ita in casu coroll. 4. resistentia aequalis erit ponenda ipsi $\frac{Ma^2v}{V}$. Eadem vero resistentiae hypothesis comfirmari potest sequenti argumento non quidem apodictico. Sit vas amplissimum aqua repletum ACDB, cuius altitudo Tab. XXII. fig. 2.
$AC = v$, pertusum sit hoc vas infra ad latus foramine DE cuius area sit $= a^2$, effluet aqua per hoc foramen celeritate debita altitudini v, iam venae aquae effluentis Ed opponatur directe obex planus de ipsi foramini amplitudine aequalis, atque hic obex ab effluente aqua eandem

dem vim ſuſtinebit, ac ſi ipſe celeritate altitudini v debita directe contra aquam quieſcentem impingeret. Conſentaneum autem videtur, obicem in de eandem preſſionem eſſe paſſurum, ac ſi in DE eſſet collocatus, hoc vero caſu obex omnino obturabit foramen effluxumque penitus impediet; nunc autem preſſionem patietur aequalem ponderi cylindri aquei, cuius baſis aequatur ipſi ſuperficiei obicis a^2, altitudo vero altitudini $AC = v$, ex quo ſequitur reſiſtentiam ſuperficiei planae in aqua directe motae aeſtimandam eſſe ex ſimplici cylindro aqueo, cuius altitudo altitudini celeritati debitae aequalis ſit. Experimenta etiam hoc ratiocinium ſatis confirmant, nam quanquam ſi obex maior adhibeatur, quam eſt foramen DE, reſiſtentia aquae maior ſentiatur, tamen hoc magnitudini obicis tribuendum videtur, quippe ad cuius latera aqua defluit, maioremque preſſionem exercet, quam ſi obex orificium tantum aequaret; quamobrem non dubitandum eſt quin obex ſuperficiem maiorem non habens quam eſt amplitudo foraminis, aſſignatam preſſionem ſit ſenſurus. Quoniam porro eadem hypotheſis confirmatur, ſi aquae elaſticitas, quae omnino adimi non poteſt, tribuatur, et praecipue, ſi conſeruatio virium vivarum ſtatuatur, cuius vſus vbique ſummus conſpicitur, eo minus dubitabimus eam ſolam recipere, eique totam reſiſtentiae doctrinam ſuperſtruere; idque eo magis, cum illi experimenta maxime faueant.

PRO-

PROPOSITIO 50.

474. *Si superficies plana in aqua oblique moueatur, determinare resistentiam, qua motus superficiei ab aqua retardabitur.* Tab. XXII. fig. 3.

Solutio.

Quia superficies plana oblique moueri dicitur, quando directio motus ad ipsam angulum constituit obliquum, repraesentet AB superficiem planam, cuius area sit $= a^2$; quae moueatur in aqua directione MC, quae cum plano superficiei AB angulum constituat ACM cuius sinus sit $= n$; posito sinu toto $= 1$; celeritas vero qua superficies mouetur debita sit altitudini v. Concipiatur iam vt ante superficies AB in aqua promoueri per spatiolum $Cc = dx$, atque hoc absoluto peruenire in ab, interea conflictum habuerit necesse est cum mole aquea $ABba$, cuius volumen est $= na^2dx$. Minor igitur aquae portio motui superficiei obstat, quam si directe in aqua moueretur, idque in ratione sinus anguli incidentiae ad sinum totum; et hancobrem ex hoc capite resistentia, quam pateretur in motu directo, diminuenda est in ratione sinus anguli incidentiae ACM ad sinum totum. Deinde quanquam superficies in singulas aquae particulas oblique impingit, tamen impulsus directio erit ad superficiem AB normalis, ita vt resistentia in superficiem AB vim exerat, cuius directio ad eam erit normalis CP, atque per ipsius superficiei centrum grauitatis C transibit. At quoniam omnes conflictus huius superficiei cum singulis aquae particulis sunt obliqui, minus erunt efficaces, quam si essent directi, idque in ratione sinus anguli incidentiae ACM ad sinum totum. Cum

 igitur

igitur in iſta impulſione obliqua reſiſtentia ob duplicem cauſam bis debeat diminui in ratione ſinus anguli incidentiae ad ſinum totum, ſe habebit reſiſtentia, dum ſuperficies AB in aqua oblique mouetur, ad reſiſtentiam, quam eadem ſperficies eadem celeritate directe mota pateretur, vt quadratum ſinus anguli incidentiae MCA ad quadratum ſinus totius hoc eſt vt a^2 ad 1. Quare cum vis reſiſtentiae in caſu motus recti ſit $= ma^2 v$, ſeu ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt $= a^2$ et altitudo aequalis altitudini debitae celeritati, erit vis reſiſtentiae pro praeſenti caſu $= n^2 ma^2 v$, hoc eſt ponderi cylindri aquei baſin habentis aequalem ipſi ſuperficiei et altitudinem aequalem altitudini celeritati debitae, multiplicato per quadratum ſinus anguli incidentiae MCA poſito ſinu toto $= 1$. Q. E. I.

Coroll. 1.

475. Reſiſtentia igitur, quam idem planum ſub diuerſis angulis in aqua motum eadem celeritate patitur, eſt in duplicata ratione ſinus anguli quem planum cum directione motus conſtituit.

Coroll. 2.

476. Si igitur cognita fuerit vis reſiſtentiae, quam planum in aqua directe motum ſuffert, ſimul innoteſcet reſiſtentia, quam idem planum vtcunque oblique in aquam impingens patietur.

Coroll. 3.

477. In quacunque igitur directione ſuperficies plana in aqua moueatur, directio reſiſtentiae ſemper eſt eadem,

dem, eſt enim normalis ad planum ſuperficiei, atque per centrum grauitatis ipſius ſuperficiei tranſit.

Coroll. 4.

478. Reſiſtentia porro, quam idem planum ſub variis angulis diuerſisque celeritatibus in aqua motum patitur, eſt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum, et duplicata ſinus anguli quo in aquam impingit.

Coroll. 5.

479. Reſiſtentiae autem, quas diuerſa plana in aqua mota ſufferunt, rationem tenent compoſitam ex ſimplici arearum, duplicata celeritatum et duplicata ſinuum angulorum, quibus in aquam incurrunt.

Scholion 1.

480. Inſeruiunt haec problemata inſtar baſis ad reſiſtentiam determinandam, quam corpora cuiuscunque figurae in aqua mota patiuntur. Pendet enim reſiſtentia a corporis ſuperficie anteriore qua in aquam incurrit, quippe quae ſola cum particulis aquae confligatur, pars autem corporis poſterior ab aqua nullam patitur reſiſtentiam, eo quod ea ad aquam non allidit. Quamquam enim etiam pars poſterior ab aqua affici videatur, dum aqua locum, quem corpus poſt ſe reliquit, occupans, in partem poſticam impetum facit ac motum accelerat, tamen iſte effectus vix eſt ſenſibilis, et hancobrem hic conſiderari non meretur; ad quod accedit, quod theoria aquae nondum ſit ad eum perfectionis gradum euecta, vt aquae

effectus

effectus in posticam corporis natantis partem definiri queat. Hac igitur consideratione praetermissa, si corporis aquae innatantis anterior superficies vel plana fuerit vel ex planis pluribus constet, ope duorum horum problematum resistentia absolute poterit definiri. Praeterea vero inseruiunt haec problemata ad resistentiam corporum quacunque superficie praeditorum assignandam; quomodocunque enim superficies fuerit comparata, ea more solito tanquam ex innumerabilibus planis composita considerari, atque ex regulis staticis resistentia totalis, quae ex resistentiis singulorum elementorum emergit, per integrationem definiri poterit, quo pacto tam directionem mediam omnium resistentiarum, quam ipsam potentiam aequiualentem determinare licebit.

Scholion 2.

481. Cum igitur nunc propositum sit resistentiam indagare, quam corpora quaecunque aquae innatantia perpetiuntur, quo tota ista tractatio commode et dilucide absoluatur, certum ordinem sequi oportebit. Primum igitur hoc capite figuras tantum planas aquae tum horizontaliter tum verticaliter innatantes considerabo, atque vim resistentiae eiusque directionem determinabo, inde enim ad ipsa corpora facilius transire licebit. Eas vero figuras, quas aquae horizontaliter innatare ponemus, axe seu diametro praeditas assumemus, quia naues, ad quas hic potissimum respicimus, plano diametrali, quod verticaliter per spinam transeat, gaudent, ex quo singulae sectiones horizontales diametro spinae nauis parallela erunt prae-

praeditae. Hic autem in resistentia ingens oritur discrimen, vtrum eiusmodi superficies secundum diametri suae directionem in aqua moueatur, an oblique? si enim secundum directionem diametri moueatur, manifestum est mediam directionem resistentiae ob similem ex vtraque diametri parte effectum, esse in ipsa diametro positam, ita vt hoc casu tantum quantitas vis resistentiae inuestigari debeat: sin autem eiusmodi superficies non secundum diametri suae directionem in aqua progrediatur, tum seorsim tam mediam directionem, quam ipsam quantitatem resistentiae inueniri oportet, quae inuestigatio propterea plus habebit difficultatis. Deinceps in capite sequente simili modo in resistentia corporum ipsorum aquae innatantium inuestiganda versabimur; eiusmodi enim corpora tantum contemplabimur, quae praedita sint plano diametrali verticali, quo nauium conditio imprimis spectetur, in qua tractatione iterum praecipue ad directionem motus erit attendendum, vtrum is fiat secundum diametrum sectionis aquae, an ad diametrum oblique; priore enim casu media directio resistentiae sponte datur, posteriore vero haud exiguo labore demum est inuestiganda. In vtraque autem tractatione eiusmodi problemata afferemus, ex quibus pateat, quaenam nauium figura ratione resistentiae sit aptissima; quae tum ex minima resistentia tum ex idonea resistentiae directione desumentur. Antequam autem haec omnia euoluenda suscipiamus, hic locus maxime est idoneus ad effectum gubernaculi in naue circa axem verticalem conuertenda inquirendum; quoniam gubernaculum superficie plana solet esse praeditum, cuius ideo vis, quam contra aquam impingens patitur, ex ista propositione facile definiri potest.

PROPOSITIO 51.
Problema.

482. *Si nauis in directione quacunque progrediatur, atque gubernaculum ad datum angulum conuertatur, inuenire vim, quam gubernaculum habebit ad nauim circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendam.*

Tab. XXII. fig. 4.

Solutio.

Quoniam media directio vis aquae, in quam gubernaculum irruit, per centrum grauitatis superficiei planae gubernaculi transit, ad eamque est normalis, concipiatur sectio nauis horizontalis ARBm per gubernaculi AD centrum grauitatis C transiens. Manifestum autem est hic non totius gubernaculi, sed eius tantum partis, quae aquae est immersa centrum grauitatis sumi debere. Repraesentabit itaque in figura A puppim, B proram, AB spinam nauis, AD gubernaculum situm tenens naturalem: Sit autem G punctum axis verticalis nauis per eius centrum grauitatis ducti, in quo per planum horizontale ARBm transit; GM vero sit directio cursus seu motus nauis, ita vt angulus BGM denotet declinationem cursus nauis a cursu directo, qui secundum directionem spinae GB fieri censetur, gubernaculum vero inclinatum sit ad angulum DAd, ita vt situm Ad obtineat, quo secundum directionem $c\,m$ directioni cursus GM parallelam in aquam impingit: Sit nunc anguli BGM sinus $= m$; cosinus $= \mu$, anguli vero DAd sinus $= n$; cosinus $= \nu$, existente semper sinu toto $= 1$. Sit porro area vel superficies gubernaculi vim aquae excipiens $= a^2$; AC$=$A$c = b$; A

G$=f$;

$G = f$; celeritasque, qua nauis mouetur, debita fit altitudini v. Denique fit pondus nauis $= M$, volumen partis submersae nauis $= V$, et momentum inertiae nauis respectu axis verticalis $= Mk^2$. His praemissis erit Acm angulus sub quo gubernaculum Ad ad aquam allidit, qui cum fit $= DAd + BGM$, erit sinus eius $= mv + n\mu$; hinc igitur vis resistentiae, quam gubernaculum sentiet erit $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$. Cuius directio cr transibit per gubernaculi centrum grauitatis c, eritque ad Ad normalis. Momentum ergo huius vis ad nauem cira axem verticalem circumuertendam erit $= (mv + n\mu)^2 \frac{Ma^2 v}{V}$. Gr sin. Arc. Est vero ob angulum Acr rectum, sinus $Arc = v$; et $Ar = \frac{b}{v}$; vnde fit $Gr = f + \frac{b}{v}$. Quo circa momentum vis gubernaculi ad nauem circa G conuertendam erit $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v(b+vf)}{V}$. Quod diuisum per momentum inertiae nauis respectu axis verticalis MK^2, dabit vim gyratoriam nauis circa eundem axem verticalem $= \frac{(mv+n\mu)^2(b+vf)a^2 v}{VK^2}$; cui vi acceleratio momentanea motus angularis, qui naui circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum imprimitur, est proportionalis. Q. E. I.

Coroll. 1.

483. Pro eadem ergo naui, quo maior fuerit expressio $(mv + n\mu)^2(b + xf)$ eo maior erit effectus gubernaculi ad nauem conuertendam; ex quo angulus DAd definiri poterit, quo effectus gubernaculi fit maximus.

Coroll. 2.

484. Si igitur anguli DAd cofinus feu v ponatur $=x$, erit $n=\sqrt{(1-xx)}$, atque formula $(mx+\mu\sqrt{(1-xx)})^2(b+fx)$ feu eius radix quadrata $(mx+\mu\sqrt{(1-xx)})\sqrt{(b+fx)}$ fiet maximum, cum x determinabitur ex hac aequatione: $2\left(m-\frac{\mu x}{\sqrt{(1-xx)}}\right)(b+fx)+f(m+\mu\sqrt{(1-xx)})=0$, quae tranfit in hanc $m(2b+3fx)\sqrt{(1-xx)}=\mu(3fxx+2bx-f)$.

Coroll. 3.

485. Si ergo nauis curfu directo progrediatur, vt angulus BGM euanefcat, erit $m=0$, et $\mu=1$, atque vis gyratoria $=\frac{n^2a^2v(b+vf)}{VK^2}$; maximum igitur gubernaculum praeftabit effectum, fi fuerit $3fxx+2bx-f=0$, hoc eft, fi fuerit anguli DAd cofinus $x=\frac{-b\pm\sqrt{(bb+3ff)}}{3f}$.

Coroll. 4.

486. Si igitur b tam fuerit paruum, vt prae f euanefcat, erit anguli DAd, quo maximum effectum praeftat gubernaculum, cofinus $=\frac{1}{\sqrt{3}}$; hoc eft angulus DAd erit $54°, 44'$.

Coroll. 5.

487. Si nauis curfus a directo declinet angulo BGM, gubernaculum autem in fitu naturali $-$AD relinquatur, praeftabit tamen gubernaculum effectum ad nauem conuertendam, cuius vis gyratoria erit $\frac{m^2a^2v(b+f)}{VK^2}$.

Coroll. 6.

488. Afficit autem praeterea vis gubernaculi ipſum nauis motum, quae mutatio reperietur, ſi vis reſiſtentiae $\frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$, concipiatur in directione parallela GR centro grauitatis applicata; retardabitur ſcilicet motus nauis in directione ſua a potentia $\frac{(mv+n\mu)^3 Ma^2 v}{V}$; at a ſemita rectilinea deturbabitur potentia $\frac{(\mu v-mn)(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$.

Coroll. 7.

489. Habebit inſuper gubernaculum in ſitu A*d* conatum ſeſe circa A conuertendi ſecundum plagam *d*D, qui conatus exprimetur momento $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 bv}{V}$; tanta igitur vis a gubernatore adhiberi debet ad gubernaculum in ſitu A*d* continendum.

Coroll. 8.

490. Si igitur nauis curſu obliquo feratur, vi adeo opus erit ad gubernaculum in ſitu naturali AD conſeruandum, quae vis exprimetur momento $\frac{Mn^2 a^2 bv}{V}$.

Coroll. 9.

491. Manifeſtum denique eſt omnes has vires a gubernaculo exertas ceteris paribus creſcere in duplicata ratione celeritatum, quibus nauis progrediatur.

Scholion.

492. In hac igitur propoſitione non ſolum definiuimus quanta vi gubernaculum nauem circa axem verti-

ticalem per centrum grauitatis ductum circumagat, sed etiam quantum tam ipsius nauis celeritatem, quam cursus directionem afficiat, in corollariis determinauimus. Praeterea etiam vim assignauimus, quam nauclerus adhibere debet ad gubernaculum, in dato situ conseruandum tanta, scilicet haec naucleri vis requiritur, vt eius momentum respectu axis circa quem gubernaculum mobile existit, adaequet momentum inventum, quo gubernaculum ex situ A*d* versus AD tendit. Intelligitur vero etiam, nisi planum ARB*m* per nauis centrum grauitatis transeat, vim gubernaculi etiam se exerere ad nauem circa axem horizontalem tam longitudinalem quam latitudinalem inclinandam, quae inclinatio autem attendi vix meretur, cum sit exigua, atque tum solum eueniat, quando gubernaculum vsurpatur. Quamobrem misso gubernaculo ad ipsum propositum reuertamur, ac primo quidem, quantam resistentiam figurae planae aquae innatantes patiantur inuestigemus.

PROPOSITIO 52.
Problema.

Tab. XXIII. fig. 1.

493. *Innatet aquae figura plana* MAN *diametro* AP *praedita secundum directionem* AC *ipsius diametri* AP *data cum celeritate, inuenire resistentiam, quam haec figura ab aqua patietur.*

Solutio.

Primum perspicuum est, quia figura secundum directionem axis AC in aqua progreditur, ob vtrinque omnia similia mediam directionem resistentiae in ipsam diametrum AP incidere debere, ita vt tantum opus sit eius quan-

quantitatem determinare. Hancobrem ponatur celeritas, qua figura in aqua secundum directionem AC progreditur, debita altitudini v ac ducantur ad diametrum AP duae ordinatae orthogonales MPN, mpn, vtrinque aequalia et similia curuae elementa Mm, Nn abscindentia, quae elementa quantam resistentiam excipiant est indagandum. Ponatur $AP = x$, $PM = PN = y$ erit $Pp = dx$, et $Mm = Nn = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$. Iam anguli, quo elementa Mm et Nn in aquam illidunt, sinus est $= \frac{dy}{ds}$. Si autem elementa haec in aquam directe seu normaliter impingerent, foret vis resistentiae $= vds$ hoc est ponderi cylindruli aquei basis ds et altitudinis v. Praesenti igitur casu vis, quam vtrumque elementum patitur, erit $= \frac{vdy^2}{ds}$; cuius vtriusque vis directio est normalis ad ipsa elementa, ideoque in normales MR et NR incidet. Si nunc hae duae vires resoluantur in binas, quarum alterae directiones habeant in applicatis, alterae parallelas axi AP, illae se mutuo destruent, hae vero conspirabunt, habebuntque mediam directionem in AP incidentem. Quamobrem ob resistentiam elementorum Mm, Nn, figurae in directione AP resistetur vi $\frac{2vdy^3}{ds}$; ex quo tota curua MAN resistentiam pariet $= 2\int \frac{vdy^3}{ds^2} = 2v\int \frac{dy^3}{ds^2}$, ob v constantem, huiusque vis directio sita erit in ipsa diametro AP. Q. E. I.

Coroll. 1.

494. Directio resistentiae ergo, quam eiusmodi figura secundum diametrum AC in aqua promota sentit, directe contraria erit directioni motus, et hancobrem motus tantum a resistentia retartabitur, directio vero non afficietur

ficietur, siquidem figurae centrum grauitatis in diametro AP fuerit situm.

Coroll. 2.

495. Resistentia ergo ab A ad M et N progrediendo eousque crescit, quoad fiat $dy = 0$, hoc est quoad curvae tangentes axi AP fiant parallelae. Quamobrem, si curua fuerit indefinita, resistentia ex iis tantum ramorum AM et AN portionibus aestimari debet, qui inter A et loca vbi est $dy = 0$ interiacent.

Coroll. 3.

496. Si sola ordinata MPN in aqua directe, hoc est secundum directionem AP eadem celeritate moueretur, tum resistentia quam sentiret, foret $= 2vq$; ex quo resistentia ordonatae MPN se habebit ad resistentiam curvae MAN vt y ad $\int \frac{dy^3}{ds^2}$.

Coroll. 4.

497. Quoniam vbique est $dy < ds$, erit $\frac{dy^3}{ds^2} < dy$ ideoque $\int \frac{dy^3}{ds^2} < y$; quamobrem resistentia, quam curua MAN patitur semper minor erit quam resistentia, quam sola ordinata MPN sentiret.

Coroll. 5.

498. Eo minor ergo erit figurae MAN resistentia, quo magis discrepat a recta transuersali MPN; siue quo minus vbique est elementum applicatae dy respectu elementi curuae.

Co-