Caput Quartum
DE
EFFECTV VIRIVM CORPORA AQVAE INSIDENTIA SOLLICITANTIVM.

PROPOSITIO 40.
Theorema.

400.

Si in naui seu vase quocunque AB, *cuius pondus sit* $=$M, *onus* P *cuius pondus sit* $=$m, *per spatium* Pp *transferatur in* p; *totius vasis centrum grauitatis* G *transferetur secundum directionem* Gg *ipsi* Pp *parallelam in* g: *vt sit* $Gg = \frac{m.Pp}{M}$. Tab. XX. fig. 1.

Demonstratio.

Sit Z centrum grauitatis nauis seu vasis demto onere P, erunt puncta Z, G et P in linea recta posita, ita vt sit $ZG : PG = m : M - m$ seu $ZG : ZP = m : M$. Translato iam onere m ex P in p, totum corpus quod ex duabus partibus $M - m$ et m compositum considero, partis alterius $M - m$ centrum grauitatis vt ante habebit in Z, alterius vero partis m centrum grauitatis nunc erit in p. Quamobrem totius corporis M centrum grauitatis nunc reperietur in rectae Zp puncto g, ita vt sit $Zg : pg = m : M - m$ seu $Zg : Zp = m : M$; vnde perspicitur rectam Gg parallelam fore rectae Pp, et triangula ZGg et ZPp inter se similia. Propterea erit $Gg : Pp$. $= ZG : ZP = m : M$, ex quo prodit $Gg = \frac{m.Pp}{M}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

401. Quoniam onerum traslatione nauis seu vasis cuiusque aquae insidentis pondus non mutatur ante et post translationem oneris, aequale volumen aquae immergetur.

Coroll. 2.

402. Corpus igitur in aqua eundem retinebit situm onere quodam transposito, si centrum grauitatis verticaliter vel sursum vel deorsum transfertur; id quod euenit, si onus verticaliter vel sursum vel deorsum transportatur.

Coroll. 3.

403. Ex capite autem praecedente constat, centro grauitatis corporis sursum translato stabilitatem situs aequilibrii diminui; eandem vero augeri centro grauitatis deorsum translato.

Coroll. 4.

404. Si igitur onus m verticaliter vel sursum vel deorsum transfertur per spatium s, centrum grauitatis vel ascendet vel descendet per spatium $\frac{ms}{M}$: atque idcirco stabilitas vel diminuetur vel augebitur quantitate ms.

Coroll. 5.

405. Sin autem onus quodpiam vel horizontaliter vel oblique promoueatur, tum situs aequilibrii non conseruabitur, sed corpus ex eo inclinabitur; quia isto oneris motu centrum grauitatis corporis de recta verticali per centrum magnitudinis partis submersae ducta depellitur.

Coroll. 6.

406. Hinc etiam facile mutatio ſitus centri grauitatis colligetur, ſi plura onera vtcunque transponantur in alia loca. Ad hoc enim tantum opus eſt cuiusque oneris motum ſeorſim conſiderare.

Scholion.

407. In hoc capite ante omnia viſum eſt indagare, quantum ſitus aequilibri corporis aequae innatantis immutetur, dum centrum grauitatis ſolum de ſuo loco movetur; priusquam enim in effectus virium externarum inquiratur, conuenit eas mutationes euoluiſſe, quae in ipſis nauibus nullis accedentibus viribus alienis oriri poſſunt; etiamſi eiusmodi mutationes ſine viribus alienis euenire nequeant. Hancobrem primum centrum grauitatis de ſuo loco moueri conſiderabo, toto corporis pondere manente inuariato, atque qualis mutatio in ſitu aequilibrii eueniat ſcrutabor; deinde vero non ſolum ſitum centri grauitatis mutatum ſpectabo, ſed etiam ipſum pondus corporis augeri vel diminui ponam, quod fit vel nouis oneribus imponendis, vel ab iis quae aderant auferendis. His enim caſibus non ſolum nauis inclinabitur, ſed etiam aquae vel magis immergetur, vel ex aqua emerget. Quamobrem facta eiusmodi mutatione non ſolum definiendum eſt, quemnam ſitum corpus ſit adepturum, ſed etiam quanta poſt mutationem futura ſit ſtabilitas. Omnes autem has mutationes tantum minimas contemplabor, cum calculi ſubleuandi cauſa, tum quod nihilominus inde iudicium de maioribus mutationibus formari poteſt; quia maiores mutationes ex minimis ſucceſſiue conflatae aeſtimari poſſunt.

PROPOSITIO 41.
Problema.

408. *Si nauis vel cuiusuis vasis aquae insidentis per oneris cuiuspiam translationem centrum grauitatis aliquantillum de suo loco promoueatur, inuenire declinationem vasis de pristino aequilibrii situ, atque stabilitatem, quam tum habebit.*

Solutio.

Cum centrum grauitatis recta vel ascendit vel descendit, situs aequilibrii nullam patitur mutationem, nisi quod eius stabilitas vel minuatur, vel augeatur. At si centrum grauitatis oblique promoueatur, tum iste motus resolui poterit in verticalem et horizontalem, quorum ille situm non afficit, hic autem omnino ad vas de priore situ declinandum impenditur. Quamobrem cum promotio verticalis nil habeat difficultatis, porro corporis AFB aquae ita insidentis vt AB sit sectio aquae et O centrum magnitudinis partis submersae, centrum grauitatis G transferri horizontaliter per Gg in g; quo facto vas circa axem ad planum O G g normalem inclinabitur, vt sectio aquae fiat ab cum priore angulum ACa constituens, qui est angulus inclinationis, quem quaerimus; cuius sinus sit $= w$ posito sinu toto $= 1$. Existente ergo ab sectione aquae et g centro grauitatis, aequilibrium aderit, ex cuius conditione w, indeque angulus inclinationis definietur. Loco totius corporis autem tantum considerabo figuram planam verticalem AFB, quum ex iis, quae pro figura plana reperientur, conclusio pro ipsis corporibus facile formari possit; si affini-

Tab. XX. fig. 2.

affinitas inter formulas stabilitatem exhibentes pro figuris planis et solidis attentius inspiciatur. Erit igitur triangulum $ACa = BCb$, et cum vtrumque sit minimum punctum C situm erit in medio rectae AB. Cum iam pars submersa sit $aFB = AFB - ACa + BCb$, momenta virium aquae his partibus respondentia respectu centri grauitatis g, se mutuo destruere debent. Per O ad sectionem aquae $\underline{ab}$ ducatur normalis TOV, in quam pariter ex $\underline{g}$ horizontalis gV normaliter cadet. His praemissis partis AFB momentum respectu g erit $= AFB.gV$; quoniam O est centrum magnitudinis partis AFB. Deinde trianguli ACa area est $= \frac{AC \cdot aC \cdot w}{2} = \frac{w \cdot AC^2}{2}$; eiusque centrum grauitatis erit in P vt sit $Cp = \frac{2}{3} AC$ momentum igitur hinc ortum est $\frac{w \cdot AC^2}{2} (\frac{2}{3} AC + CT + gV)$; pari autem ratione momentum ex area BCb ortum est negatiuum atque $= \frac{w \cdot AC^2}{2} (\frac{2}{3} AC - CT - gV)$ posito AC pro BC. Momentum igitur totale ex area aFb ortum erit $AFB.gV - \frac{2w \cdot AC^3}{3}$, quod cum aequilibrium adesse debeat, erit $= 0$. Transferantur iam haec ad corpora, atque in sectione aquae corporis per eius centrum grauitatis ducta sit recta ad planum OGg normalis, quae erit axis circa quem corpus inclinabitur; atque ad hunc axem in sectione aquae colligantur vtrinque summae cuborum applicatarum orthogonalium, seu $\int (y^3 + z^3) dx$ ex prop. 29. quae quantitas, quam vocabo Q, substitui debet loco $2 AC^3$. At loco area AFB scribendum erit volumen partis submersae quod sit $= V$. Ex his pro corpore seu vase quocunque, cuius centrum grauitatis G horizontaliter in g transfertur, habebitur ad inclinationem inde ortam definiendam haec ae-

 quatio

quatio $3g\,V.V = w\,Q$. Eſt vero ob angulos ad O et g minimos $gV = Gg - w.GO$; quare cum ſit $3V.Gg = 3\,wV.GO + wQ$, erit ſinus anguli, quo vas circa axem horizontalem ad planum O G g normalem inclinabitur, ſcilicet $w = \frac{gV.Gg}{3V.GO+Q}$. Ad ſtabilitatem autem inueniendam interuallum, figura tantum plana conſiderata, centri grauitatis areae aFb a recta horizontali gV eſt inueſtigandum, quod reperitur $= OV - \frac{AC^3.w^2}{3A^2B}$ ob $Pp = Qq\,\frac{1}{3}\,w.AC$ idemque interuallum pro corpore ſolido erit conſequenter $= OV - \frac{w^2Q}{6V}$. Eſt autem $OV = OG + w.Gg - \frac{w^2OG}{2}$; vnde diſtantia centri magnitudinis partis ſubmerſae et centri grauitatis poſt inclinationem erit $= OG + w.Gg - \frac{w^2.OG}{2} - \frac{w^2.Q}{6V} = OG + w.Gg\,\frac{w^2F}{2M}$, denotante M pondus corporis, et F ſtabilitatem eiusdem ante inclinationem; eſt enim $F = M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$. Quare poſt inclinationem erit firmitas $= M\left(OG + w.Gg - \frac{w^2.F}{2M} + \frac{Q}{3V}\right) = F + wM.Gg - \frac{w^2F}{2}$. reſpectu eius axis ſcilicet circa quem inclinatio eſt facta. Q. E. I.

Coroll. 1.

409. Cum, antequam centrum grauitatis de ſuo loco depellitur, ſtabilitas aequilibrii ſitus reſpectu axis horizontalis ad planum OGg normalis ſit $= M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$ ſi haec ſtabilitas dicatur $= F$, erit ſinus anguli inclinationis, qui ex translatione centri grauitatis G in g gignitur, $w = \frac{M.Gg}{F}$; exiſtente ſinu toto $= 1$.

Coroll. 2.

410. Sinus anguli ergo, quo vas circa axem horizontalem plano OGg normalem inclinatur, dum centrum grauitatis G motu horizontali per ſpatium Gg promouetur, eſt directe vt hoc ſpatium Gg et pondus vaſis coniunctim, ac reciproce vt ſtabilitas vaſis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 3.

411. Quo maior ergo corporis eſt ſtabilitas, eo magis id etiam ei inclinatione reſiſtit, quae oritur a translatione onerum de loco alio in alium; quam ob cauſam etiam nauibus maxima ſtabilitas eſt concilianda.

Coroll. 4.

412. Quia ſtabilitas poſt factam inclinationem inuenta eſt $= F + wM.Gg - \frac{w^2 F}{2}$, atque eſt $w = \frac{M.Gg}{F}$; erit illa ſtabilitas $= F + \frac{M^2.Gg^2}{2F}$. Hoc igitur ſtabilitatis incrementum, quod poſt inclinationem accedit ob duas dimenſiones interualli quaſi infinite parui Gg omnino eſt negligendum.

Coroll. 5.

413. Quando ergo grauitatis centrum recta ſurſum deorſumue mouetur, nulla fit inclinatio ſed, ſola ſtabilitas immutatur; contra vero quando centrum grauitatis horizontaliter mouetur, ſtabilitas non afficitur, ſed ſitus aequilibrii per inclinationem ſolum mutatur.

Coroll. 6.

414. Quando ergo centrum grauitatis oblique mouetur, tum mutabitur tam ſtabilitas, quam ſitus corporis in aqua.

aqua. Quanta autem mutatio in vtroque accidat, ex propositionibus praecedentibus satis intelligere licet.

Scholion 1.

415. Quo haec facilius ad naues, in quibus stabilitatem respectu duorum tantum axium horizontalium, alterius longitudinalis a prora ad puppim protensi, alterius latitudinalis ad illum normalis, cognitam esse ponimus, accommodari queant, motus centri grauitatis, nisi vel secundum longitudinem vel latitudinem fiat, resolui debet in duos laterales, alterum in longitudine alterum in latitudine factum, quos seorsim considerari oportet. Illa enim centri grauitatis translatio secundum axem longitudinalem facta inclinationem circa axem latitudinalem generabit, cuius sinus aequalis erit facto ex pondere nauis in viam centri grauitatis secundum lougitudinem, diuiso per stabilitatem respectu axis latitudinalis. Via vero centri grauitatis secundum latitudinem facta per pondus nauis multiplicata, ac per stabilitatem respectuaxis longitudinalis diuisa exprimet sinum anguli inclinationis, quo nauis circa axem longitudinalem inclinabitur. Hae igitur duae inclinationes coniunctae praebebunt inclinationem nauis a translatione centri grauitatis per spatium quodcunque horizontale facta, ortam. At si centrum grauitatis simul vel ascendat vel descendat, ante decrementum vel augmentum stabilitatis est inuestigandum, quam in inclinationem inquiratur. Stabilitas enim, a qua inclinatio pendet, non prima in computum est ducenda, sed ea, quae ob ascensum vel descensum centri grauitatis iam est vel minuta vel aucta.

Scholion

Scholion 2.

416. Solutio huius problematis, quanquam id corpora quaecunque aquae insidentia spectabat, multo facilior et a corporum consideratione libera est facta, quod expressiones ex figurae planae contemplatione ortas ad naturam corporum extensorum accommodare licuit. Sequitur autem ista figurarum planarum ad corpora translatio ex comparatione formularum, quas in capite praecedente pro stabilitate tum figurarum planarum, tum corporum quorumque inuenimus. Cum enim pro figura plana sit stabilitas $= M\,(GO + \frac{2\,AC^3}{3\,AFB})$, pro corpore autem ea reperta sit $= M\,(GO + \frac{Q}{3V})$ vbi Q denotat aggregatum cuborum omnium applicatarum in sectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis transeuntem et axi inclinationis parallelum normalium; V vero exhibet volumen partis submersae. Quoties igitur ad eiusmodi expressiones peruenitur, a figura plana ad solidam fiet translatio, si loco areae AFB sub aqua versantis scribatur V volumen partis corporis submersae, atque pro $2AC^3$ ponatur Q, seu, $\frac{1}{2}$ Q pro AC^3. Cum igitur istius modi problemata multo facilius figuras tantum planas considerando resoluantur, huius comparationis beneficio solutiones eorundem problematum nullo negotio simul ad quaecunque corpora reduci poterunt; quod vti in isto problemate est factum, ita in sequente multisque aliis succedet.

PROPOSITIO 42.
Problema.

Tab. XXI. fig. 1. 417. *Si vasi seu naui cuicunque aquae insidenti nouum onus imponatur, inuenire tum situs tum stabilitatis mutationem, quae ab hoc nouo onere orietur.*

Solutio.

Sit AB sectio aquae, et AFB pars corporis aquae submersa, cuius centrum magnitudinis sit in O, totius vero corporis centrum grauitatis in G. Nunc posito totius corporis seu nauigii pondere $= M$ superaddatur illi in loco quocunque pondus m: Ad mutationem igitur ab hoc nouo onere imposito ortam indagandam, concipiatur id primo ipsi centro grauitatis G immissum. Cum nunc pondus corporis sit auctum, maior corporis pars aquae immergetur, quam ante: Subsidat igitur centrum grauitatis recta deorsum, vt nunc ab fiat sectio aquae atque aFb tanta sit corporis portio, quantam pondus $M+m$ desiderat. Sit sectionis aquae area $= E$, atque volumen partis submersae AFB sit $= V$: erit volumen partis $AabB$ de nouo immersae $= E.HI$, si quidem vti pono onus m est vehementer paruum respectu M, quo inaequalitatem inter AB et ab considerasse non sit necesse: Erit ergo $M : m = V : E.HI$, vnde fit $HI = \frac{mV}{ME}$. Quamuis autem iam debita corporis pars sub aqua versetur, tamen iste situs non erit aequilibrii, nisi huius partis submersae centrum magnitudinis etiamnum in recta FH existat. Manebit autem partis submersae centrum magnitudinis vt recta HF, si portionis $AabB$ centrum magnitudinis in eandem cadat, id quod euenit quan-

quando recta GO simul per centrum grauitatis sectionis transeat; hoc ergo casu quaesitum iam constat, cum a F b futurus sit aequilibrii situs. At ponamus sectionis aquae centrum grauitatis non in I cadere, sed in alio puncto C existere; atque portionis AabB centrum magnitudinis cadet in Z punctum medium rectae Cc = HI; hoc igitur casu situs a F b aequilibrii proprietate non erit praeditus; sed corpus inclinabitur circa axem ad planum CIG normalem, ita vt sectio aquae futura sit $\alpha\beta$ cum priore angulum constituens $ac\alpha$ cuius sinus sit $= w$; quem angulum ante quam pro corpore investigemus, quaeremus pro figura plana AFB. Cum igitur nunc $\alpha\beta$ sit horizontalis ad eam, per O ducatur verticalis Oo, cui ex G horizontalis GV in V occurrat; atque quia hoc situ aequilibrium adesse ponitur, considerabo partem submersam α F β, quam ex his partibus AFB + AabB $- ac\alpha +$ $bc\beta$ compositam esse considerari conueniet, quarum partium momenta respectu G se mutuo destruent. At est areae AFB momentum = AFB. GV areae vero AabB = AabB $(GV - \alpha o + \alpha z)$ = AabB $(GV - co - cz)$. Trianguli autem $ac\alpha$, cuius area est $= \frac{1}{2} w\, \alpha c.\, ac = \frac{1}{2} w.\, AC^2$; momentum, posito eius centro grauitatis in P vt sit cp $= \frac{2}{3} c\alpha = \frac{2}{3}$ CA erit $= \frac{1}{2} w\, AC^2 (GV - \frac{2}{3} AC - co)$. Trianguli autem $bc\beta$ simili modo momentum erit $= \frac{1}{2} w.\, AC^2$ $(GV + \frac{2}{3} AC - co)$. Cum igitur sit pars aquae submersa = AFB + AabB $- ac\alpha + bc\beta$, erit momentum totius partis submersae = AFB. GV + AabB $(GV - co - cz) + \frac{2}{3} w. AC^3$ $= 0$. Transferatur nunc haec formula ad corpora, ponendo loco AFB volumen partis submersae V; loco AabB

 volu-

volumen $\frac{mV}{M}$; atque loco $2\,AC^2$ summam omnium cuborum applicatarum normalium in sectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis ductum, qui axis normalis sit ad planum CIG; haec vero summa, quae in probl. 29 erat $\int(y^2+z^2)\,dx$ hic nobis breuitatis causa vocetur Q. Quamobrem pro corpore hanc habebimus aequationem V. $GV+\frac{mV}{M}(GV-co-cz)+\frac{1}{3}wQ=0$; quae cum sit G $V=w:\ GO$; $co=CI-w:HO=CI-w:OI-\frac{wmV}{ME}$ atque $cz=w.cZ=\frac{wmV}{2ME}$; transibit in hanc $wV.GO+\frac{wmV.GO}{M}-\frac{mV.CI}{M}+\frac{wmV.OI}{M}+\frac{wm^2V^2}{2M^2E}+\frac{1}{3}wQ=0$; ex qua elicitur $w=\frac{mV.CI}{MV.GO+\frac{1}{3}MQ+mV.GI+\frac{m^2V^2}{2ME}}$. Si nunc stabilitas respectu eiusdem axis circa quem inclinatio est facta, quae est $=M.GO+\frac{MQ}{3V}$ vocetur F, erit $w=\frac{m.CI}{F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}}$ pro qua aequatione ob m pondus respectu M valde paruum tuto vti licebit hac $w=\frac{m.CI}{F+m.GI}$. Stabilitas autem huius aequilibrii situs ab eo non differet, quae in situm aFb competeret; quae ob centrum magnitudinis supra O eleuatum interuallo $\frac{m}{M+m}(OI+\frac{mV}{2ME})$ erit $=(M+m)(GO+\frac{m}{(M+m)}(OI+\frac{mV}{2ME})+\frac{MQ}{3(M+m)V})=M.GO+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}+\frac{MQ}{3V}$. Cum igitur ante accessionem oneris m stabilitas esset $F=M.GO+\frac{MQ}{3V}$; erit nunc stabilitas $=F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}$, pro qua expressione pariter licebit vti hac $F+m.GI$. Quoniam autem hic onus m non ipsi centro grauitatis G immissum considerauimus, remoueatur nunc

nunc onus m in eum locum vbi reuera est positum, atque quaenam nouae mutationes eueniant, ex propositione praeced. intelligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

418. Cum $F + m.GI + \frac{m^2 V}{2ME}$ sit stabilitas noui aequilibrii situs, quem nauis onere m in centro grauitatis collocato adipiscitur, sinus anguli inclinationis aequabitur facto ex onere imposito m ducto in CI et diuiso per hanc nouam stabilitatem.

Coroll. 2.

419. Eadem inclinatio prodit si onus m vbicunque in recta verticali FH collocetur, quia motu oneris sursum deorsumue facto situs aequilibrii non turbatur; at stabilitas minor maiorue euadet.

Coroll. 3.

420. Si onus m in rectae verticalis FI puncto K imponatur, stabilitas ea quae prodiret, si centro grauitatis G foret immissum, diminui debet facto $m.GK$. Hoc ergo casu stabilitas erit $= F + m.IK + \frac{m^2 V}{2ME}$.

Coroll. 4.

421 Reiecto ergo termino $\frac{m^2 V}{2ME}$ perspicuum est impositione oneris noui stabilitatem augeri, si onus infra sectionem aquae collocetur. Contra vero stabilitas diminuetur, si onus supra aquam ponatur.

Coroll. 5.

422. Quando ergo centrum grauitatis sectionis aquae C in ipsam verticalem FGI incidet, tum nulla fiet inclinatio, ab onere imposito, dummodo oneris centrum grauitatis quoque in rectam FGI incidat.

Coroll. 6.

423. Si autem onus m non in rectam FI ponitur sed extra eam, atque punctum C non incidat in I, duplex proueniet inclinatio, altera scilicet hic definita et ab interuallo CI pendens, altera vero ex praecedente propositione orta et a distantia oneris a recta FI pendens.

Scholion. 1.

424. Ex hac ergo propositione clarius intelligitur quantum eiusmodi nauigia, quae sectionis aquae centrum grauitatis et partis submersae centrum magnitudinis in eadem recta verticali, in quam simul totius nauis centrum grauitatis cadere debet, habeant posita aliis, quae hac proprietate carent, antecellant. In eiusmodi enim nauibus, si noua onera, vel ipsi centro grauitatis immittantur, vel in recta verticali per id transeunte collocentur, nulla accidit inclinatio, sed nauis tantum verticaliter descendendo aquae profundius immergetur. Atque etiam si onus nouum non in rectam verticalem per centrum grauitatis ductam imponatur, vnica tantum oritur inclinatio circa axem quendam horizontalem, cum in aliis nauigiis, in quibus haec proprietas locum non inuenit, duplex inclinatio eueniat. Quo autem, si nauis profundius immergitur,

gitur, recta verticalis per centrum grauitatis ducta etiamnum per nouae sectionis aquae centrum grauitatis trenseat, necesse est vt sectiones nauis parallelae sectioni aquae principali, si non omnes, tamen proximae saltem sua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant posita. At si omnes sectiones nauis horizontales vel eae saltem, quae aquae immerguntur, ita sint comparatae, vt earum centra grauitatis sita sint in eadem recta verticali, tum sponte in eandem rectam cadet centrum magnitudinis partis submersae. Quamobrem ista regula, quae praecipit, vt vna recta verticalis per singularum sectionum horizontalium centra grauitatis transeat, ingentem afferet vtilitatem ad naues aptissime construendas; hac enim obseruata pluribus satisfit requisitis, quae in perfecta naui inesse debent; prout ex antecedentibus intelligere licet, et in sequentibus fusius docebitur.

Scholion 2.

425. Quae in hac propositione de impositione noui oneris sunt dicta, eadem quoque locum habent, si naui potentia verticalis applicetur, si enim potentia verticalis deorsum vrgeat, tum idem orietur effectus ac si onus nouum, cuius pondus illi potentiae aequiualeat, in eo ipso loco, in quo potentia applicatur, imponeretur: sin autem potentia sursum trahat, tum effectus erit contrarius, atque ex solutione problematis non difficilius determinabitur, ponendo oneris vim negatiuam, seu loco m scribendo $-m$. In hoc vero discrimen inter onera et potentias consistet, quod impositione onerum tum vis inertiae nauis tum etiam eius momentum immutetur, atque insuper centrum grauitatis de suo loco transferatur,

quae

quae omnia, si merae potentiae agant, nulli mutationi sunt abnoxia. Quamobrem oportebit effectum huiusmodi potentiarum seorsim scrutari, quatenus scilicet applicatione potentiarum nulla naui noua materia accedit; id quod mox in hoc capite, quod effectui quarumcunque potentiarum naues sollicitantium determinando est destinatum. Quae tractatio, quo dilucidius perspiciatur, ante omnia est aduertendum omnem effectum, qui a potentiis nauigia aliaue corpora aquae innatantia sollicitantibus, quintuplicem esse posse; cum huiusmodi corporum status quinque diuersis modis turbari queat. Primum enim nauis vel corpus aquae insidens a vi aliena ita affici potest, vt vel profundius immergatur, vel ex aqua extrahatur; qui effectus a potentiis verticalibus oritur, atque ex propositione praesente facile iudicatur. Secundus potentiarum effectus in hoc constat, vt nauis de suo loco motu horizontali propellatur, ad quem obtinendum remi, venti ipse aquae motus aliaeque vires adhiberi solent. Tertio nauis a potentiis inclinatur circa axem quempiam horizontalem per centrum grauitatis transeuntem, qui ad planum verticale per spinam ductum sit normalis. Quarto inclinatio fieri potest circa axem horizontalem secundum nauis longitudinem per centrum grauitatis ductum; ad duplicem enim hanc inclinationem omnis inclinatio, quae circa axem quemcunque fit, reduci potest. Quinto denique nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuerti potest, talemque effectum in nauibus gubernaculum praecipue producit. Hi autem quinque effectus, quanquam inter se ita sunt connexi vt plerumque plures ab

vna

vna potentia oriantur, tamen ſinguli ſeparatim conſiderari calculoque elici poſſunt; quemadmodum ex principiis ante traditis intelligere licet. Vnusquisque enim effectus perinde producitur a potentiis atque determinatur, ſiue reliqui effectus ſimul producantur ſiue ſecus; et hancobrem ſi quaecunque potentiae nauigium ſollicitent, totalis effectus cognoſcetur, ſi ſeparatim, quantum in ſingulis memoratis quinque effectuum ſpeciebus efficiatur, diligenter inueſtigetur. Quo circa vnumquemque de his quinque effectibus ſeorſim contemplabor, ac quomodo ſinguli a potentiis ſollicitantibus producantur, animum a reliquis abſtrahendo, oſtendam. Ante omnia autem ſi propoſita fuerit potentia nauem corpusue quodcunque aquae innatans ſollicitans, inquirendum eſt, vtrum ea eiusmodi effectum, de quo quaeritur, producere valeat, an minus; non enim quaevis potentia ad quemuis effectum producendum eſt apta. Deinde ſi compertum fuerit potentiam eiusmodi effectum exerere, tum quantitas iſtius effectus determinari debebit. Hocque modo cum ſingulae quinque effectuum ſpecies memoratae erunt pertractatae, facile erit iudicare, quid potentiae quaecunque in data naui ſint effecturae.

PROPOSITIO 43.

Problema.

426. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum, quem exerent in naui magis minusue aquae immergenda.*

Solutio.

Ad diiudicandum, quanto magis minusue nauis a potentiis immergatur, ad eius centrum grauitatis reſpici

 oportet,

oportet, et inueſtigari, vtrum id a potentiis deorſum vel ſurſum vrgeatur, an ſecus. Quamobrem, ſicut ad motum centri grauitatis cognoſcendum facere oportet, omnes potentiae in directionibus ſibi parallelis ipſi centro grauitatis applicatae concipi debebunt; ſingulaeque reſolui in verticales et horizontales, quarum illae ſolae eum effectum producent, in quem hic inquirimus. Si igitur fuerit quaecunque potentia p cuius directio cum horizonte angulum faciat, cuius ſinus ſit m, poſito ſinu toto $= 1$; erit mp ea potentia, qua nauis ſurſum deorſumue vrgebitur; ſurſum ſcilicet ſollicitabit nauem, ſi directio potentiae ſurſum vergat, deorſum vero ſi deorſum. Quare ſi ex ſingulis potentiis ſollicitantibus valores $\underline{m}\,\underline{p}$ eliciantur, et in vnum colligantur, habebitur totalis vis nauem vel ſurſum eleuans vel deorſum deprimens. Aequiualeat iſta vis collecta ponderi P, tendatque deorſum; ſi enim ſurſum agat, tantum valorem P negatiuum accipere oportebit. Ab hac ergo vi P, ſi quidem P affirmatiuum habuerit valorem, nauis magis immergetur; quanto profundius autem immergatur ita definietur. Sit maſſa ſeu pondus totius nauis $= M$; volumen partis ſubmerſae $= V$, et ſectio aquae $= E$, ponatur vero altitudo verticalis, qua nauis aquae profundius immergetur $= Z$, quam pono vehementer exiguam, quod vires verticales ſeu pondus P plerumque valde exiguum reſpectu ponderis nauis M eſſe ſoleat. Erit ergo poſt auctam nauis immerſionem volumen partis ſubmerſae $= V + Ez$, hincque naſcetur per principia hydroſtatica iſta proportio $M : V = M + P : V + Ez$, ſeu iſta aequatio $PV = MEz$, ex qua oritur $z = \frac{PV}{ME}$. Profundius

fundius itaque centrum grauitatis nauis subsidet, a vi P, et descendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$. At si potentiae sollicitantes nauem eleuent, atque totalis vis eleuans aequiualeat ponderi P, tum centrum grauitatis ascendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$, seu quod idem est, descendet per interuallum $-\frac{PV}{ME}$, quae expressio ex illa nascitur ponendo $-$P loco P, vti iam innuimus. Q. E. I.

Coroll. 1.

427. Si ergo omnes potentiae sollicitantes directiones habeant horizontales, vel si potentiae verticales quae ex illis oriuntur se mutuo destruant, tum nauis neque magis deprimetur in aquam, neque eleuabitur.

Coroll. 2.

428. Si plures potentiae nauem sollicitent, tum ex singulis ascensum descensumue centri grauitatis concludere licebit, quippe qui singuli effectus collecti verum centri grauitatis siue ascensum siue descensum indicabunt.

Coroll. 3.

429. Quia centri grauitatis ascensus descensusue fit per spatium $\frac{PV}{ME}$; at vero volumen partis submersae V semper sit proportionale ponderi nauis M, sequitur maiorem minoremue nauis immersionem proportionalem esse vi vrgenti P directe, et sectioni aquae E inuerse.

Coroll. 4.

430. Quo ergo maior fuerit sectio aquae, eo minor erit mutatio partis aquae immersae ab eadem vi sol-

licitante orta. Quamobrem quo naues eiusmodi mutationi minime ſint obnoxiae, ſectionem aquae ampliſſimam efficere expediet.

Coroll. 5.

431. Si aquae volumen, cuius pondus aequale ſit ponderi P, ponatur u, atque hoc volumen adhibeatur ad quantitatem vis ſollicitantis exprimendam, erit ob V: M $= u$: P ſpatium, quo centrum grauitatis ſurſum deorſumve vrgetur $= \frac{u}{E}$; ex qua expreſſione facillime, quanto nauis magis minusue aquae immergatur, intelligi poteſt.

Scholion.

432. Ad effectum in omni corpore, quem potentiae ſollicitantes producunt, cognoſcendum duplici inueſtigatione eſt opus, altera qua motus progreſſiuus centri grauitatis definitur, altera qua motus corporis gyratorius circa centrum grauitatis quaeritur. Eandem ergo rationem in effectu potentiarum nauigia aliaue corpora aquae innatantia ſollicitantium inquirendo adhiberi oportet, quae cum natura aquae, qua libertas corporum ſeſe quacunque mouendi reſtringitur, coniungi debet. Quod enim primum ad motum centri grauitatis attinet, eum in corporibus aquae innatantibus duplicem conſiderari conuenit, prout eius directio vel horizontalis eſt vel verticalis; motus namque horizontalis ſi ſemel fuerit impreſſus, perpetuo conſeruatur, niſi quatenus ab aquae reſiſtentia retardatur, motus verticalis autem ſtatim ſiſtitur, ac tanta pars ſub aqua verſatur, quantam hic definiuimus; atque hancobrem in iſta propoſitione non tam ipſum centri grauitatis aſcenſum deſcenſumue determinare ſuſcepimus, quam terminum

illum

illum quo ſiſtitur, et in quo centrum grauitatis acquieſcit. Quanquam enim reuera grauitatis centrum, cum moueri incepit, ſubito non quieſcit, tamen eiusmodi motu oſcillatorio definiendo ſuperſedendum cenſuimus, cum ab ipſa aqua ſtatim ſiſtatur. Pergo igitur ad alterum caſum motus centri grauitatis progreſſiui inueſtigandum, quo a potentiis ſollicitantibus motum in directione horizontali adpiscitur.

PROPOSITIO 44.
Problema.

433. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum in motu horizontali progreſſiuo vel generando vel alterando.*

Solutio.

Quoniam de motu centri grauitatis progreſſiuo quaestio eſt, omnes potentiae in directionibus parallelis ipſi centro grauitatis applicatae concipi debent: et quoniam motus tantum horizontalis inueſtigatur, omnes potentiae reſoluendae ſunt in verticales et horizontales, quae poſteriores tantum huic inſtituto ſunt accommodatae. Si igitur quaecunque potentia fuerit p, cuius directio cum horizonte faciat angulum cuius ſinus ſit $\underline{m}$, erit $p\sqrt{(1-mm)}$ potentia horizontalis effectum hic quaeſitum producens. Omnium ergo potentiarum ſollicitantium quaerantur hoc modo vires horizontales, earumque, ſi in ipſo centro grauitatis ſint applicatae, tum media directio tum potentia aequiualens, quae exprimatur pondere P. Iam ſit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta, Tab. XXI. fig. 2.

 atque

atque GP ſit media directio omnium potentiarum ſollicitantium, quatenus motum horizontalem afficiunt. Sollicitabitur ergo nauis in directione GP a potentia P, cuius vis aequiualeat ponderi P. Si nunc pondus totius nauis ponatur $= M$, erit vis accelerans $= \frac{P}{M}$, qua in directione GP accelerabitur. Scilicet ſi nauis iam moueatur in directione GP celeritate debita altitudini v, erit, dum nauis elementum ſpatii dx abſoluet, $dv = \frac{Pdx}{M}$. At ſi motus, quem nauis iam habet non fiat in directione GP, ſed in alia GM, quae cum GP angulum faciat MGP, cuius ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$ poſito ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$; tum a vi ſollicitante P cum celeritas nauis, quae debita ſit altitudini v mutabitur, tum ipſa directio MG. Celeritas autem augebitur a vi $\frac{nP}{M}$ ita vt dum nauis elementum dx percurrit, futurum ſit $dv = \frac{nPdx}{M}$. A vi autem altera normali $\frac{mP}{M}$ cogetur nauis a ſemita rectilinea GM deflectere verſus directionem GP, ac dum percurret ſpatiolum dx, declinabit a directione GM verſus GP angulo, cuius ſinus erit $= \frac{mPdx}{2Mv}$. Atque ex his tam generatio quam alteratio motus nauium progreſſiui a potentiis quibuscunque orta, cognoſcitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

434. Si ergo nauis quieuerit, a potentiis ſollicitantibus motum conſequetur in ipſa directione media GP, eoque celerius moueri incipiet, quo maior fuerit vis P, ſimulque quo minus fuerit pondus ipſius nauis M.

Co-

Coroll. 2.

435. Simili modo si nauis iam habeat motum in ipsa directione GP, is accelerabitur eo fortius, quo maior fuerit potentia P, et quo minus fuerit pondus nauis M. Momentum enim accelerationis est directe vt vis P, et reciproce vt pondus nauis.

Coroll. 3.

436. Sin autem motus, quem nauis iam habet, fiat in alia directione GM, tum acceleratio eo erit maior, quo minor fuerit angulus MGP; proportionalis enim est ceteris paribus cosinui anguli MGP.

Coroll. 4.

437. Quod autem in hoc casu ad declinationem a directione GM attinet, ea proportionalis erit directe ipsi potentiae P et sinui anguli MGP coniunctim, inuerse vero ponderi nauis et quadrato celeritatis coniunctim.

Coroll. 5.

438. Quo celerius igitur nauis iam mouetur, eo minus ab eadem vi oblique agente de via sua deflectitur; atque ceteris paribus erit deflexio in reciproca ratione duplicata celeritatis.

Scholion.

439. Haec omnia non solum ita se habent, sed etiam totus nauis motus ad datum quoduis tempus ex iis posset definiri, si modo aqua nullam opponeret resistentiam, neque tam ipsum motum retardaret, nec effectum

poten-

potentiarum turbaret. Propter aquae resistentiam enim primum motus nauium insigniter retardatur, idque eo magis quo celerius nauis mouetur; aestimatur namque experientiam consulendo aquae resistentia quadrato celeritatis proportionalis. Deinde vero directio resistentiae praecipue est attendenda, quae nisi in ipsam motus nauis directionem incidat, simul etiam eius directionem afficit, atque nauem de via sua deflectit. Quamuis autem in sequente demum capite effectum resistentiae simus indagaturi, tamen inter potentias locum habet, et cum eius quantitas et directio fuerit definita, ipse effectus ex his ipsis principiis determinari debet. Quamobrem si nauis iam habeat motum, cum potentiis sollicitantibus simul resistentia est coniungenda, et effectus, quem exerit tam in motu nauis afficiendo, quam nauem inclinando et conuertendo ex hoc capite erit deriuandus. Sic in hac propositione PM exprimere poterit mediam directionem non solum potentiarum sollicitantium sed etiam resistentiae ab aqua ortae; atque P denotare vim coniunctim ex potentiis sollicitantibus et resistentia natam. Quare cognitis resistentiae cum quantitate tum directione, ex hac propositione nauis celeritas et directio quouis loco, dum promouetur, exquisite definiri poterit.

PROPOSITIO 45.
Problema.

440. *Si nauis a potentiis quibuscunque sit sollicitata, inuenire momenta virium nauem tum circa axem horizontalem longitudinalem tum latitudinalem inclinantium.*

Solu-

Solutio.

Sit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta, in qua extat AB axis longitudinalis, CD vero axis latitudinalis, circa quorum axium vtrumque, quanta vi data potentia nauem inclinet, hic inueſtigari oportet. Intelligitur antem pro vtroque axe ſimile ratiocinium eſſe inſtituendum, ſimilique modo vim nauem tam circa axem AB, quam circa CD inclinantem eſſe indagandam; quamobrem ſufficiet pro alterutro tantum axe puta AB quaeſtionem abſoluiſſe. Primo autem notandum eſt, nullam potentiam, cuius directio vel cum axe AB concurrat vel eidem ſit parallela vel tantum cum hoc axe in eodem plano ſit ſita, nauem circa hunc axem conuertere poſſe. Quamobrem eae tantum potentiae hic ſunt conſiderandae, quarum directiones cum axe AB non in eodem plano ſunt poſitae. Sit igitur quaecunque potentia nauem ſollicitans aequiualens ponderi p, per cuius directionis punctum quoduis ad axem AB ducatur perpendicularis, cuius longitudo ſit f; deinde concipiatur planum per axem AB, et hanc perpendicularem ductum, et quaeratur angulus, quem directio potentiae cum hoc plano conſtituit, cuius ſinus ſit $= m$. Quo facto momentum potentiae ad nauem circa axem AB conuertendam erit $= mpf$. Simili modo quaerantur eiusmodi momenta ex ſingulis potentiis ſollicitantibus, et omnes, reſpectu habito ad ipſam actionem, vtrum in eandem plagam, an in contrariam nauem conuertere conentur, in vnum colligantur, quae reducentur ad eiusmodi ſimplicem expreſſionem Pa, in qua P pondus quodpiam, a vero rectam Tab. XXI. fig. 3.

 quan-

quandam denotabit. Hoc igitur modo quotcunque potentiae nauem sollicitauerint, momenta respectu tam axis AB quam axis CD definientur. Q. E. I.

Coroll. 1.

441. Quia indifferens est quodnam punctum in directione potentiae sollicitantis accipiatur, poterit planum quodpiam per axem ductum pro lubitu accipi, idque punctum notari, in quo directio potentiae illi plano occurrit.

Coroll. 2.

442. Expediet ergo ad hoc commodissime transigendum planum accipere vel verticale vel horizontale, per axem, circa quem momentum conuertens inquiritur, ductum. Saepius autem horum planorum alterum alteri erit anteferendum; quae electio facillime cuique patefiet.

Coroll. 3.

443. Perspicitur ergo, si cuiuspiam potentiae directio vel per ipsum centrum grauitatis G transeat, vel in plano ACBD sita sit, tum nauem circa neutrum axem conuersum iri, neque propterea vllam inclinationem pati.

Scholion.

444. Cum circa quemcunque axem inclinatio duplex sit, pro duplici plaga secundum quam inclinatio fieri potest, hoc in inquisitione momentorum diligenter est attendendum, quo omnibus momentis definitis appareat, an omnino in eandem plagam nauem conuertere conentur, an

an ſecus: illo enim caſu omnia momenta in vnam ſummam colligantur, hoc vero ea momenta, quae in plagam oppoſitam tendant, ſubtrahi debent. Quo autem facilius hoc diſcrimen oculis obuerſetur, atque citiſſime animaduertatur, pro vtroque axe ambas plagas probe inter ſe dignouiſſe, et idoneis nominibus appellaſſe iuuabit. Ita nauis circa axem latitudinalem CD duplici modo inclinari poteſt, vel proram vel puppim verſus, inclinatur autem verſus proram vel puppim, dum vel prora vel puppis magis immergitur. Circa axem longitudinalem AB autem inclinatio fit vel ad latus dextrum vel ſiniſtrum, quae denominatio deſumitur ab eo, qui in puppi ſtans proram aſpicit. In colligendis igitur momentis plurium potentiarum reſpectu axis vel AB vel CD, probe eſt notandum in vtram plagam quaeque potentia conetur inclinare nauem, quo collectio fiat legitima. Inuento autem momento totali ex omnibus potentiis ſollicitantibus collecto, ipſa inclinatio eſt definienda, id quod ſequente propoſitione praeſtabitur.

PROPOSITIO 46.
Problema.

445. *Si nauis a potentiis quibuscunque ſollicitetur, determinare angulum, quo ea tum circa axem latitudinalem tum longitudinalem inclinetur.* Tab. XXI. fig. 3.

Solutio.

Conſideremus primo axem latitudinalem CD, ſitque momentum ex omnibus potentiis ortum ad nauem circa hunc axem CD ſiue proram ſiue puppim verſus inclinandam

dam $= Pa$; atque anguli inclinationis, quem producit, ſinus ſit $= w$, quem tanquam vehementer paruum ſpecto. Sit iam ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis latitudinalis $CD = F$, eo modo expreſſa, quo in capite praecedente fecimus, erit Fw momentum, quo nauis ſeſe proprio conatu in ſitum erectum reſtituere annititur. Cum igitur hunc ſitum a potentiis ſollicitantibus conſeruari ponamus, neceſſe eſt vt ſit $Pa = Fw$, ex qua aequatione oritur anguli inclinationis productae ſinus $w = \frac{Pa}{F}$. Simili modo, ſi dicatur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = \Phi$, atque momentum totale potentiarum nauem circa hunc axem inclinare tendentium fuerit $= Qb$, erit anguli ad quem nauis actu circa axem AB inclinabitur ſinus $= \frac{Qb}{\Phi}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

446. Conſtat igitur, quod quidem ex praecedentibus iam manifeſtum eſt, inclinationem, quam data potentia producit, eo fore minorem, quo maior fuerit ſtabilitas nauis reſpectu axis, circa quem fit inclinatio.

Coroll 2.

447. Stabilitas noſtro recepto modo deſignatur per factum ex pondere nauis in lineam quandam rectam: vnde facile intelligitur fractionem $\frac{Pa}{F}$ denotare merum numerum, qui exprimet ſinum anguli inclinationis poſito ſinu toto $= 1$.

Co-

Coroll. 3.

448. Erit ergo ſinus anguli inclinationis ad ſinum totum, vti momentum potentiarum inclinationem efficientium, ad ſtabilitatem nauis reſpectu illius axis circa quem fit inclinatio.

Coroll. 4.

449. Si igitur ſtabilitas nauis reſpectu cuiuspiam axis decies maior fuerit, quam momentum virium inclinantium, tum inclinatio minor erit 6 gradibus, prodit enim hoc caſu angulus inclinationis circiter 5°, 45′.

Coroll. 5.

450. Intelligitur etiam, quo magis vires inclinantes a centro grauitatis fuerint remotae, eo maius fore momentum ad inclinandum, et propterea inde eo maiorem produci inclinationem.

Scholion.

451. Quemadmodum a potentiis centrum grauitatis ſollicitantibus in nauigiis duplex naſcitur effectus, quorum alter in maiore vel minore immerſione conſiſtit, alter vero in promotione nauis horizontali, ita ex potentiis, quae corpora circa centrum grauitatis gyrari ſolent, in nauibus triplex effectus oritur, pro tribus axibus, circa quos nauis conuerti poteſt. Si enim in omni naui tres axes per centrum grauitatis tranſeuntes concipiamus, duos horizontales, alterum longitudinalem ſcilicet, alterum latitudinalem, et vnum verticalem, nauis a potentiis circa ſingulos conuerti poterit, ita vt conuerſio circa vnum

non turbet conuerſionem circa reliquos. Effectus autem harum conuerſionum circa tres iſtos axes propter actionem aquae inter ſe penitus ſunt diſſimiles, et hancobrem ſeorſim ſunt euoluendi. Vires enim, quae tendunt ad nauem circa alterutrum axem horizontalem conuertendam, effectum ſuum ſtatim conſequuntur, qui cum ſemel fuerit productus, nulla amplius mutatio in naui oritur. Conſiſtit enim harum virium effectus in inclinatione circa eiusmodi axem ad certum angulum vsque, quoad iſtae vires a ſtabilitate nauis in aequilibrio conſeruentur; atque ſi inclinatio fuerit facta ad hunc angulum, tum nauis in hoc ſtatu perſiſtit, ſi quidem vires eaedem maneant; at quam primum vires vel augentur vel diminuuntur vel penitus ceſſant, tum inclinatio vel augebitur vel diminuetur vel nauis prorſus ſe in ſitum naturalem recipit, niſi forte ob motum iam receptum motus oſcillatorio ſimilis producatur. Longe aliter autem eſt comparata ratio conuerſionis circa axem verticalem, viribus enim quae eiusmodi conuerſionem producunt, nulla vis propria reſiſtit, et hancobrem nauis a talibus viribus circa axem verticalem tamdiu conuertitur, quamdiu vires agunt, neque conuerſio ante ſiſtitur, quam vires penitus ceſſauerint, atque motus conuerſionis iam conceptus a reſiſtentia aquae abſorbeatur. Quocirca ad effectum eiusmodi virium conuertentium cognoſcendum ipſum motum conuerſionis indagari oportet.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. XXI. fig. 5. 452. *Si navis vel corpus quodcunque aquae innatans ſollicitetur a potentiis quibusuis, determinare vis momentum, quo*

quo corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem circumagetur.

Solutio.

Sit ACBD ſectio horizontalis nauis per centrum grauitatis G facta, atque EGF axis verticalis per centrum grauitatis G ductus, circa quem motus conuerſionis inquiritur. Duplici autem modo nauis circa hunc axem gyrari poteſt, conuertendo ſe vel ad dextram vel ad ſiniſtram; dico autem nauem ſe ad dextram conuertere, quando prora ei, qui in puppi ſtat proramque intuetur, ad dextram rotari videtur; cui conuerſioni contrarius motus ad ſiniſtram fieri dicitur, de qualibet igitur potentia nauem circa hunc axem verticalem circumagere valente videndum eſt, vtrum ea nauem verſus dextram an verſus ſiniſtram rotari cogat, quo, ſi plures agant potentiae effectus conſpirantium addi, contrariarum vero ſubtrahi facillime queant. Animaduertendum autem eſt ante omnia, nullam potentiam, cuius directio vel tranſeat per centrum grauitatis, vel ſit verticalis, vel cum axe EF in eodem plano conſiſtat, eiusmodi motum conuerſionis producere valere. Cum igitur omnes potentiae reſoluantur in verticales et horizontales, in ſolis horizontalibus cauſa eiusmodi conuerſionis circa axem EF erit quaerenda. Ita autem ipſa vis conuertens inueſtigabitur: Concipiatur planum horizontale in quo ſita ſit directio potentiae cuiuspiam horizontalis, noteturque punctum in quo axis EF ab hoc plano ſecabitur. Deinde ex hoc puncto in directionem potentiae ducatur normalis, quae per ipſam potentiam multiplicata dabit momentum eius vis ad motum gyratorium circa axem

EF

EF producendum. Vel ex ſupra dicto axis EF puncto recta quaecunque duci poteſt ad directionem potentiae ſollicitantis horizontalis, haecque recta tum in ſinum anguli quem cum directione potentiae conſtituit, tum in ipſam potentiam ducta dabit momentum. Si igitur ex ſingulis potentiis ſollicitantibus horizontalibus iſtiusmodi momenta eliciantur, eaque, ratione habita, vtrum omnia ad eundem effectum producendum conſpirent, an quaedam ſint contraria, in vnam ſummam colligantur, prodibit eiusmodi expreſſio Pa, factum ſcilicet ex pondere quodam in quampiam rectam datam, quod factum exhibebit totale virium momentum, quo motus conuerſionis circa axem EF generabitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

453. Omnes igitur potentiae horizontales exceptis iis, quarum directiones tranſeunt per axem conuerſionis EF, tendent ad nauem circa hunc axem conuertendam, atque actu conuertent, niſi plures eiusmodi potentiae ſe mutuo deſtruant.

Coroll. 2.

454. Quaecunque igitur potentia horizontalis eo maiorem habebit vim ad nauem circa axem verticalem circumagendam, quo maior fuerit tum ipſa vis, tum eius diſtantia ab axe conuerſionis EF, quae diſtantia menſuratur recta horizontali tam ad axem, quam ad directionem potentiae normali.

Coroll. 3.

455. Cum autem nauis quoque a potentiis horizontalibus propellatur, iisdem potentiis, quibus nauis promo- vetur

vetur, nauis etiam circa axem verticalem conuertetur, nisi media directio omnium per ipsum axem transeat.

Coroll. 4.

456. Ne igitur, quae potentiae nauem promouent, eaedem nauem declinent seu circa axem verticalem conuertant, necesse est vt aut singularum potentiarum sollicitantium directiones, aut saltem earum media directio per verticalem e centro grauitatis eductam transeat.

Scholion.

457. In nauibus iste motus conuersionis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem maximi est momenti, eique producendo, quoties opus est, gubernaculum est destinatum, cuius ope nauis si in motu fuerit constituta, tum ad dextram tum ad sinistram potest deflecti. Quoniam enim naues vel exacte vel saltem proxime secundum directionem spinae progredi solent, actione gubernaculi ipse nauis cursus immutatur: scilicet quando conuersio fit ad dextram, tum simul cursus nauis ad dextram hoc est a septentrione versus orientem, vel hinc versus austrum, vel ab austro versus occasum, hincue versus boream deflectitur: in plagas autem contrarias deflectitur cursus, quando conuersio fit ad sinistram: ex his igitur iam intelligitur effectum gubernaculi eo fore maiorem, quo longius id a centro grauitatis remoueatur, quamobrem ipsi etiam in extrema puppi suus assignatus est locus. Praeterea vero etiam eximius est gubernaculi vsus in cursu nauis directo et immutato conseruando, quo opus est quando potentiae sollicitantes simul

 vim

vim habent nauem conuertendi circa axem verticalem, tum enim ope gubernaculi haec vis est destruenda. Ne autem hoc eueniat, quod ingens merito censetur incommodum, in id maxime incumbi solet, vt tam potentiarum sollicitantium media directio per illum axem verticalem transeat, quam resistentia a quae etiam vi careat nauem conuertendi. Quamobrem quo istud incommodum euitetur, tam idoneus malorum locus, quippe quibus vires applicari solent nauem propellentes, diligenter eligendus, quam anterior nauis figura, a qua resistentia eiusque directio pendet, summo studio est determinanda; quae omnia in sequentibus fusius euoluentur. Nunc autem restat, vt ipsum motum rotationis circa axem verticalem determinemus, in quo, quia de resistentia nondum constat, animum ab aquae resistentia omnino abstrahemus; parum autem interest nosse quantum iste motus conuersionis a resistentia aquae retardetur; dummodo enim constet, istum effectum sequi, atque iudicari queat, quomodo se habeat eius celeritas pro variis potentiis sollicitantibus, pro variaque nauium conditione, ad institutum abunde sufficit. Quamobcausam etiam in sequentibus capitibus tantum inuestigabimus, quantum resistentia aquae motum nauis progressiuum retardet, neque erimus solliciti, quantum conuersionem seu deflexionem impediat.

PROPOSITIO 48.
Problema.

458. *Si nauis a potentiis ad motum rotatorium circa axem verticalem incitetur, determinare ipsum motum, quo circa hunc axem conuertetur.*

So-

Solutio.

Ex iis quae ſupra de motu rotatorio circa axem quempiam per centrum grauitatis tranſeuntem definiendo ſunt demonſtrata, intelligitur ad hoc negotium duabus opus eſſe rebus, momento ſcilicet potentiarum reſpectu illius axis ſumto, atque momento materiae ſeu inertiae corporis reſpectu eiusdem axis. Cum igitur in praecedente propoſitione momentum ex omnibus potentiis ſollicitantibus reſultans definire docuerim, quod tendat ad nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum convertendam, quod ſit $= Pa$ facto ſcilicet ex pondere quopiam P in rectam datam a, ſupereſt vt momentum inertiae ſeu materiae totius nauis reſpectu eiusdem axis determinetur, quod inuenietur multiplicando ſingulas nauis particulas per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe illo verticali, quorum productorum aggregatum huiusmodi habebit formam Mb^2, in qua M denotat pondus nauis, b vero rectam longitudine datam. Vis igitur gyratoria, qua nauis actu circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem circumagetur erit $= \frac{Pa}{Mb^2}$, ex qua motum angularem definire licebit. Si nunc ponamus nauem iam tantum habere motum angularem circa axem verticalem, vt punctum quodpiam in diſtantia f ab axe ſitum celeritatem habeat altitudini v debitam, erit, dum illud punctum arculum dx abſoluit $dv = \frac{Pafdx}{Mb^2}$: Hinc integrando fiet $v = \frac{Pafx}{Mb^2}$, vbi x arcum ab illo puncto ab initio motus iam deſcriptum denotat. Sit autem s angulus iam deſcriptus, eſt $s = \frac{x}{f}$; ideoque $\frac{v}{ff} = \frac{Pas}{Mb^2}$. Celeritas igitur angularis iam ac-

acquisita erit $= \frac{\sqrt{v}}{f} = \sqrt{\frac{Pas}{Mb^2}}$; siquidem resistentia aquae animo remoueatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

459. Manente igitur vi conuertente eadem nauis eo facilius circa axem verticalem conuertetur, quo minus fuerit momentum inertiae nauis respectu eiusdem axis.

Coroll. 2.

460. Ista ergo nauis conuersio eo facilius absoluetur, quo propius omnia onera ad axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem collocentur. Contra autem, si omnia onera ab hoc axe maxime fuerint remota, conuersio fiet difficillima.

Coroll. 3.

461. Prout ergo nauis vel facillime conuersionem admittere, vel conuersioni maxime resistere debet, ita inde ratio onerationis respectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti erit petenda.

Coroll. 4.

462. Hinc intelligitur nauem eo citius actioni gubernaculi obsequi, quo propius merces reliquaque onera ad axem verticalem collocentur. Hoc enim pacto momentum inertiae nauis eo minorem obtinebit valorem.

Coroll. 5.

463. Ex ista ergo propositione, si impulsus aquae in gubernaculum fuerit definitus, effectus gubernaculi pro quaque naui facile poterit diiudicari ac determinari.

Scho-

Scholion.

464. Expositi igitur atque definiti sunt quinque effectus; quos potentiae in corpore quocunque aquae innatante producere valent, qui ita a se inuicem sunt disiuncti, vt quisque sine reliquis locum habere queat. Quamobrem si, dum corpus aquae innatans a potentiis quibuscunque sollicitetur, singuli isti quinque effectus determinentur, constabit quomodo corpus a potentiis afficiatur; definitum enim erit primo, quanto corpus magis minusue aquae immergatur, deinde quanta vi ad motum progressiuum et in quanam directione vrgeatur; tertio et quarto cognoscetur, quantum corpus cum circa axem horizontalem longitudinalem inclinetur; ac quinto denique patebit, quanta vi corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertatur. Cum igitur in his quinque effectibus omnis potentiarum actio consistat, hoc caput finiemus; atque ad aquae resistentiam definiendam progrediemur, quippe qua opus est ad ipsum nauium motum determinandum.