b valore assignato $\frac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$ ex quo fit $b^{\frac{2m-2n}{m}} = a^2 c^{\frac{-2n}{m}}$,

prodibit stabilitas $= M\left(\frac{a^2 + \frac{2m}{m+n}c^2}{\frac{4m}{m+2n}c} - b\right)$.

Coroll. 1.

366. Stabilitas igitur haec, si in formula eliminetur a eiusque loco introducatur b hoc modo exprimi potest, vt sit $= M\left(\frac{2n+m}{2n+2m}c + \frac{2n+m}{4m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n-m}{m}} - b\right)$. Ex qua formula datis b et c, radius sectionis aquae sponte determinatur.

Coroll. 2.

367. Manifestum autem est ex istis expressionibus stabilitatem eo fore maiorem, quo minor fuerit fractio $\frac{m}{n}$. Si enim m esset $= 0$, tum stabilitas prodiret infinite magna, nec hic autem casus nec alii finitimi in rerum natura locum inueniunt.

Coroll. 3.

368. Si maneat altitudo b eiusdem quantitatis, stabilitas fiet infinita siue sit $c = 0$ siue $c = \infty$, minima ergo erit stabilitas si fuerit $aa = \frac{2m}{m+n}cc$ siue $c = a\sqrt{\frac{m+n}{2m}}$. In casu ergo parabolae conicae, quo $m = 2$, $n = 1$ stabilitas erit minima si sit $c = a\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Pro-

Propositio 35.
Problema.

Tab. XVIII. fig. 5. 369. *Si corporis aquae insidentis in aequilibrio sectio aquae fuerit ellipsis* ACBD, *determinare stabilitatem huius aequilibrii situs respectu vtriusque axis maioris* CD *et minoris* AB.

Solutio.

Ponatur semiaxis maior $CI = a$; semiaxis minor $IA = b$; erit posita abscissa $IX = x$, et applicata $XY = y$, inter x et y haec aequatio $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Hinc igitur fiet $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3}\int dx(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, quod integrale posito $x = a$, et denotante π peripheriam circuli cuius diameter est $= 1$, abibit in $\frac{3\pi ab^3}{16}$ quod proinde quater sumtum dabit pro tota sectione aquae $\int(y^3 + z^3)dx = \frac{3\pi ab^3}{4}$. Si nunc pondus corporis sit $= M$, volumen partis submersae $= V$, atque GO indicet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit stabilitas corporis respectu axis $CD = M(GO + \frac{\pi ab^3}{4V})$. Commutatis autem inter se semiaxibus a et b prodibit stabilitas respectu axis minoris $AB = M(GO + \frac{\pi a^3 b}{4V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

370. Stabilitas igitur, qua corpus inclinationi circa axem maiorem resistit, minor est quam stabilitas respectu axis minoris. Quare si situs fuerit stabilis respectu axis maioris, eo stabilior erit respectu axis minoris.

Co-

Coroll. 2.

371. Tota ellipſis area eſt $= \pi ab$; ſi ergo ponatur area ellipſis $= E$, erit ſtabilitas reſpectu axis maioris CD $= M(GO + \frac{Eb^2}{4V})$, ſtabilitas vero reſpectu axis minoris AB erit $= M(GO + \frac{Ea^2}{4V})$.

Scholion.

372. Superfluum fore arbitror hanc propoſitionem exemplis illuſtrare, cum ſuperiora exempla pro circulo data huc facillime poſſint accomodari, atque inſuper parum commodi tam ad experimenta inſtituenda, quam ad pleniorem intelligentiam ſequentium deriuari queat. Quamobrem miſſis his, quibus ſectio aquae praecipue ſpectatur, ad varias figuras ipſius partis ſubmerſae conſiderandas progrediar, vbi per calculum ſum inquiſiturus tum in ipſum partis ſubmerſae volumen, tum etiam in eius centrum magnitudinis, quippe quae res praeter ſectionem aquae imprimis ad ſtabilitatem cognoſcendam inſeruiunt. Eiusmodi autem conformationes partis ſubmerſae prae aliis ſum contemplaturus, quae quandam habeant ſimilitudinem cum nauibus reliquisque vaſis, quae ad motum ſuper aqua adhiberi ſolent, quo inde non contemnenda commoda ad nauigationem ſolide tractandam conſequantur. Figuram igitur partis ſubmerſae infra terminatam ponam linea recta horizontali, quae in nauibus ſpina dici conſueuit, et ad quam omnes ſectiones transuerſales verticaliter factae finiuntur. His autem ſectionibus transuerſalibus, quae ſunt verticales et ad ſpinam normales figura partis aquae ſubmerſae determinatur. Quamobrem quomodo tum ex ſe-

ctione aquae, tum ex huius modi ſectionibus transuerſalibus ſtabilitatem definiri oporteat, docebo.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tab. XIX fig. 1. 373. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque AMBMA diametro AB praedita, pars vero ſubmerſa terminetur tum infra ſpina horizontali EF ſub axe AB poſita, tum ad latera parabolis conicis MQ vertices in M et axes horizontales ad AB normales habentibus; inuenire ſtabilitatem corporis talem aequilibrii ſitum in aqua tenentis, reſpectu axis AB.*

Solutio.

Conſideretur ſectio partis ſubmerſae quaecunque MQM verticalis et ad diametrum AB normalis voceturque abſciſſa AP $=x$; MP $=$ MP $=y$; et profunditas conſtans PQ $=$ AE $=c$. Iam ſeorſim contemplemur ſectionem M
fig. 2. QM, in qua curua MQ et MQ ſunt parabolae Appollonianae vertices in M et axem MM communem habentes. Cum nunc ſit PM $=y$ et PQ $=c$, erit parameter vtriusque parabolae $=\frac{c^2}{y}$. Quare ſi dicatur MX $=t$ et XY $=u$, erit $u^2=\frac{c^2t}{y}$; et area MXY $=\frac{2}{3}tu=\frac{2ct}{3}\sqrt{\frac{t}{y}}$, vnde area tota MQM poſito $t=y$ fiet $=\frac{4}{3}cy$. Centrum grauitatis autem o areae MQM reperietur ſumendo integrale $\int\frac{1}{2}uudt$ idque diuidendo per ſudt; eſt vero $\int\frac{1}{2}uudt=\frac{cctt}{4y}$, quod diuiſum per ſudt $=\frac{2ct}{3}\sqrt{\frac{t}{y}}$, dat $\frac{3c}{8}\sqrt{\frac{t}{y}}$ ita vt poſito $t=y$ futurum ſit P$o=\frac{3}{8}c$. Cum igitur omnium ſectionum eiuſmodi MQM centrum grauitatis in eandem a
fig. 1. diametro AB diſtantiam cadat, totius partis ſubmerſae cen-

centrum magnitudinis ſitum erit in O vt ſit $IO = \frac{3}{8}c$. Multiplicetur porro ſectionis MQM area $\frac{4}{3}cy$ per dx, atque integrale $\frac{4}{3}c\int y\,dx = \frac{2}{3}c$. MAM dabit ſoliditatem AEQMM, quamobrem ſi area totius ſectionis aquae AMBM ponatur $= E$; erit ſoliditas partis ſubmerſae $= \frac{2}{3}Ec$. Ponatur nunc pondus totius corporis $= M$, ſitque eius centrum grauitatis G in recta verticali IH per centrum magnitudinis O ducta, erit ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M\left(IG - \frac{3}{8}c + \frac{\int y^3dx}{Ec}\right)$. Eſt enim propoſitione 29 huc traducta $z = y$, atque $V = \frac{2}{3}Ec$. Poſito ergo $IG = b$, erit ſtabilitas quaeſita $= M\left(b - \frac{3}{8}c + \frac{\int y^3dx}{Ec}\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

374. Hinc etiam diſtantia rectae verticalis IH a puncto A inuenietur ſumendo integrale ipſius $\frac{4}{3}cyxdx$, idque diuidendo per $\int\frac{4}{3}cy\,dx$, ita vt futurum ſit $AI = \frac{\int yxdx}{\int y\,dx}$.

Coroll. 2.

375. Ex hac igitur formula perſpicuum eſt rectam HI per ipſum centrum grauitatis ſectionis aquae I eſſe tranſituram, ita vt hoc caſu tria centra grauitatis ſcilicet totius corporis, partis ſubmerſae, et ſectionis aquae in eadem recta verticali ſint ſita.

Coroll. 3.

376. Data ergo pro huiusmodi corporibus ſectione aquae, ex qua tam eius area E quam $\int y^3dx$ innoteſcat, ſtabilitas ſitus aequilibrii facile definiri poterit.

Coroll. 4.

377. Quia ergo in tali corpore centrum grauitatis sectionis aquae I verticaliter imminet centro grauitatis G totius corporis G, inter oscillandum centrum grauitatis neque ascendet neque descendet, et hancobrem motus oscillatorius erit maxime tranquillus.

Scholion.

378. Satis igitur idonea est haec forma parabolica, quae sectionibus nauium transuersalibus tribuatur, cum per eas id commodi acquiratur, vt et centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem incidat, et centrum grauitatis sectionis aquae. Hinc enim euenit, vti supra vidimus, vt dum oscillationes a naue peraguntur, modo sint minimae, centrum grauitatis in quiete permaneat, quod plurimum iuuat ad istum motum maxime tranquillum efficiendum. Non solum autem figura parabolica ad hunc effectum producendum est accommodata, sed praeterea omnes parabolae cuiusque ordinis idem praestant, innumerabilesque aliae curuae, quae ita sunt comparatae vt areae earum MQM proportionales sint ipsis ordinatis MPM sectionis aquae; siquidem spina corporis aquae innatantis est horizontalis. At si tota spina non est linea recta, sed vel tota curua, vel tantum ad proram puppimque sursum erecta, tum peculiaribus opus est curuis ad idem commodum obtinendum. Quamobrem primo parabolas superiorum graduum pro casu, quo tota spina est recta horizontalis, euoluam, ac deinde curuas idoneas ad spinas non rectas inuestigabo.

PRO-

PROPOSITIO 37.
Problema.

379. *Si sectio aquae fuerit curua quaecunque* AMBM *praedita diametro* AB *sub qua in plano verticali existat spina recta horizontalis* EF, *ad quam terminetur pars corporis aquae immersa parabolis cuiusuis ordinis* MQ, *vertices in* M *habentibus, axesque horizontales* MM: *determinare stabilitatem respectu axis* AB. Tab. XIX. fig. 1.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $AE = PQ = c$; consideretur sectio transuersalis MQM seorsim, in qua sumta abscissa MX sit $= t$ et applicata $XY = u$, natura vero huius parabolae exprimatur hac aequatione $u = \frac{t^n}{p^{n-1}}$, existente p parametro. Quia autem facto $t = MP = y$, fit $u = PQ = c$ erit $c = \frac{y^n}{p^{n-1}}$ atque $p^{n-1} = \frac{y^n}{c}$. Area autem MXY erit $= \frac{t^{n+1}}{(n+1)p^{n-1}} = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)y^n}$ vnde totius sectionis MQM prodibit area $= \frac{2cy}{(n+1)}$. Deinde huius sectionis centrum grauitatis situm erit in o vt sit $Po = \frac{\int uudt}{2\int udt}$ posito post integrationem $t = y$. At est $\int u^2 dt = \frac{\int t^{2n} dt}{p^{2n-2}}$ $= \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)p^{2n-2}} = \frac{c^2 t^{2n+1}}{(2n+1)y^{2n}} = \frac{c^2 y}{2n+1}$ posito $t = y$. Quare cum sit $2\int udt = \frac{2cy}{n+1}$; erit $Po = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Cum igitur fig. 2.

tur omnium ſectionum transuerſalium centra grauitatis in eandem rectam horizontalem cadant, partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſitum erit in O, vt ſit $IO = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Capacitas autem partis ſubmerſae erit $= \int \frac{cy\,dx}{n+1} = \frac{c}{n+1}$ in aream AMBMA; ſi ergo ſuperficies ſectionis aquae dicatur $= E$, erit volumen partis ſubmerſae $= \frac{cE}{n+1}$. Sit denique totius corporis centrum grauitatis ſitum in G, vt ſit $IG = b$; atque pondus totius corporis $= M$, erit $GO = b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$, atque in propoſitione generali (298) fiet $\int (y^3 + z^3)\, dx = 2\int y^2 dx$, ob $z = y$, et $V = \frac{cE}{n+1}$. Hinc igitur orietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M\left(b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)} + \frac{2(n+1)\int y^3 dx}{3Ec}\right)$. Q. E. I.

fig. 1.

Coroll. 1.

380. Cum quaeuis ſectio tranſuerſalis MQM proportionalis ſit ordinatae ſectionis aquae MM, perſpicuum eſt centrum grauitatis ſectionis aquae I et centrum magnitudinis partis ſubmerſae O in eandem rectam verticalem IH incidere.

Coroll. 2.

381. Dato igitur in eiusmodi corpore centro grauitatis I ſectionis aquae, ſimul locus centri magnitudinis O innoteſcit; atque in rectam verticalem IOH etiam centrum grauitatis totius corporis G poſitum ſit neceſſe eſt.

Coroll. 3.

382. Si fiat $n = 1$, ſectiones tranſuerſales fient triangula, ac lineae MQ rectae. Hoc igitur caſu erit volumen

lumen partis ſubmerſae $V = \frac{cE}{2}$ atque ſtabilitas prodibit $=$ $M\left(b - \frac{c}{3} + \frac{4\int y^3 dx}{3Ec}\right)$.

Coroll. 4.

383. Sin autem ſit $n < 1$, attamen $n > 0$, curvarum MQ tangentes in M erunt verticales, atque pars ſubmerſa figuram habebit gibbam ſeu conuexam. At ſi $n > 1$ figura fiet concaua.

Coroll. 5.

384. Si ſtabilitas reſpectu cuiuscunque alius axis horizontalis per I tranſeuntis deſideretur in formula, nil erit mutandum, niſi expreſſio $2\int y^3 dx$, quae ad illum axem accommodari debebit. Cetera enim omnia non pendent a poſitione axis aſſumti AB.

Scholion.

385. Eadem proprietas, quam habent tum conicae parabolae tum omnes reliquae cuiusque ordinis, competit in innumerabiles alias curuas, quae id circo eodem ſucceſſu ſectionibus transuerſalibus MQ tribui poterunt. Omnes enim curuae eodem modo ſatisfaciunt, quae ita ſunt comparatae, vt earum areae MQM quae aequalibus abſciſſis reſpondent, ipſis ordinatis MM ſint proportionales, quippe ex quo fit, vt partis ſubmerſae centrum magnitudinis O verticaliter infra centrum grauitatis I ſectionis aquae cadat. Pro his igitur curuis aequatio inter u et t ita debet eſſe comparata, vt primo fiat $u = 0$, facto $t = 0$, atque vt deinde fiat $u = c$ poſito $t = y$. Tertio

vero

vero area $\int u\,dt$, si ponatur $t = y$, talem formam induere debebit $\frac{mcy}{n}$. Haec autem requisita sequenti modo impetrabuntur: In genere sit T functio quaecunque nullius dimensionis ipsarum $t = y$, seu functio quaecunque ipsius $\frac{t}{y}$ quae euanescat facto $t = 0$. Haec ergo functio T posito $t = y$ abibit in numerum constantem, qui sit n, quo facto exhibebit ista aequatio $u = \frac{cT}{n}$ curuam quaesito satisfacientem. Namque facto $t = 0$, erit $u = 0$, atque posito $t = y$ fit $u = c$. Denique erit $\int u\,dt = \int \frac{cT\,dt}{n} = \frac{cy}{n}\int \frac{T\,dt}{y}$. At $\int \frac{T\,dt}{y}$ dabit functionem ipsius $\frac{t}{y}$, quae ideo abibit in numerum constantem puta m facto $t = y$; vnde area sectionis transuersalis MQM orietur $= \frac{2mcy}{n}$. Praeterea vero etiam interuallum Po, quo centrum grauitatis o sectionis transuersalis cuiusuis sub horizontem cadit erit constans: Cum enim sit $Po = \frac{\int uu\,dt}{2\int u\,dt}$ posito post integrationem $t = y$; erit $\int uu\,dt = \frac{cc}{nn}\int T^2 dt = \frac{c^2 y}{nn}\int \frac{T\,dt}{y}$. Sed $\int \frac{T^2 dt}{y}$, dabit functionem ipsius $\frac{t}{y}$, quae facto $t = y$ abibit in numerum constantem, qui sit K, ita vt sit $\int uu\,dt = \frac{Kc^2 y}{nn}$, quae expressio diuisa per $2\int u\,dt = \frac{2mcy}{n}$ dabit $Po = \frac{Kc}{2mn}$, cui expressioni consequenter aequale quoque est interuallum IO.

PROPOSITIO 38.
Problema.

Tab XIX. fig. 3. 386. *Sit sectio aquae curua quaecunque AMBMA praedita diametro AB, sub qua in plano verticali pars submersa terminetur ad spinam* EHF *vtcunque curuilineam, in-*

inuenire figuram idoneam pro sectionibus transuersalibus, vt centrum magnitudinis partis submersae O *verticaliter infra centrum grauitatis sectionis aquae* I *cadat.*

Solutio.

Positis AP$=x$; PM$=$PM$=y$, et PQ$=z$; dabitur ob sectionem aquae datam y per x; et ob figuram spinae EHF pariter datam etiam z per x. Quaesito autem commodissime satisfiet, si singulis sectionibus transversalibus MQM eiusmodi figura tribuatur, vt earum areae fiant proportionales ordinatis MM seu ipsis y. Ad hoc efficiendum ducta in sectione transuersali applicata quacunque XY, sit MX$=t$ et XY$=u$, atque assumatur ad naturam curuae MQ exprimendam indefinita ista aequatio $u=\frac{At^{n-1}}{y^{n-1}}+\frac{Bt^{m-1}}{y^{m-1}}+\frac{Ct^{k-1}}{y^{k-1}}$, in qua n, m, et k sint numeri vnitate maiores, quo facto $t=0$ fiat $u=0$. Nunc quia facto $t=y$, fieri debet $u=z$, erit $z=A+B+C$. Porro quaeratur area $\int u\,dt$, quae erit $=\frac{At^n}{ny^{n-1}}+\frac{Bt^m}{my^{m-1}}+\frac{Ct^k}{ky^{k-1}}$; quae cum posito $t=y$, fieri debeat ipsi y proportionalis, ponatur $=cy$, habebiturque $c=\frac{A}{n}+\frac{B}{m}+\frac{C}{k}$. Ex his conditionibus consequitur $B=\frac{kmnc-mnz-m(k-n)A}{n(k-m)}$; atque $C=\frac{knz-kmnc+k(m-n)A}{n(k-m)}$; quamobrem pro curua quaesita sequens habebitur aequatio: $u=\frac{At^{n-1}}{y^{n-1}}+\frac{(kmnc-mnz-m(k-n)A)t^{m-1}}{n(k-m)y^{m-1}}-\frac{(kmnc-knz-k(m-n)A)t^{k-1}}{n(k-m)y^{k-1}}$; in qua praeter exponentes k, m, n quantitatem A pro arbitrio

X

bitrio aſſumere licet. In quantitate autem A eligenda, ad hoc praecipue attendi oportebit, vt applicata u continuo creſcat, ab M ad Q progrediendo, atque vt inter puncta M et Q curua ſit vbique conuexa, ſeu vt $\frac{du}{dt}$ continuo decreſcat, prius autem aſſequemur ſi $\frac{du}{dt}$ ab M vsque ad Q affirmatiuum valorem retineat; atque adeo in Q ſit affirmatiuum. In Q vero erit $\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}$ $((n-1)A + \frac{(m-1)}{n(k-m)}(kmnc - mnz - m(k-n)A) - \frac{(k-1)}{n(k-m)}(kmnc - knz - k(m-n)A) = \frac{1}{y}(\frac{(m-n)(k-n)}{n}A - kmc + (k+m-1)z)$. Quare eſſe debebit $A > \frac{kmnc}{(m-n)(k-n)}$ quo $\frac{du}{dt}$ maneat affirmatiuum, etiamſi z fiat minimum. At ſi aliae circumſtantiae non admittant, vt ſingulis ſectionibus transuerſalibus eiusmodi figura inducatur, tum quanto ex vna parte puncti I ſectiones transuerſales iuſto vel maiores vel minores fuerint, tanto quoque vel maiores vel minores ex altera parte fieri debebunt, vt nihilominus centrum magnitudinis partis ſubmerſae in rectam IH incidat. Q. E. I.

Coroll. 1.

387. Si numerorum n, m, et k ponatur n minimus, m medius et k maximus, ex numero n cognoſcetur poſitio tangentis ſectionum transuerſalium in M. Nam ſi $n-1$ fuerit > 1 tum tangens erit horizontalis, ſin $n-1$ < 1 verticalis, at ſi $n=2$ tum angulus erit obliquus.

Coroll. 2.

388. Si ergo ponatur $n = \frac{3}{2}$; tangens in M non ſolum fiet verticalis, ſed etiam radius oſculi in M erit finitus. Quare ſi porro ponatur $m = \frac{5}{2}$ et $k = \frac{7}{2}$ habebitur

pro

pro curua haec aequatio $u = \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{y}} + \frac{(105c - 70z - 40A)}{12} \frac{t\sqrt{t}}{y\sqrt{y}} - \frac{(105c - 42z - 28A)}{12} \frac{t^2\sqrt{t}}{y^2\sqrt{y}}$.

Coroll. 3.

389. Quia esse debet $A > \frac{Kmnc}{(m-n)(k-n)} - \frac{n(k+m-1)z}{(m-n)(k-n)}$. Videamus an salua hac conditione tertius terminus C possit euanescere; hinc autem fit $A = \frac{mnc - nz}{m-n}$. Debebit ergo esse $(m+n-1)z > mnc$.

Coroll. 4.

390. Quando ergo spina ita est comparata vt z ad o usque decrescat, tum non poterit esse vbique $(m+n-1)z > mnc$. et hancobrem his casibus trinomia functione ipsius t ad u designandum vti oportebit.

Scholion.

391. Perspicuum autem est eiusmodi occurrere posse casus, quibus z tam diuersorum capax sit valorum, vt area sectionum transuersalium ipsi y soli omnino non proportionalis reddi queat; siquidem figurae non admodum dissimiles desiderentur earum, quae in nauibus adhiberi solent. Nam vel vbi altitudo z maior existit, ibi transversalis nimium coarctata esse deberet, vel vbi z vehementer sit diminuta, ibi area sectionis tanta esse deberet, vt limitibus praescriptis contineri non posset. Eiusmodi igitur casibus eam medelam affere conueniret, cuius in solutione mentionem feci, vt sectiones transuersales, quae per regulam nimis deformes prodirent, vel augeantur vel

 minu-

minuantur ex vtraque parte aequaliter, quo locus centri grauitatis communis conferuetur. At ne tali fcientiae minus conueniente correctione fit opus, praeftabit tum figuram fectionis aquae, tum fpinae ad formam fectionum transuerfalium idoneam accomodare. Quem in finem pono fectionum transuerfalium areas tenere rationem compofitam amplitudinum in fectione aquae et profunditatum, feu effe vbique vt yz; namque hoc pofito quae figura vno cafu erit apta ad praxin, eadem locum habebit in omnibus reliquis. Eiusmodi autem curuae hac proprietate praeditae pro fectionibus transuerfalibus innumerabiles exhiberi poffunt, quae omnes fequenti aequatione generali continentur, fit T functio quaecunque ipfius $\frac{t}{y}$ euanefcens pofito $t = 0$; quae facto $t = y$ abeat in numerum conftantem n. tum fiat $u = \frac{zT}{n}$. Ex hac enim aequatione fit $u = 0$, fi $t = 0$ et $u = z$ fi $t = y$; ac denique erit fud$t = \frac{\int zTdy}{n} = \frac{zy}{n}\int\frac{Tdy}{y}$; at $\int\frac{Tdy}{y}$ facto $t = y$ abit in numerum conftatem m ita vt area tota fiat $= \frac{2m^2yz}{n}$.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tab. XIX. fig. 3. 392. *Si areae fectionum trausuerfalium* MQM *fuerint in ratione compofita bafium* MM *et profunditatum* PQ; *inuenire tum pro fectione aquae* AMBM *tum pro fpina* EHF *figuras idoneas, ut centra grauitatis fectionis aquae* I *et voluminis partis fubmerfae* O *in eandem rectam verticalem* IH *incidant.*

So-

Solutio.

Sit longitudo diametri ſectionis aquae $AB = a$; et quoniam partes ſectionis aquae vtrinque circa AB ſimiles et aequales eſſe debent, atque curuam AMBM vbique concauam verſus AB eſſe conuenit, ſumatur pro ea iſta aequatio $y = (A + Bx)\sqrt{(ax - xx)}$. At vero pro ſpina accipiatur haec aequatio $z = \frac{(\alpha + \beta x)(ax - xx)}{A + Bx}$, quo ea tam in A quam in B ſectioni aquae occurat, idque ſub obliquis angulis, prout in nauibus fieri ſolet. Hic ſcilicet poſitum eſt vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $PQ = z$. Quo nunc puncta I et O in eandem rectam verticalem incidant, debet poſt integrationem peractam facto $x = a$ fieri $\frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{\int yzxdx}{\int yzdx}$: ad haec integralia autem capienda ſaltem pro caſu $x = a$ inſeruiet hoc theorema vi cuius eſt $\int (1 + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \text{etc.})\, dx(ax - xx)^n = (1 + \frac{(n+1)Ka}{(2n+2)} + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} La^2 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} Ma^3 + \text{etc.}) \int dx(ax - xx)^n$. Hinc igitur erit $\frac{\int yxdx}{\int ydx} =$

$$\frac{\int (Ax + Bx^2)\, dx \sqrt{(ax - xx)}}{\int (A + Bx)\, dx \sqrt{(ax - xx)}} = \frac{\frac{1}{2} Aa + \frac{5}{16} Ba^2}{A + \frac{1}{2} Ba} = A\,I.$$

At cum ſit $yz = (\alpha + \beta x)(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; erit $\frac{\int yzxdx}{\int yzdx} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha a + \frac{7}{24}\beta a^2}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a}.$$

Qui valores inter ſe aequati dant

$$\frac{A + \frac{5}{8} Ba}{A + \frac{1}{2} Ba} = \frac{\alpha + \frac{7}{12}\beta a}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a},$$

vnde fit $B\beta a = 4A\beta - 6B\alpha$; ſeu $\beta = \frac{6B\alpha}{4A - Ba}$. Quamobrem ſi pro ſectione aquae aſſumatur haec aequatio $y = (m + \frac{nx}{a})\sqrt{(ax - xx)}$, tum pro

 ſpina

ſpina aſſumenda erit aequatio haec:

$$z = \frac{k((4m-n)a+6nx)(ax-xx)}{(4m-n)a(ma+nx)}.$$ Q. E. I.

Coroll. 1.

393. Cum ſit $AI = \frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2}{A + \frac{1}{2}Ba}$ ob $A = m$ et $B = \frac{n}{a}$ erit $AI = \frac{a(\frac{1}{2}m + \frac{5}{16}n)}{m + \frac{1}{2}n}$. Quamobrem habebitur $AI = \frac{1}{2}a + \frac{na}{16m+8n}$. Quoties igitur n eſt numerus affirmatiuus ſeu m et n numeri eiusdem ſigni, erit $AI > \frac{1}{2}AB$.

Coroll. 2.

394. Si $n = 0$, fiet aequatio pro ſectione aquae $y = m\sqrt{(ax-xx)}$, quo ergo caſu ſectio aquae erit ellipſis, cui figura ſpinae, reſpondet $z = \frac{K}{ma}(ax-xx)$, quae ideo erit parabola. Hoc autem caſu punctum I in medium rectae AB incidit.

Coroll. 3.

395. Si ponatur $m = 0$, quo ſectio aquae hac aequatione exprimatur $y = \frac{nx}{a}\sqrt{(ax-xx)}$ erit figura ſpinae $z = \frac{K(a-6x)(a-x)}{na}$, quae autem figura eſt inepta, ob $z = 0$, ſi eſt $x = \frac{1}{6}a$.

Coroll. 4.

396. Ne igitur alicubi inter A et B fiat $z = 0$ neceſſe eſt vt ſit $a + \frac{6nx}{4m-n} > 0$, ſi quidem x inter limites 0 et a continetur. Fit autem $a + \frac{6nx}{4m-n} = 0$ ſi eſt

$x =$

$x = \frac{a(n-4m)}{6n}$; quare $\frac{n-4m}{6n}$ vel minus esse debet quam 0, vel maius quam I.

Coroll. 5.

397. Fiat $n = 4m$, qui casus id habet singulare, quod cum sit pro sectione aquae $y = (m + \frac{4mx}{a}) \sqrt{(ax-xx)}$, fiat pro spina $z = \frac{Kxx(a-x)}{a(a+4x)}$ cuius igitur tangens in A erit horizontalis. At interuallum AI prodit $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}a = \frac{7}{12}a$.

Scholion 1.

398. Propositio haec latissime patet, atque omnes fere figuras, quae vulgo in constructione nauium adhiberi solent, in se complectitur. Est enim ad infinitas figuras sectionum transuersalium accomodata, prout ex §. 391 videre licet, atque insuper innumerabiles in se continet figuras sectionum aquae ab vsu non abhorentes; ita vt ex ea tam de constructione nauium iudicari, quam nouae nauium formae idoneae inueniri queant, quae quidem hactenus expositis principiis sint consentaneae. Latiore quidem sensu, si opus fuisset, solutionem adornare potuissemus, si pro sectione aquae eiusmodi aequationem $y = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) \sqrt{(ax-xx)}$, pro spina vero hanc aequationem $z = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})(ax - xx)}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}$ assumsissemus; tum enim in figura spinae plures litterae indeterminatae relictae fuissent, quarum determinatione multo plures figurae produci potuissent. Prodiisset autem haec aequatio figuram spinae ad datam sectionem aquae accommodans

$$\frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2 + \frac{7}{32}Ca^3 + \frac{21}{128}Da^4 + \text{etc.}}{A + \frac{1}{2}Ba + \frac{5}{16}Ca^2 + \frac{7}{32}Da^3 + \text{etc.}} = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{\frac{1}{3}\alpha a + \frac{7}{24}\beta a^2 + \frac{3}{16}\gamma a^3 + \frac{33}{256}\delta a^4 + \text{etc.}}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a + \frac{7}{24}\gamma a^2 + \frac{3}{16}\delta a^3 + \text{etc.}} = A\,I.$$

Ex qua innumeris modis relatio coefficientium A, B, C, D etc. atque α, β, γ, δ etc. definiri poteſt.

Scholion 2.

399. Satis iam fuſe in iſto capite omnia, quae ad ſtabilitatem corporum aquae in quopiam aequilibrii ſitu inſidentium, cognoſcendam et diiudicandam pertinent, explanaſſe mihi videor, neque quicquam deeſſe videtur, quod in hac doctrina amplius deſiderari poſſit. Quamobrem huic capiti finem imponam eo progreſſurus quo ea, quae hic tractata ſunt, magnam afferent vtilitatem. In ſequente enim capite in effectum propius inquiram, quem vires quaecunque nauem ſeu corpus aquae innatans quodcunque ſollicitantes producant quo intelligatur, quid tam vis venti et remorum, quam gubernaculum et alliſio aquae ipſius in naue efficiant. Cum autem motus progreſſiuus ipſe ſine calculo reſiſtentiae cognoſci nequeat, quem in quinto denique capite plenius exponere conſtitui, hic tantum ſollicitationem ad iſtum motum et accelerationem momentaneam conſideraſſe contentus ero. In hoc vero praecipue incumbam, vt quantum quaeuis potentiae nauem ex ſitu aequilibrii deturbent, accurate definiam, atque in hunc finem ad tres ſupra memoratos axes, quos in quaque naui concipere licet, imprimis reſpiciam: circa quos omnis inclinatio et declinatio fieri cenſenda eſt.

CAPVT