enim inclinatorius circa quemuis alium axem ſpectari poteſt tanquam compoſitus ex duobus motibus inclinatoriis circa illos axes inuicem normales, pro quorum vtroque ſi ſtabilitas fuerit cognita, inde ſtabilitas reſpectu alius cuiusque axis poterit colligi. Quemadmodum igitur pro quouis aequilibrii ſitu in corpore quocunque aquae innatante ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis horizontalis debeat inveſtigari, in ſequente propoſitione docebitur.

PROPOSITIO 28.

Problema.

290. *Corporis* ACFDB *aquae in aequilibrio inſidentis determinare ſtabilitatem reſpectu axis dati horizontalis* cd *per centrum grauitatis corporis* G *tranſeuntis, atque motum oſcillatorium cuius corpus circa hunc axem eſt capax.* Tab. XV. fig. 3.

Solutio.

Sit ACBD ſectio aquae, et AFB pars corporis aquae immerſa, cuius centrum magnitudinis O ſitum erit in recta verticali EF per centrum grauitatis corporis G tranſeunte, eo quod corpus in aequilibrio eſt poſitum. Sit totius corporis maſſa ſeu pondus $= M$, eiusque partis ſubmerſae ſoliditas ſeu volumen $= V$, atque momentum inertiae totius corporis reſpectu axis $\underline{c}\,\underline{d} = S$. Concipiatur nunc corpus pauliſper inclinari circa axem $\underline{c}\,\underline{d}$ centro grauitatis interea vel aſcendente vel deſcendente, quo aequalis pars aquae maneat immerſa. Fiat vero inclinatio per angulum infinite paruum $\underline{dw}$, poſito ſinu toto $= 1$; atque poſt hanc inclinationem ſit $aCbD$ ſectio aquae

prio-

priorem aquae sectionem secans recta CD, parallela axi cd, eritque angulus, quem haec noua sectio aquae cum priore constituit pariter $= dw$. Quia autem vtroque casu aequale corporis volumen sub aqua versatur, erit segmentum $ACDa$ aequale segmento $BCDb$. Ponatur areae ACD centrum grauitatis in p, areae autem BCD centrum grauitatis in q, atque ex p et q in CD ducantur perpendiculares pr et qs, erit soliditas segmenti $ACDa$ $= ACD.\ pr.\ dw$, segmenti vero $BCDb$ soliditas erit $=$ $BCD.\ qs.\ dw$; hinc igitur habebitur $ACD.\ pr = BCD.\ qs$. Praeterea ipsius segmenti $ACDa$ centrum magnitudinis cadat in P, segmenti vero $BCDb$ in Q, atque ex P et Q in CD ducantur normales PR et QS.

Iam per punctum O ducatur ad planum $aCbD$ perpendicularis eOg, quae in situ corporis inclinato erit verticalis, atque tum ex G in hanc rectam, tum ex e per E in CD ducantur normales Gg et eEH, erit $Gg =$ $GO.dw$ et $Ee = EO.dw$. Quo igitur vim inueniamus qua corpus ex situ hoc inclinato in pristinum situm aequilibrii restituitur, pars corporis aquae immersa est consideranda quae est $= ACFDB + ACDa - BCDb$, ex quibus singulis membris vires sunt definiendae ad corpus restituendum, vel conuertendum circa axem cd. Pressionis autem aquae, quam pars ACFDB sustinet, momentum ad corpus restituendum est $= M.\ Gg = M.\ GO.\ dw$. Nunc fiat vt V ad $ACDa$ ita pondus M ad vim ex segmento $ACDa$ ortam, quae proinde erit $= \frac{M \cdot ACDa}{V} = \frac{M \cdot ACD.\ pr.\ dw}{V}$, quae expressio pariter valebit pro pressione aquae in segmentum $BCDb$. Cum autem segmenti $ACDa$ centrum

trum magnitudinis sit in P, erit momentum inde oriundum ad corpus restituendum $= \frac{M.ACD.pr.dw}{V}(PR + He + Gg)$; momentum vero ortum ex vi segmenti BCDb tendet ad subuersionem, eritque adeo negatiuum et $= \frac{-M.ACD.pr.dw}{V}(QS - He - Gg)$. Horum trium momentorum duo priora sunt addenda et a summa postremum subtrahendum, quo facto prodibit momentum totale ad restitutionem corporis in pristinum aequilibrii situm tendens $= M\,dw(GO + \frac{ACD.pr}{V}(PR + QS))$; quod diuisum per angulum inclinationis dw dabit stabilitatem huius aequilibrii situs respectu axis $cd = M(GO + \frac{ACD.pr(PR+QS)}{V})$. Diuidatur per hanc stabilitatis expressionem momentum materiae seu inertiae totius corporis respectu axis cd, quod est S, et prodibit longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus corporis sese circa axem cd in aequilibrium restituentis quae penduli longitudo proinde erit $= \frac{SV}{M(G.O + ACD.pr(PR+QS))}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

291. Quia est ACD. pr = BCD. qs atque p et q sunt centra grauitatis arearum ACD et BCD, sequitur rectam CD transire per centrum grauitatis sectionis aquae ACBD.

Coroll. 2.

292. Si ergo sectionis aquae ACBD centrum grauitatis repertum fuerit in I, atque stabilitas huius aequilibrii situs requiratur respectu axis cd, tum in sectione aquae ACBD per centrum grauitatis I ducatur recta parallela CD ipsi axi cd, qua inuenta stabilitas desiderata per calculum innotescet.

Coroll. 3.

293. Quemadmodum autem p et q ſunt centra grauitatis partium ACD et BCD ſectionis aquae, ita intelligere licet puncta P et Q eſſe centra oſcillationis earundem partium circa axem CD oſcillantium.

Coroll. 4.

294. Poſtquam igitur ſectio aquae recta per centrum grauitatis tranſeunte diuiſa eſt in duas partes, vtriusque partis tam centrum grauitatis quam centrum oſcillationis debet indagari, quo facto ſine vllo ad angulum inclinationis dw habito reſpectu ſtabilitas deſiderata poterit inueniri.

Coroll. 5.

295. Quoniam inter oſcillandum centrum grauitatis totius corporis G recta vel aſcendit vel deſcendit, vt perpetuo debita corporis pars maneat aquae ſubmerſa; perſpicuum eſt huiusmodi motum centri grauitatis fore minimum, ſi recta verticalis per centrum grauitatis totius corporis tranſiens ſimul per centrum grauitatis ſectionis aquae transeat.

Coroll. 6.

296. Intelligitur ceterum quo maior ſit expreſſio $M\left(GO + \frac{ACD \cdot pr(PR + QS)}{V}\right)$, eo firmius corpus in ſuo aequilibrii ſitu eſſe permanſurum, ſi ſcilicet circa axem cd ad inclinandum ſollicitetur; ſin autem haec expreſſio fiat negatiua, tum corpus minime declinatum iri ſubuerſum.

Sholion

Scholion.

297. Determinata igitur eſt ſatis commode et concinne ſtabilitas, qua vnumquodque corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtit, id quod primo intuitu ſummopere difficile videri potuiſſet. Praeterea etiam ea regula eſt perquam ſimplex et facilis, cuius ope ipſae oſcillationes, quas corpus ex ſitu aequilibrii depulſum ſeſe reſtituens abſoluit, quo ipſo dignitas et vtilitas huius theoriae abunde intelligitur; facile enim erit hinc inſignia commoda ad nauigationem deriuare, quod fieri non potuiſſet, ſi enodatio harum propoſitionum ad inextricabiles calculos deducta fuiſſet. Quae autem ad ſtabilitatem determinandam pro quoque corpore noſſe oportet, ſunt praeter pondus totius corporis a quo quantitas partis ſubmerſae pendet, interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae atque imprimis ſectio aquae quae ad hoc negotium calculo eſt ſubiicienda. Sectiones igitur aquae variarum figurarum conueniet conſiderari, atque eas expreſſiones, quas ad ſtabilitatem definiendam noſſe oportet, definiri quo poſt modum facilius ſit de quoque corpore aquae innatante iudicium ferre. Hunc infinem in ſequente propoſitione inuentam expreſſionem calculo analytico ſum perſecuturus.

PROPOSITIO 29.
Problema.

Tab. XVI. fig. 1.

298. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque* ACBD, *cuius natura per aequationem eſt data, definire ſtabilitatem corporis aquae inſidentis reſpectu axis cuiusuis, per calculum analyticum.*

Solutio

Solutio.

Sit M. massa seu pondus corporis aquae insidentis, et V volumen partis submersae, atque Go exprimat interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis submersae, posito centro grauitatis G in loco humiliore; posito enim centro grauitatis G supra centrum magnitudinis O tum loco $+GO$ scribi debet $-GO$. Iam per centrum grauitatis sectionis aquae ducta sit recta CD parallela illi axi, cuius respectu stabilitas quaeritur; et ad hanc rectam tanquam axem referantur orthogonaliter ordinatae YXZ, ponaturque $GX = x$; $XY = y$; et $XZ = z$. Sint porro p et q centra grauitatis arearum CAD et CBD, atque P et Q earundem centra oscillationis respectu axis CD; et ex his punctis ad axem CD ducantur normales pr, qs, PR et QS. His positis erit $pr = \frac{\int yydx}{2\int ydx}$; $qs = \frac{\int zzdx}{2\int zdx}$; atque $PR = \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx}$ et $QS = \frac{2\int z^3dx}{3\int zzdx}$ integralibus his ita acceptis vt euanescant posito $x = 0$; atque tum loco x posito CD. Ita exprimet $\int ydx$ aream CAD, atque $\int zdx$ aream CBD. Quia vero est $CAD.pr = CBD.qr$, erit $\int yydx = \int zzdx$. ob $ACD.pr = \frac{1}{2}\int yydx$ et $CBD.qr = \frac{1}{2}\int zzdx$. Denique autem habebitur $PR + QS = \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx} + \frac{2\int z^3dx}{3\int z^2dx} = \frac{2\int(y^3+z^3)dx}{3\int y^2dx}$; quibus in formula supra inuenta substitutis reperietur stabilitas corporis in isto aequilibrii situ $= M(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V})$.

Coroll. 1.

299. Ad stabilitatem igitur obtinendam ope calculi integralis sumendum est integrale formulae $\int(y^3+z^3)dx$, ita

ta vt euanefcat pofitis $x = 0$, atque poft integrationem peractam, poni debet $x = CD$.

Coroll. 2.

300. Si recta CD fectionem aquae in duas partes fimiles et aequales diuidat, erit vbique $z = y$ hoc ergo cafu ftabilitas erit $= M(GO + \frac{3\int y^3 dx}{3V})$.

Coroll. 3.

301. Si centrum grauitatis totius corporis G fupra centrum magnitudinis O partis fubmerfae cadat, tum interuallum GO negatiue accipi oportet, eritque his cafibus ftabilitas $= M(\frac{\int (y^3 + z^3) dx}{3V} - GO)$.

Coroll. 4.

302. Nifi ergo G fupra O cadat, aequilibrii fitus refpectu omnium axium erit ftabilis; quia $\int (y^3 + z^3) dx$ femper affirmatiuum tenet valorem. At exiftente puncto G magis eleuato quam O, tum fieri poteft, vt fitus aequilibrii fit inftabilis, id quod accidit fi fuerit $GO > \frac{\int (y^3 + z^3) dx}{3V}$.

Scholion.

303. Quo autem has formulas eo facilius ad varia corporum aquae innatantium genera accommodare liceat, figuras nonnullas determinatas loco fectionis aquae ACBD fubftituam, et quomodo fe habeat ftabilitas eiusmodi corporum aquae infidentium inueftigabo. Non folum autem ftabilitatem refpectu vnici axis determinabo, fed refpectu binorum inter fe normalium, quo ex hac duplici ftabilitate

tate respectu cuiusuis alius axis stabilitas possit aestimari. In hunc finem eiusmodi elegi figuras, quae vel in nauigatione locum habeant, vel etiam ad experimenta instituenda sint maxime accomodatae, vt tam vsus quam vtilitas huius theoriae clarissime ob oculos ponatur. Huic igitur negotio absoluendo sequentes destinaui propositiones, quibus institutum huius capitis penitus exhaurietur.

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tab. XVI. fig. 2. 304. *Si corporis aquae insidentis sectio aquae fuerit parallelogrammum rectangulum* EFHK, *inuenire eius stabilitatem tum respectu axis* CD, *tum axis ad hunc normalis* AB.

Solutio.

Consideretur primo axis CD parallelus lateribus EF et KH, sitque $EF = KH = A$; $EK = B$, et massa seu pondus corporis $= M$, volumenque partis submersae $= V$. Ponatur $CX = x$ erit $XY = XZ = y = z = \frac{1}{2}B$. Ergo $\int y^3 dx = \frac{B^3 x}{8}$ et $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{B^3 x}{4} = \frac{A \cdot B^3}{4}$ sumto integrali per totum axem CD. Erit igitur stabilitas respectu axis $CD = M(GO + \frac{A \cdot B^3}{12 V})$. Simili autem modo stabilitas respectu alterius axis AB erit $= M(GO + \frac{A^3 \cdot B}{12 V})$. Q. E. I.

Coroll. I.

305. Si ergo tam $GO + \frac{A \cdot B^3}{12 V}$ quam $GO + \frac{A^3 \cdot B}{12 V}$ fuerint quantitates affirmatiuae, tum situs aequilibrii corporis erit stabilis respectu cuiusuis axis alius.

Coroll.

Coroll. 2.

306. Stabilitas igitur respectu axis CD eo erit maior, quo maius fuerit latus EK=B; atque semper stabilitas erit maxima respectu axis breuioris, quod quidem per se est planum.

Scholion.

307. Si pari modo per integrationem computetur stabilitas respectu diagonalis alterutrius EH vel FK tum reperietur $\int(y^3+z^3)\,dx = \frac{A^3 \cdot B^3}{2(A^2+B^2)}$. Atque ipsa stabilitas corporis respectu huius axis erit $= M\left(GO + \frac{A^3 \cdot B^3}{6V(A^2+B^2)}\right)$. Quae expressio media est inter expressiones ante inuentas pro axibus CD et AB. Atque si fuerit A=B tum stabilitas erit aequalis tam respectu axium AB et CD quam respectu diagonalium. Ex quo facilius intelligitur, ad statum corporum aquae innatantium cognoscendum sufficere stabilitatem respectu duorum axium inter se normalium determinasse. Eiusmodi autem bini axes sunt accipiendi, qui in sectione aquae sunt praecipui, et quorum alter maximam alter vero minimam habeat stabilitatem, quemadmodum in casu proposito fecimus.

Exemplum 1.

308. Si totum corpus fuerit parallelepipedum MPQ NRTVS aquae ita insidens, vt EKHF sit sectio aquae; atque pondus eius se habeat ad aequalis voluminis aquei pondus vt p ad q. Deinde sit longitudo MN$=a$; latitudo MP$=b$; et altitudo PT$=c$; erit in sectione aquae A$=a$ et B$=b$. Habebitur autem ex statu aequilibrii $q:p=$PT(c):KT, vnde est KT$=\frac{pc}{q}$; atque volumen Tab. XVI. fig. 3.

R 2 partis

partis ſubmerſae $= \frac{pabc}{q} = V$; cuius centrum magnitudinis O cadet in medio inter I et L rectae verticalis WL per medium parallelepipedi ductae, ita vt ſit $LO = \frac{pc}{2q}$. Quoniam vero hic ſitus aequilibrio praeditus ponitur, neceſſe eſt, vt centrum grauitatis totius corporis cadat in eandem rectam verticalem LW; ſit ergo in G, exiſtente $LG = b$, erit $GO = \frac{pc}{2q} - b$. His igitur ſubſtitutis erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis CD, qua inclinationi circa hunc axem reſiſtitur $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qb^2}{12pc}\right)$, ſtabilitas vero reſpectu axis latitudinalis AB erit $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qa^2}{12pc}\right)$ in quibus expreſſionibus littera M denotat pondus parallelepipedi, atque p ad q rationem grauitatis ſpecificae corporis ad aquam. Ex his igitur formulis ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu cuiusuis axis colligi poterit.

Coroll. 1.

309. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, oportet eſſe tam $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ quam $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{12pc}$. Si ergo ſit $a > b$, dum modo fuerit $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ ſitus aequilibrii reſpectu omnium axium erit ſtabilis.

Coroll. 2.

310. Si parallelepipedum conſtet ex materia vniformi, tum eius centrum grauitatis G cadet in medio inter L et W, eritque $b = \frac{1}{2}$. Hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= M\left(\frac{qb^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$ reſpectu axis CD. Reſpectu vero alterius axis AB erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$.

Coroll.

Coroll. 3.

311. Sit basis parallelepipedi quadratum seu $a = b$; erit stabilitas $= M \left(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right.$. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis, necesse est vt sit $c < \frac{qa}{\sqrt{6p(q-p)}}$.

Exemplum 2.

Tab. XVI. fig. 4.

312. Sit corpus aquae innatans cuneiforme MRPQSN aquae in situ erecto insidens vt sectio aquae EKHF sit rectangulum basi MPQN parallelum. Pondus autem huius corporis se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Ponatur $MN = PQ = a$; $MP = NQ = b$; atque altitudo cunei WL sit $= c$; in qua recta verticali WL ambo centra tam grauitatis G quam magnitudinis O sint sita, atque $LG = h$. Iam manentibus $EF = KH = A$; $EK = FH = B$ erit $A : B = a : b$ atque $A : A = WL\,(c) : IL$; vnde fiet $IL = \frac{Ac}{a}$. At ex grauitate specifica sequitur $q : p = b^2 : B^2$, vnde prodit $B = b\sqrt{\frac{p}{q}}$; atque $A = a\sqrt{\frac{p}{q}}$ et $IL = c\sqrt{\frac{p}{q}}$. Ex his reperietur $LO = \frac{2}{3} LI = \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{p}{q}}$, atque $GO = \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{p}{q}} - h$. Volumen denique partis submersae V erit $= \frac{ABc}{2} \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{abcp\sqrt{p}}{2q\sqrt{q}}$. Quibus valoribus substitutis emerget stabilitas respectu axis $CD = M\left(\frac{2}{3} c \sqrt{\frac{p}{q}} - h + \frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. Atque respectu alterius axis AB erit stabilitas $= M\left(\frac{2}{3} c \sqrt{\frac{p}{q}} - h + \frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

313. Si cuneus iste ex materia vniformi est confectus, erit $h = \frac{2}{3} c$; atque hoc casu stabilitas respectu axis

 CD

CD erit $= M\left(\frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$; respectu axis AB vero erit stabilitas $M\left(\frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

314. Si ergo fuerit $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{a^2+4cc}$, atque etiam $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{bb+4cc}$, tum situs iste aequilibrii erit stabilis; casibus vero contariis situs prodibit instabilis et ad subuersionem procliuis

Coroll. 3.

315. Si generaliter b retineat valorem eundem, vtraque expressio $\frac{a^2}{6c}+\frac{2}{3}c$ et $\frac{bb}{6c}+\frac{2}{3}c$ fit infinite magna tam si $c=0$ quam si $c=\infty$ minimum igitur valorem induet, si fuerit $a=2c$ vel etiam $b=2c$. His igitur casibus stabilitas prodibit minima ceteris paribus.

Exemplum 3.

Tab. XVI. fig. 5. 316. Sit corpus aquae insidens pyramis recta MNLPQ cuius basis MNPQ sit horizontalis et parallelogrammum rectangulum, cui ergo sectio aquae EFHK erit parallela pariterque parallelogrammum rectangulum. Sit MN $=$ PQ $=a$; MP $=$ NQ $=b$, et altitudo WL $=c$; et centrum grauitatis extet in G, vt sit LG $=h$. Pondus autem huius pyramidis sit M, quod, se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Iam erit $a:b = A:B$, atque $a^3 : A^3 = q:p$; ita vt sit $A = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $B = b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, similiterque LI $= c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Centrum magnitudinis autem partis submersae cadet in O vt sit LO $= \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, vnde erit GO $= \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - h$. At volumen partis submersae erit

$= \frac{ABc}{3}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{pabc}{3q}$. His ſubſtitutis erit ſtabilitas reſpectu axis CD $= M$ $(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$. At reſpectu axis A B ſtabilitas erit $= M(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$.

Coroll. 1.

317. Manentibus igitur tam b quam ratione $p:q$ iisdem, ſtabilitas reſpectu axis CD erit minima, ſi fuerit $b = c\sqrt{3}$. Reſpectu axis AB vero ſtabilitas erit minima, ſi fuerit $a = c\sqrt{3}$.

Coroll. 2.

318. Quo igitur huiusmodi pyramis firmiſſime ſitu erecto aquae innatet, in ea conficienda imprimis eſt euitandum ne ſit vel a vel b prope aequale ipſi $c\sqrt{3}$.

Coroll. 3.

319. Si iſta pyramis ex materia vniformi conſtet tum erit $b = \frac{3}{4}c$. Stabilitas ergo talis pyramidis reſpectu axis CD erit $= M(\frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$, at reſpectu axis AB erit ſtabilitas $= M(\frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$.

Coroll. 4.

320. Quo igitur eiusmodi pyramis aquae firmiter inſideat neceſſe eſt vt ſit tam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{bb+3cc}$ quam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{a^2+3cc}$. Si ergo fuerit $a < b$, oportet vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{27\ c^6}{(a^2+3c^2)^3}$.

Coroll. 5.

321. Si fuerit $a = b = c$; talis pyramis ſitum in figura repreſentatum conſeruare non poterit niſi ſit $\frac{p}{q} >$

$\frac{27}{64}$

$\frac{27}{64}$; hoc eſt, niſi pyramidis grauitas ſpecifica ſit maior quam 421 $\frac{7}{8}$, poſita aquae grauitate ſpecifica $=$ 1000.

PROPOSITIO 31.

Problema.

Tab. XVII. fig. 1.

322. *Si corporis natantis ſectio aquae fuerit rhombus* ACBD, *determinare eius ſtabilitatem reſpectu vtriusque diagonalis* CD *et* AB.

Solutio.

Conſideretur primo axis per centrum grauitatis corporis tranſiens parallelus diagonali CD; ducaturque ordinata quaecunque YXZ; atque vocatis $CI = DI = A$; $AI = BI = B$; $CX = x$; $XY = XZ = y$, erit $A : B = x : y$ et $y = \frac{Bx}{A} = z$; atque latus rhombi AC erit $= \surd(A^2 + B^2)$. His poſitis erit $\int y^3\, dx = \frac{B^3 x^4}{4A^3}$; poſitoque $x = A$ habebitur valor huius expreſſionis pro parte CIA $= \frac{1}{4} A.B^3$ qui quater ſumtus reſpondebit toti rhombo CBDA, pro quo proinde erit $\int (y^3 + z^3)\, dx = A.B^3$. Si nunc corporis pondus ponatur $= M$; et interuallum centri magnitudinis ſuper centro grauitatis $= GO$ atque volumen partis ſubmerſae $= V$, erit ſtabilitas reſpectu axis CD $= M(GO + \frac{A.B^3}{3V})$. Simili autem modo reperietur ſtabilitas reſpectu axis AB $= M(GO + \frac{A^3.B}{3V})$. Ex quibus duabus expreſſionibus ſtabilitas reſpectu cuiusuis alius axis poterit colligi. Q. E. I.

Coroll. 1.

323. Si igitur diagonales ſint inaequales, corpus inclinationi circa longiorem minus reſiſtit, quam circa breviorem

viorem; quae regula fere in omnibus sectionibus aquae locum habet, vbi axes inter se normales sunt inaequales.

Coroll. 2.

324. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis, necesse est vt tam $GO + \frac{A \cdot B^3}{3V}$ quam $GO + \frac{A^3 \cdot B}{3V}$ habeat valorem affirmatiuum, id quod accidit, si tantum minor expressio fuerit affirmatiua.

Coroll. 3.

325. Si latus rhombi AC ponatur $= C$, atque angulorum sinus $= m$; anguli ACB cosinus vero $= n$; erit anguli CAB cosinus $= -n$. Hinc reperitur $B = C\sqrt{\frac{1-n}{2}}$; et $A = \frac{mC}{\sqrt{2(1-n)}}$. Quare stabilitas respectu axis CD erit $= M\left(GO + \frac{m(1-n)C^4}{12V}\right)$ respectu axis AB autem $= M\left(GO + \frac{m(1+n)C^4}{12V}\right)$.

Coroll. 4.

326. Si rhombus abit in quadratum, fiet $m = 1$ et $n = 0$; hocque casu stabilitas respectu vtriusque diagonalis erit eadem scilicet $= M\left(GO + \frac{C^4}{12V}\right)$; quae ipsa expressio quoque inuenta est ex praecedente propositione, facta applicatione parallelogrammi ad quadratum.

Exemplum.

327. Terminetur pars corporis aquae submersa in recta horizontali RS parallela diagonali CD, atque rectis BL, AL ad punctum medium L rectae RS ductis, item- Tab. XVII. fig. 2.

itemque verticalibus CR et DS, ita vt singulae sectiones horizontales sint rhombi. Maneant $CI = DI = A$; $AI = BI = B$; sitque $CR = LI = DS = D$; erit partis submersae volumen $V = ABD$; eiusque centrum magnitudinis in O vt sit $LO = \frac{2}{3}D$. Totius vero corporis centrum grauitatis cadat in G, dicaturque $LG = b$; erit $GO = \frac{2}{3}D - b$. Ex his igitur reperietur stabilitas huius aequilibrii situs respectu axis $CD = M(\frac{2}{3}D - b + \frac{B^2}{3D})$. At respectu axis AB erit stabilitas $= M(\frac{2}{3}D - b + \frac{A^2}{3D})$.

Coroll. 1.

328. Quo igitur iste aequilibrii situs sit stabilis necesse est vt sit $b < \frac{A^2 + 2D^2}{3D}$, simulque etiam $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$. Si ergo fuerit $B < A$ sufficiet ad stabilitatem corpori comparandam esse $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$.

Coroll. 2.

329. Nisi ergo sit $B > D$, necessario centrum grauitatis corporis infra superficiem aquae cadere debet, si quidem situs aequilibrii debeat esse stabilis.

PROPOSITIO 32.
Problema.

Tab. XVII. fig. 3. 330. *Si sectio aquae fuerit triangulum isosceles* ECF, *determinare stabilitatem corporis aquae insidentis tum respectu axis* CD *tum respectu axis* AB *ad illum normalis et per centrum grauitatis* I *sectionis aquae transeuntis.*

So-

Solutio.

Pofitis pondere corporis $= M$; volumine partis fubmerfae $= V$; et diftantia inter centra grauitatis corporis et magnitudinis partis fubmerfae $= GO$; fit $CD = A$, et $DE = DF = B$; erit $CX\,(x) : XY\,(y) = A : B$, vnde fit $y = \frac{Bx}{A}$. Quamobrem habebitur $\int y^3\,dx = \frac{B^3 x^4}{4A^3} = \frac{A.B^3}{4}$, pofito $x = CD = A$. Pro tota ergo fectione aquae erit $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{A.B^3}{2}$, vnde fiet ftabilitas refpectu axis $CD = M\,(GO + \frac{A.B^3}{6V})$. Confideretur nunc axis AB, in quo eft $AI = BI = \frac{2}{3}B$; et $CI = \frac{2}{3}A$; eritque $\int y^3 dx$, ortum ex area $ACB = \frac{AI.CI^3}{4} = \frac{4A^3.B}{81}$; ergo eadem formula ex toto triangulo ACB orta erit $= \frac{8A^3.B}{81}$. Nunc ex altera parte confideretur area tota IDFH, quae eft rectangulum, exiftente $IH = DF = B$, et $DI = FH = \frac{1}{3}A$; prodibitque ex ea $\int y^3\,dx = DI^3.IH = \frac{A^3.B}{27}$. A quo valore fubtrahi debet is qui oritur ex triangulo BFH qui eft $= \frac{BH.FH^3}{4} = \frac{A^3.B}{4.81}$, et relinquetur valor ipfius $\int y^3\,dx$ pro trapezio $IDBF = \frac{11A^3B}{4.81}$. Trapezio ergo ABFE refpondebit valor ipfius $\int y^3\,dx = \frac{11A^3.B}{2.81}$. Quocirca refpectu axis AB erit totalis valor ipfius $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{8A^3.B}{81} + \frac{11A^3.B}{2.81} = \frac{A^3.B}{6}$. Ex quo erit ftabilitas huius aequilibrii fitus refpectu axis $AB = M\,(GO + \frac{A^3.B}{18V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

331. Stabilitas igitur refpectu axis CD maior erit, quam ftabilitas refpectu axis AB fi fuerit $A.B^3 > \frac{A^3.B}{3}$, hoc eft

eſt ſi fuerit $\frac{B}{A} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Contra vero ſi fuerit $\frac{B}{A} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ tum ſtabilitas reſpectu axis AB maior erit quam reſpectu axis CD.

Coroll. 2.

332. Quia $\frac{B}{A}$ eſt tangens anguli DCE ſeu tangens dimidii anguli CCF, manifeſtum eſt ſi fuerit angulus ECF maior quam 60°, tum ſtabilitatem reſpectu axis CD excedere ſtabilitatem reſpectu axis AB; contrarium vero euenire, ſi angulus ECF minor ſit quam 60°.

Coroll. 3.

333. Si ergo triangulum ECF ſit aequilaterum, tum ſtabilitas reſpectu vtriusque axis erit eadem. Sed ob $A = B\sqrt{3}$ erit ſtabilitas hoc caſu $= M(GO + \frac{B^4}{2V\cdot\sqrt{3}})$ quae pro omnibus reliquis axibus valebit.

Coroll. 4.

334. Si trianguli aequilateri area ponatur $= E$ erit $B^2\sqrt{3} = E$; vnde ſtabilitas ſitus erit aequilibrii $= M(GO + \frac{E^2}{6V\sqrt{3}})$.

Coroll. 5.

335. At ſi ſectio aquae eſt quadratum cuius area ſit pariter $= E$, tum ex ſupra inuentis ſtabilitas erit $= M(GO + \frac{E^2}{12\cdot V})$. Quare cum ſit $\frac{1}{6\sqrt{3}} > \frac{1}{12}$, ſequitur ſectionem aquae quae eſt triangulum aequilaterum ſtabiliorem ſitum producere quam quadratum eiusdem areae ceteris paribus.

Exemplum 1.

Tab. XVII. fig. 4. 336. Sit corpus aquae innatans prisma triangulare MNPTRS, cuius ſectiones horizontales ſint triangula aequilatera MNP, CEF, TRS, quorum latera ſint $= a$, area

area vero $= bb$; seu $bb = \frac{aa\sqrt{3}}{4}$. Ponatur pondus huius prismatis $=$ M; eiusque grauitas specifica ad aquam vt p ad q. atque tota altitudo MT $=$ WL $= c$. Cum nunc CEF sit sectio aquae, erit CT $= \frac{pc}{q}$; atque LO $= \frac{pc}{2q}$; volumen vero partis submersae V $= \frac{pb^2c}{q}$. Totius porro prismatis centrum grauitatis sit in G, existente LG $= h$; erit GO $= \frac{pc}{2q} - h$. Ex his igitur fiet stabilitas huius aequilibrii situs respectu cuiusque axis $= M\left(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}}\right)$ $= M\left(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qa^2}{24pc}\right)$.

Coroll. 1.

337. Si prisma ex materia vniformi fuerit confectum, erit $h = \frac{1}{2}c$, atque stabilitas huius aequilibrii situs erit $= M\left(\frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}} - \frac{(q-p)c}{2q}\right) = M\left(\frac{qa^2}{24pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$.

Coroll. 2.

338. Quo ergo iste situs aequilibrii sit stabilis oportet vt sit $c < \frac{qb}{\sqrt{3p(q-p)\sqrt{3}}}$ siue quod eodem redit $c < \frac{qa}{2\sqrt{3p(q-p)}}$. Hinc igitur innotescit, quam longa pars a prismate triangulari indefinitae longitudinis debeat abscindi, vt situ erecto aquae innatare queat.

Coroll. 3.

339. Si ex eadem materia prisma quadrangulare conficiatur, cuius bases sint quadrata $= bb$, longitudo eorum c minor esse debet quam $\frac{qb}{\sqrt{6p(q-p)}}$ quo situ erecto aquae innatare possint. Longiora igitur in hunc finem licebit accipere prismata triangularia, quam quadrata.

Exemplum 2.

*Tab. XVII. fig. 5.

340. Sit corpus aquae innatans pyramis triangularis MNPL, cuius basis MNP horizontaliter extra aquam emineat. Ponatur basis MNP quae sit triangulum aequilaterum, latus qodlibet $= a$; basisque eiusdem $= bb$ ita vt sit $b^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pyramidis porro altitudo WL sit $= c$, eiusque pondus M se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q; sitque CFE sectio aquae quae pariter erit triangulum aequilaterum, cuius area sit $= E$. Iam erit $q : p = b^3 : E\sqrt{E}$ seu $\sqrt{E} = b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. et $E = b^2\sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$. Similique modo erit $LI = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $LO = \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Volumen autem partis submersae V erit $= \frac{pb^2c}{3q}$. Sit denique $LG = h$; erit stabilitas huius aequilibrii situs, quem pyramis proposita tenet $= M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - h + \frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$ $= M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - h + \frac{a^2}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

341. Si pyramis ex materia vniformi constet, erit $h = \frac{3}{4}c$. Hoc igitur casu habebitur stabilitas istius aequilibrii situs $= M\left(\frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right) =$ $M\left(\frac{aa}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

342. Si pyramis insuper abeat in tetraedron seu pyramidem regularem, erit $c = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ stabilitas igitur tetraedri

traedri angulo deorsum verso aquae insidentis erit $=$
$$M a \left(\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{p}{q}} \right) = \frac{M a \sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \left(5 \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - 4 \right).$$

Coroll. 3.

343. Quo ergo huiusmodi tetraedron in aqua talem situm aequilibrii seruare queat, necesse est vt sit $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{4}{5}$ seu $\frac{p}{q} > \frac{64}{125}$. Eius igitur grauitas specifica maior esse debet quam 512, posita aquae grauitate specifica $= 1000$.

Scholion.

344. Euolui hactenus eiusmodi sectiones aquae quae sunt figurae rectilineae, atque tres casus tractati sufficere possunt ad nostrum institutum. Progrediar itaque ad figuras curuilineas, ex iisque praecipuas, quae facillime experimentis comprobari queant, faciam sectiones aquae, vt de plurimis corporibus inde iudicari queat, quemnam situm aquae imposita sint habitura, et quanta stabilitate in quoque aequilibrii situ persistant.

PROPOSITIO 33.
Problema.

345. *Si corporis aquae in aequilibrio insidentis sectio aquae fuerit circulus* ACBD, *determinare stabilitatem respectu cuiuscunque axis* CD, *quia vbique stabilitas est eadem, qua iste aequilibrii status gaudebit.* Tab. XVIII. fig. 1.

Solutio.

Ponatur radius circuli $CI = a$; et ducta in quadrante CIA quacunque applicata XY vocetur $IX = x$ et

XY

$XY = y$ erit $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; vnde fiet $\int y^3 dx = \int dx (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$. At per reductionem formularum integralium ad ſimpliciores fit $\int dx (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{(a^2-x^2)}}{8} + \frac{3a^4}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Ponatur $x = a$; dabit $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{1}{2}\pi$ poſita $\pi : 1$ ratione peripheriae ad diametrum. Quo facto pro quadrante CIA habebitur $\int y^3 dx = \frac{3\pi a^4}{16}$; adeoque pro toto circulo erit $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{3\pi a^4}{4}$. Si nunc corporis pondus ſit $= M$, et volumen partis aquae ſubmerſae $= V$, atque GO denotet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis $= M(GO + \frac{\pi a^4}{4V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

346. Quia diameter ſe habet ad peripheriam vt 1 ad π, exprimet πa^2 aream circuli. Si ergo area circuli ponatur $= bb$, erit $a^2 = \frac{bb}{\pi}$ atque ſtabilitas ita exprimetur vt ſit $= M(GO + \frac{b^4}{4\pi V})$.

Coroll. 2.

347. Si ſectio aquae eſt quadratum areae $= b^2$, tum ſtabilitas inuenta eſt $= M(GO + \frac{b^4}{12V})$, et ſi ſectio aquae eſt triangulum aequilaterum, cuius area itidem eſt $= bb$, tum ſtabilitas erat $= M(GO + \frac{b^4}{6V\sqrt{3}})$. Vnde intelligitur ſtabilitatem circuli eſſe minimam, trianguli vero maximam.

Coroll. 3.

348. Colligere ergo hinc licet, ſi ſectio aquae fuerit polygonum regulare, ſtabilitatem prodituram eſſe eo minorem

norem, quo plura latera polygonum contineat; ceteris ſcilicet paribus.

Coroll. 4.

349. Ad maximam igitur corpori aquae innatanti ſtabilitatem reſpectu omnium axium conciliandam, conueniet corpori eiusmodi dare figuram, vt ſectio aquae fiat triangulum aequilaterum.

Exemplum 1.

350. Sit corpus aquae innatans cylindrus rectus, MNRS, in aqua erectus, cuius ſectiones horizontales ſint circuli MN, CD, et RS, aequales, quorum radius ſit $= a$. Pondus autem huius cylindri ſit M, quod ſe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Quare poſita totius cylindri altitudine WL $= c$ erit altitudo partis aquae ſubmerſae IL $= \frac{pc}{q}$, atque volumen partis ſubmerſae $V = \frac{\pi p a^2 c}{q}$; cuius centrum magnitudinis cadet in O vt ſit LO $= \frac{pc}{2q}$. Sit autem centrum grauitatis totius corporis in G, exiſtente LG $= b$. His igitur ſubſtitutis inuenietur ſtabilitas cylindri in iſto erecto aequilibrii ſitu $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qa^2}{4pc}\right)$. Tab. XVIII. fig. 2.

Coroll. 1.

351. Cylindrus igitur in tali ſitu firmiter perſeuerabit ſi fuerit $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{4pc}$. Hoc eſt ſi fiat LI : $\frac{1}{2}$CI $= \frac{1}{2}$CI : OH, tumque punctum G infra punctum H cadat.

Coroll. 2.

352. Si cylindrus ex materia vniformi conſtet, erit $b = \frac{c}{2}$; hoc igitur caſu erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{4pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$. Quo igitur hic ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt ſit $c < \frac{qa}{\sqrt{2p(q-p)}}$.

Coroll. 3.

353. Si totus cylindrus fuerit datus, ex grauitate ſpecifica cognoſcetur an ſitu erecto natare queat. Natabit enim ſi fuerit $\frac{p}{q}$ vel maius quam $\frac{c+\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$ vel minus quam $\frac{c-\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$.

Coroll. 4.

354. Perſpicitur ergo ſi fuerit $c < a\sqrt{2}$. tum cylindrum ſemper ſitu erecto eſſe nataturum, quaecunque fuerit ratio grauitatum ſpecificarum.

Exemplum 2.

Tab. XVIII. fig. 3. 355. Sit corpus conus rectus MLN vertice deorſum verſo aquae innatans, cuius baſis radius $WM = WN = a$; et altitudo $WL = c$. Sit eius grauitas ſpecifica ad aquam vt p ad q: erit ſectionis aquae CO radius $IC = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $IL = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Atque cum baſis MN area ſit $= \pi a^2$, erit area ſectionis aquae $= \pi a^2 \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$; vnde volumen partis ſubmerſae V erit $= \frac{\pi p a^2 c}{3q}$; atque $LO = \frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Poſito nunc $LG = b$, erit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M\left(\frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3\pi \cdot CI^4}{4pa^2c}\right) = M\left(\frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll.

Coroll. 1.

356. Si ergo conus ex materia homogenea constet, erit $b = \frac{3}{4}c$; hoc ergo casu stabilitas erit $= \frac{3}{4}M\left(\frac{(a^2+c^2)}{c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - c\right)$.

Coroll. 2.

357. Quo ergo iste situs aequilibrii sit stabilis necesse est vt sit $\frac{p}{q} > \frac{c^6}{(a^2+c^2)^3}$. Quod nisi fuerit, conus alium quaeret situm, quo aquae innatet.

PROPOSITIO 34.

Problema.

358. *Sit corporis pars aquae submersa* CMLMD. *solidum rotundum, genitum conuersione figurae* LMC *circa axem verticalem* LI, *atque sectio aquae sit circulus* CD *seu suprema solidi rotundi sectio horizontalis. Determinare huius corporis aquae insidentis stabilitatem.* Tab. XVIII. fig. 4.

Solutio.

Sit sectionis aquae semidiameter $IC = a$; atque longitudo axis $IL = c$; in quo positum sit tum centrum grauitatis totius corporis G, tum centrum magnitudinis partis submersae O. Positis nunc pondere corporis $= M$ et volumine partis submersae $= V$, erit stabilitas $= M\left(GO + \frac{\pi a^4}{4V}\right)$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est $= 1$. At tam volumen V quam punctum O ex natura curua CML determinari oportet: Ad quod praestandum vocetur abscissa $LP = x$, respondensque applicata $PM = y$, et habebitur volumen solidi ex conuersione

 partis

partis MLP orti $= \pi \int y^2 dx$, in quo intergali ſi ponatur $x = c$, quo caſu fiet $y = a$, prodibit totum partis ſubmerſae volumen V. Integrali ergo extenſo per totam figuram LMC erit $V = \pi \int y^2 dx$. Simili vero modo reperietur poſitio centri magnitudinis O partis ſubmerſae erit ſcilicet $LO = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, vtroque integrali vsque ad ſectionem aquae extenſo. Si ergo ponatur $LG = b$, quippe quod interuallum non a natura curuae CML, ſed ab indole totius corporis pendet, erit ſtabilitas iſtius ſitus aequilibrii $= M \left(\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx} - b + \frac{a^4}{4\int y^2 dx} \right) = M \left(\frac{a^4 + 4\int y^2 x dx}{4\int y^2 dx} - b \right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

359. Ad ſtabilitatem ergo huiusmodi corporum inueniendam, duplex integratio eſt inſtituenda; integrari enim debent hae duae formulae differentiales $y^2 dx$ et $y^2 x dx$.

Coroll. 2.

360. Quoties igitur hae duae formulae algebraicam admittunt integrationem, toties ſtabilitas algebraice exprimi poterit. Ad quadraturas curuarum autem erit confugiendum, ſi vel alterutra vel vtraque integrari nequeat.

Scholion.

361. Ex aequatione autem, quae habebitur inter x et y, qua curuae LMC natura exprimitur colligetur, vtrum formulae $y^2 dx$ et $y^2 x dx$ ſint algebraice integrabiles, an a quadraturis pendeant. Hic autem conueniet omnes aequationes algebraicas inter x et y indicari, quae vtramque formu-

formulam reddant algebraice integrabilem, quo generatim intelligatur, quaenam curuae algebraicae pro curua generatrice LMC assumtae producant stabilitatem algebraice expressam. Ad hoc igitur inuestigandum assumo duas quascunque quantitates algebraicas P et Q, quarum vel altera alterius sit functio algebraica, vel ambae functiones algebraicae tertiae cuiusdam variabilis puta z; et facio $\int yyd x = P$, et $\int yyyxdx = Q$. Ex his igitur erit $y^2 = \frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{xdx}$; vnde reperitur $x = \frac{dQ}{dP}$; atque $y^2 = \frac{dP^3}{dPddQ - dQddP}$, qui sunt generales valores algebraici pro x et y, qui primo praebebunt aequationem inter x et y algebraicam, et deinde stabilitatem producent algebraice expressam, quippe quae erit $= M(\frac{a^4 + 4Q}{4P} - b)$. Sed stabilitatem in solutione problematis generaliter inuentam expediet exemplis nonnullis illustare.

Exemplum 1.

362. Sit corporis pars aquae immersa CLD portio sphaerae, cuius radius sit b; erit $b - c = \sqrt{(bb - aa)}$, hincque $b = \frac{aa + cc}{2c}$. Cum igitur LMC sit arcus circuli radii b, erit $y^2 = 2bx - xx$, ideoque $\int y^2 dx = bxx - \frac{1}{3}x^3$. Facto ergo $x = c$; erit $\int yydx = bcc - \frac{1}{3}c^3 = \frac{c(3aa + cc)}{6}$. Deinde habebitur $\int yyxdx = \frac{2bx^3}{3} - \frac{1}{4}x^4 = \frac{2bc^3}{3} - \frac{1}{4}c^4$ posito $x = c$, substituto autem loco b valore per a et c definito erit $\int yyxdx = \frac{cc(4aa + cc)}{12}$. His igitur integralibus inuentis prodibit stabilitas quaesita $= M(\frac{3a^4 + 4aacc + c^4}{2c(3aa + cc)} - b) = M(\frac{aa + cc}{2c} - b) = M(b - b)$.

Coroll. 1.

363. Cum ſtabilitas ſit inuenta $= M(b-b)$, erit ea proportionalis interuallo, quo centrum grauitatis G infra centrum ſphaerae cadit. Eiusmodi igitur corpus firmiter ſuum ſitum tenebit, ſi centrum grauitatis infra ſphaerae, cuius pars ſubmerſa eſt portio, centrum cadat.

Coroll. 2.

364. Sin autem centrum grauitatis G in ipſum ſphaerae centrum cadat, tum ſitus aequilibrii erit indifferens, id quod accidit in globis ex materia vniformi confectis; qui aquae inſidentes omnes ſitus habebunt aequilibrii proprietate gaudentes, nullum autem neque ſtabilem, neque inſtabilem ſed omnes indifferentes.

Exemplum 2.

365. Sit curua LMC parabola cuiuscunque ordinis, ſcilicet $y^m = b^{m-n} x^n$. Erit ergo $a^m = b^{m-n} c^n$, atque $b = \frac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$. Cum autem ſit $y^2 = b^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$; erit $\int y^2\, dx = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{n}} x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m} = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m}$ poſito c loco x, quo integrale ad ſectionem aquae CD vsque pertingat. Simili autem modo erit $\int yyx\, dx = \frac{mb^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{2m+2n}$. Ex quibus integralibus obtinebitur ſtabilitas quaeſita $= M \left(\frac{a^4 + \frac{2m}{m+n} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{\frac{4m}{2n+m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}} - b \right)$ Subſtituto autem loco

b va-