Caput Tertium
DE
STABILITATE, QVA CORPORA AQVAE INSIDENTIA IN SITV AEQVLIBRII PERSISTVNT.

PROPOSITIO 19.
Theorema.

204.

Stabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſeuerat, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus dato angulo infinite paruo ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum.

Demonſtratio.

Si corpus aquae innatans aliquantillum ex ſitu aequilibrii declinetur, tum vel reſtituetur, vel quieſcet, vel etiam magis a ſitu aequilibrii recedet, et quaſi prolabetur ſe in alium ſitum aequilibrii recipiendo. In caſu igitur, quo ex ſitu aequilibrii declinatum quieſcit, ſtabilitas eſt nulla, cum etiam corpus ſibi relictum non reſtituatur; caſu vero, quo magis recedit a ſitu aequilibrii, ſtabilitas non ſolum nulla ſed negatiua adeo eſt cenſenda. Stabilitas ergo iis tantum aequilibrii ſitibus eſt tribuenda, in quos corpus ſi aliquantillum declinetur, reſtituitur. Si autem corpus minimo tantum angulo e ſitu aequilibrii declinetur,

reſtitu-

reſtitutio fiet circa axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem, prout in propoſitione 18 eſt monſtratum. Cauſa vero reſtitutionis eſt momentum preſſionis aquae circa illum axem, quod in eodem corpore ipſi angulo proportionale eſſe infra oſtendetur. Quo ergo in diverſis corporibus eodem angulo e ſitu aequilibrii declinatis maius fuerit momentum illud reſtitutionis, eo fortior erit vis reſtitutionis, eoque propterea maior vis perſeuerandi in ſitu aequilibrii, quam ſtabilitatem voco. Hanc obrem ſtabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſiſtit, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus angulo infinite paruo e ſitu aequilibrii declinetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

205. Cum igitur in eodem corpore momentum reſtitutionis angulo declinationis a ſitu aequilibrii ſit proportionalis, atque in diuerſis corporibus ſtabilitas per aequales angulos definiatur, erit in corpore quocunque ſtabilitas abſolute vt momentum reſtitutionis per angulum declinationis diuiſum.

Coroll. 2.

206. Quia in ſtabilitate determinanda axis quidam horizontalis conſideratur, circa quem minima inclinatio fieri concipitur, manifeſtum eſt pro eodem corpore eodemque aequilibrii ſitu infinitas inueniri ſtabilitatis aeſtimationes, pro infinitis axibus, quorum reſpectu ſtabilitas definitur.

Corol. 3.

Coroll. 3.

207. Quando ergo de ſtabilitate, qua datum corpus aquae inſidens in dato aequilibrii ſitu perſiſtit, ſermo eſt, axis ſimul erit indicandus ad quem ſtabilitas refertur; alioquin enim ſtabilitas determinatam quantitatem habere nequit.

Coroll. 4.

208. Si ergo corpus quodpiam aquae in ſitu aequilibrii inſidat, ſtabilitas reſpectu cuiusdam axis fixi horizontalis indicabit, quantum illud corpus inclinationi circa illum axem reſiſtat. Quo magis enim corpus aquae inſidens inclinationi circa quempiam axem reluctatur, eo maior cenſetur eius ſtabilitas reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 5.

209. Quo ergo maior reperietur valor ſtabilitatis reſpectu cuiusdam axis, eo magis corpus inclinationi circa hunc axem reſiſtet. Atque ſi ſtabilitatis valor prodeat $= 0$, tum corpus ne quidem reſtituetur, ſi parumper circa illum axem inclinetur. At ſi ſtabilitas fuerit negatiua, tum corpus vel minime circa axem inclinatum non ſolum non reſtituetur, ſed ſubuertetur, donec in ſitum aequilibrii firmum et ſtabilem perueniat.

Scholion 1.

210. Doctrina haec de ſtabilitate corporum aquae innatantium, qua in ſitu aequilibrii quem tenent, perſeuerant, maximi eſt momenti in conſtructione et oneratione nauium. Maxime enim in nauigatione requiri ſolet, vt naues in ſitu ſuo recto quam firmiſſime perſiſtant, atque

que viribus inclinantibus vehementiſſime reſiſtant. Hancobrem iſtam doctrinam eo accuratius in hoc capite euolvere conſtitui, quo poſtmodum ex ea vtiles regulae pro conſtruendis et onerandis nauibus elici queant. Cum igitur in primo capite omnes ſitus inueſtigauerimus, quibus corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtere poſſit; hic in ſtabilitatem inquiremus, qua in quouis aequilibrii ſitu reſpectu cuiusque axis perſeueret. Inueniemus ergo alios aequilibrii ſitus firmos et ſtabiles, quando ſcilicet ſtabilitas affirmatiuum obtinebit valorem, alios vero inſtabiles ac labiles, quando ſtabilitas prodit negatiua. Habebuntur etiam nonnunquam ſitus ambigui, in quos ſtabilitas euaneſcens competit; quos caſus omnes diligenter perpendere ad praecepta rei nauticae tradenda maxime conducet.

Scholion 2.

211. Quamuis ad ſtabilitatem dati aequibrii ſitus perfecte cognoſcendam requiratur, vt ſtabilitas reſpectu omnium axium horizontalium definiatur, tamen ſatis commode gradus ſtabilitatis intelligitur, ſi ſtabilitas tantum reſpectu duorum axium inueſtigetur, quorum alter ſtabilitatem maximam alter vero minimam praebeat; ex his enim licebit ſtabilitatem reſpectu cuiusuis alius axis facile aeſtimare, cum plerumque ſufficiat limites noſſe, inter quos ſtabilitas contineatur. Sic naues a viribus externis multo difficilius proram puppemue verſus inclinantur quam ad latera, earumque ſtabilitas proinde reſpectu axis ſecundum latitudinem ducti maxima eſt, ſtabilitas vero reſpectu axis nauim ſecundum longitudinem traiicientis, minima. Stabilitatis ſcilicet definitio ſimilis eſt momentorum tam virium

M quam

quam inertiae, quae abſolute aſſignari non poſſunt, ſed ſemper ad axem quempiam, circa quem inclinatio fieri concipitur, referri debent. Hoc igitur pacto iſta tractatio, quae fere infinita videatur, maxime contrahetur, vt facili negotio abſolui queat. Quo autem a caſibus ſimplicioribus inchoemus, primo non corpora ſed tantum ſuperficies planas conſiderabimus, quae aquae in ſitu verticali inſideant, atque circa axem horizontalem per centrum grauitatis ſuperficiei ad ipſius planum normaliter tranſeuntem mobiles exiſtant. In huius modi ſcilicet ſuperficiebus planis alias a ſitu aequilibrii declinationes non contemplabimur, niſi quibus ipſae ſuperficies maneant verticales.

PROPOSITIO 20.
Problema.

212. *Inuenire ſtabilitatem, qua ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens in ſitu aequilibrii perſeuerat.*

Solutio.

Tab. XIII. fig. 1. Sit A M F N B ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens ita vt recta horizontalis A B ſit ſectio aquae. Sit centrum grauitatis huius figurae in G, et pondus figurae = M. Ducatur per G recta verticalis E F, in quam cadat centrum magnitudinis O partis ſubmerſae AMFNB quia figura in hoc ſitu aequilibrium tenere ponitur; atque ob eandem rationem pars ſubmerſa AMFNB tanta erit, vt maſſae aqueae volumine ipſi aequalis pondus ſit = M. Inclinetur iam figura haec quam minime ex ſtatu aequilibrii, ita vt $a\,b$ fiat ſectio aquae, atque per G ipſis

ipſis A B et ab ducantur parallelae M N et mn, quarum M N horizontalis erit in ſitu aequilibrii, mn vero horizontalis in ſitu inclinato. Sitque angulus inclinationis $MGm = dw$. Cum igitur pars ſubmerſa perpetuo conſtans eſſe debeat, erit area $aMFNb =$ areae $AMFNB$: niſi enim aequalis eſſet, centrum grauitatis vel aſcenderet vel deſcenderet donec aequalitas fuerit comparata, quo motu ipſe reſtitutionis motus circa centrum grauitatis factus, quem hic ſolum ſpectamus non turbatur. Poſita ergo interſectione rectarum AB et ab in C, erit area $ACa =$ areae BCb. Ob angulum autem inclinationis dw infinite paruum erit area $ACa = \frac{AC^2 . dw}{2}$ et area $BCb = \frac{BC^2 . dw}{2}$ vnde prodit $AC = BC = \frac{AB}{2}$. Quo nunc vis reſtitutionis ex ſitu inclinato in ſitum aequilibrii inveniatur, quaerendum eſt centrum magnitudinis partis ſubmerſae $aMFNb$; quae cum ſit $= AMFNB + BCb - ACa$, ex harum partium centris grauitatis reperiri poterit verae partis ſubmerſae centrum magnitudinis, indeque preſſionum aquae momentum ad reſtitutionem aequilibrii. Reſtituetur vero in aequilibrium, dum recta M N in ſitum horizontalem $\overline{mn}$ reducetur. Conſideremus igitur primo aream AMFNB cuius centrum grauitatis eſt in O et vis ſurſum vrgens ab ea orta $= M$. Per O ducatur verticalis VOo quae eſt directio vis M figuram ſurſum vrgentis; momentum ergo huius vis ad reſtituendum eſt $= M . GV = M . GO . dw$ ob angulum $GOV = MGm = dw$. Porro conſideretur areola CBb, cuius area eſt $\frac{BC^2 . dw}{2} = \frac{AB^2 . dw}{8}$. Vis igitur hinc orta figuram ſurſum vrgens eſt $= \frac{M . AB^2 . dw}{8 . AMFNB}$; cuius directio tranſit per centrum grauitatis Q elementi

 BCb;

BCb; ex Q in Cb ducatur normalis seu verticalis Qq, erit $Cq = \frac{2}{3} Cb \frac{2}{3} CB = \frac{1}{3} AB$, momentum igitur huius vis ad restituendum est $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB} (qo + GV)$. Denique elementum ACa pari modo dabit vim $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}$, eiusque directio, quae est verticalis transit per eius centrum grauitatis P. Ducta ergo verticali Pp, erit $pC = \frac{2}{3} aC = \frac{2}{3} AC$. Momentum ergo huius vis contrarium erit prioribus ideoque $= -\frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB} (po - GV)$. Quia ergo hoc momentum a prioribus subtrahi debet ob $aMFNb = AMFNB + BCb - ACa$, erit momentum, quo expressio aquae in totam partem submersam $aMFNb$ exerta aequilibrium restituit $= M.\, GO.\, dw + \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8\, AMFNB} (po + qo) = M.\, GO.\, dw + \frac{M\, AB^3 \cdot dw}{12\, AMFNB}$ ob $po + qo = pq = \frac{2}{3} AB$. Cum igitur momentum, quo figura in situm aequilibrii restituitur sit $= M dw \left(GO + \frac{AB^3}{12 \cdot AMFNB}\right)$ erit per angulum dw diuidendo stabilitas, qua figura in situ aequilibrii AMFNB perseuerat $= M \left(GO + \frac{AB^3}{12\, AFB}\right)$ designante AFB aream partis submersae. Q. E. I.

Coroll. 1.

213. Patet ergo quod supra asseruimus, vim restituentem in situm aequilibrii proportionalem esse angulo, quo corpus ex situ aequilibrii est declinatum, si quidem angulus fuerit quam minimus, ideoque si stabilitas absolute requiratur, angulum dw, quo inclinatio indicatur, omitti oportere. Sic igitur expressio stabilitatis momentis virium erit homogenea, cum sit productum ex vi seu potentia M in lineam quandam rectam $GO + \frac{AB^3}{12\, AF}$

Scho-

Scholion 1.

214. In expreſſione ſtabilitatis denotat GO diſtantiam centri grauitatis figurae a centro magnitudinis partis ſubmerſae, quando figura in aequilibrio exiſtit. Cum igitur poſuerimus in figura hac centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadere, per ſe patet, ſi in alio caſu centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis cadat, tum interuallum GO negatiue accipi debere, ita vt in huius modi caſibus ſtabilitas proditura ſit $= M(\frac{AB^3}{12.AFB} - GO)$. Hic ſcilicet figuras ex materia vtcunque heterogenea conſtantes conſideramus, ita vt centrum grauitatis G tam ſupra quam infra centrum magnitudinis O incidere poſſit; ſin autem figura ex materia homogenea confecta ponatur, tum neceſſario centrum grauitatis ſupra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadere oportet. Huius modi igitur caſibus ſtabilitas ſemper ex hac poſteriore formula erit aeſtimanda, in qua GO negatiuo ſigno afficitur.

Coroll. 2.

215. Quoties ergo centrum grauitatis infra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadit, tum ſitus aequilibrii ſemper erit firmus et ſtabilis, quia expreſſio ſtabilitatis negatiua fieri nequit.

Coroll. 3.

216. Sin autem centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadit, tum ſitus aequilibrii non erit ſtabilis, niſi fuerit $\frac{AB^3}{12.AFB} > GO$. At ſi fuerit $\frac{AB^3}{12.AFB} < GO$, ſitus erit inſtabilis ſeu labilis, et figura vel minime ex

ſitu aequilibrii declinata prolabetur, aliumque ſitum aequilibrii quaeret.

Coroll. 4.

217. Maximam igitur ſitus aequilibrii habebit ſtabilitatem, ſi centrum grauitatis profundiſſime, centrum magnitudinis autem in loco maxime eleuato fuerit ſitum; atque praeterea ſi ſectio aquae ſeu recta AB fuerit maxima: manente ſcilicet eodem figurae pondere M, quo ipſo magnitudo partis ſubmerſae etiam inuariata manet.

Coroll. 5.

218. In corporibus ergo aquae innatantibus, quo profundius pondera collocentur, eo maiorem ea ſtabilitatem in ſitu aequilibrii acquirent. Magis vero etiam ſtabilitas augebitur, ſi alis adiungendis ſectio aquae amplior reddatur.

Scholion 2.

219. Quamuis haec propoſitio tantum ad ſuperficies planas aquae verticaliter inſidentes ſit accommodata, tamen ea latius patet, et corpora cylindrica in ſe complectitur. Si enim corpus cylindricum aquae ita innatet, vt eius axis longitudinalis horinzontalem ſitum teneat, tum eius ſtabilitas reſpectu axis horizontalis eiusdem ex ſtabilitate cuiusque ſectionis transverſalis, quae eſt ſuperficies plana verticalis, cognoſcetur. His igitur caſibus AFB erit ſectionis mediae corporis cylindrici pars aquae ſubmerſa, G totius corporis centrum grauitatis, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae: M vero pondus totius corporis, et AFB vt ante cuiusque ſectionis pars aquae ſub-

ſubmerſa. Praeterea etiam ex eadem propoſitione pro corporibus alius figurae conſectaria deduci poſſent, ſed de iis in ſequentibus, cum omnis generis corpora ex inſtituto contemplabimur, fuſius tractabimus.

PROPOSITIO 21.
Problema.

220. *Si figura plana aquae in ſitu verticali inſidens ex ſitu aequilibrii aliquantillum declinetur, determinare motum, quo ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituet.* Tab. XIII. fig. 1.

Solutio.

Sit figura plana A F B aquae inſiſtens in aequilibrio, cum praeter rectam per centrum grauitatis G ad planum figurae normaliter ductam etiam recta M G N fuerit horizontalis. Sit pondus figurae $=$ M atque A B ſectio aquae et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae A F B. Inclinetur nunc aliquantillum figura ex ſitu aequilibrii vt recta $a\,b$ fiat ſectio aquae, et angulus A C a fiat $= d\,w$. His poſitis ex prop. praeced. momentum reſtituens figuram in aequilibrium, quo ſcilicet figura circa axem horizontalem per G ad planum ipſius normaliter ductum circumvertetur, obtinebitur, ſi ſtabilitas ante inuenta per angulum inclinationis $d\,w$ multiplicetur, eritque propterea hoc momentum ad corporis reſtitutionem tendens $=$ M $d\,w\,(GO + \frac{AB^3}{12.AFB})$ Quoties igitur haec expreſſio fuerit affirmatiua, figura in ſitum aequilibrii reſtituetur, atque reſtitutio fiet rotando circa centrum grauitatis G, dum interea ipſum centrum grauitatis G recta vel aſcendit vel deſcen-

descendit, prout conditio ea, qua semper aequalis pars aquae debet esse submersa, requirit. Cum ergo hoc momentum angulo percurrendo sit proportionale, figura eodem modo in statum aequilibrii perueniet, quo pendulum descendendo ad situm verticalem accedens. Hancobrem figura oscillationes instar penduli perficiet, donec totus motus a resistentia fuerit consumtus. Iste motus oscillatorius ergo cognoscetur, si longitudo penduli simplicis determinetur, quod suas oscillationes aequalibus temporibus absoluat. Ad hoc vero pendulum assignandum necesse est, vt momentum inertiae figurae respectu axis circa quem gyratur constet. Sit igitur S momentum inertiae figurae seu aggregatum omnium particularum per quadrata distantiarum suarum ab axe rotationis multiplicatarum, qui axis ad figuram normaliter per G transit. Hinc igitur erit vis gyratoria $= \frac{M d w}{S} (GO + \frac{AB^3}{12 . AFB})$, ex qua prodibit longitudo penduli simplicis, quod oscillationes isochronas cum oscillationibus figurae absoluit $= \frac{12 S . AFB}{12 M \cdot GO \cdot AFB + M . AB^3}$. Prodit enim perpetuo longitudo penduli simplicis isochroni, si angulus inclinationis per vim gyratoriam diuidatur, id quod facile ex principiis mechanicis colligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

221. Longitudo ergo penduli isochroni aequatur momento inertiae figurae respectu axis gyrationis diuiso per stabilitatem figurae respectu eiusdem axis, prout quidem stabilitatem exprimere constituimus.

Co-

Coroll. 2.

222. Manente igitur eadem figurae ſtabilitate in ſuo aequilibrii ſitu oſcillationes eo erunt celeriores, quo minus fuerit momentum inertiae figurae; maximo autem exiſtente hoc momento, oſcillationes tardiſſimae fient.

Coroll. 3.

223. Manente autem eodem figurae momento inertiae oſcillationes eo crebriores euenient, quo maior fuerit figurae ſtabilitas; minuta autem ſtabilitate, oſcillationes ſegniores perficientur.

Coroll. 4.

224. Ad motum oſcillatorium ergo definiendum praeter pondus et figuram et centrum grauitatis, quae ad ſtabilitatem cognoſcendam ſufficiunt, noſſe oportet momentum inertiae figurae reſpectu axis, circa quem oſcillationes fiunt.

Scholion.

225. Quo tam ſtabilitas quam motus oſcillatorius huiusmodi figurarum aquae innatantium clarius cognoſcatur, iuuabit caſus ſpeciales conſideraſſe, in quibus quantitates adhuc indeterminatas determinari et inter ſe comparari licebit. Determinatas igitur figuras contemplabimur, quae aquae inſidant, vbi quidem ſufficiet figuram partis ſubmerſae poſuiſſe, cum figura partis ſupra aquam eminentis in computum non ingrediatur: Ex figura vero partis ſubmerſae ſimul centrum eius magnitudinis datur. Conveniet au-

tem tantum figuras regulares, quae circa verticalem EF partes similes et aequales habeant, inuestigasse, ne ante opus sit situm aequilibrii inuenire. Ponemus igitur centrum grauitatis huiusmodi figurarum in ipsa verticali EF, quae est diameter, situm, quo aequilibrium habeatur, si ista diameter verticalem situm obtinuerit. Eiusmodi ergo propositiones aliquot hic subiungemus, antequam ad ipsa corpora examinanda progrediamur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

Tab. XIII. fig. 2. 226. *Si figurae aquae insidentis pars submersa* AFB *fuerit triangulum isosceles; determinare stabilitatem huius situs, atque motum oscillatorium, quem figura, si ex hoc situ aliquantillum declinetur, acquiret.*

Solutio.

Ex vertice F in basin AB, quae sectionem aquae repraesentat, ducatur perpendicularis FC basin AB bifariam secans in C. Ponatur $AC = BC = a$; et perpendiculum $FC = b$; erit pars submersa $AFB = ab$, eiusque centrum magnitudinis in O, vt sit $CO = \frac{1}{3}b$. Sit porro G centrum grauitatis totius figurae, atque $CG = h$, erit $GO = CG - CO = h - \frac{1}{3}b$. Vocetur deinde massa seu pondus totius figurae $= M$, et momentum eius respectu axis normaliter ad planum AFB per G transeuntis $= S$. His igitur positis erit stabilitas huius situs aequilibrii $= M\left(h - \frac{1}{3}b + \frac{2a^2}{3b}\right) = \frac{M(2a^2 - b^2 + 3bh)}{3b}$. Penduli vero simplicis isochroni cum oscillationibus huius figurae oscillantis lon-

longitudo erit $= \frac{3bS}{M(2a^2 - b^2 + 3bb)}$, ſi quidem ſtabilitas affirmatiuum habuerit valorem. Q. E. I.

Coroll. 1.

227. Si ergo fuerit $2a^2 + 3bb > b^2$ ſeu $b > \frac{b^2 - 2a^2}{3b}$, ſitus iſte aequilibrii erit ſtabilis, eoque maior erit ſtabilitas, quo maior fuerit iſte exceſſus.

Coroll. 2.

228. Hic porro ſitus aequilibrii erit indifferens, ſi fuerit $2a^2 + 3bb = b^2$; ſin autem fuerit $2a^2 + 3bb < b^2$, tum ſitus erit labilis, eumque figura tenere non poterit, ſed vel tantillum ex eo deturbata prolabetur.

Exemplum.

229. Si integra figura fuerit triangulum iſoſceles MFN. conſtans ex materia vniformi, cuius ad aquam grauitas ſpecifica teneat rationem $p : q$. ponanturque ML $=$ LN $=$ A, et FL $=$ B, tum AC $=$ BC $= a$ et FC $= b$, erit $ab : AB = p : q$, atque ob $a : b =$ A : B erit $a = A\sqrt{\frac{q}{q}}$ et $b = B\sqrt{\frac{p}{q}}$. Deinde vero erit LG $= \frac{1}{3}$B, atque ob LC $=$ B $-$ B$\sqrt{\frac{p}{q}}$ habebitur CG $= b =$ B$\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}$B. Manente autem maſſa ſeu pondere figurae $=$ M, erit momentum $S = \frac{M(MN^2 + MF^2 + NF^2)}{36}$ (170.) $= \frac{M(3A^2 + B^2)}{18}$. His ſubſtitutis reperietur ſtabilitas trianguli iſoſcelis MFN aquae innatantis, ita vt baſis MN horizontaliter extra aquam emineat, $= \frac{M(2(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 2B^2)}{3B}$. Quae ſi fuerit

 affir-

affirmatiua, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{B(3A^2+B^2)}{12(A^2+B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 12B^2}$.

Coroll. 1.

230. Stabilis ergo erit iſte trianguli aquae inſidentis ſitus aequilibrii, ſi fuerit $(A^2+B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} > B^2$ ſeu $\frac{p}{q} > \frac{B^4}{(A^2+B^2)^2}$ hoc eſt $\frac{p}{q} > \frac{LF^4}{MF^4}$. Labilis vero erit ſi $\frac{p}{q} < \frac{LF^4}{MF^4}$.

Coroll. 2.

231. Si triangulum fuerit aequilaterum, erit $B = A\sqrt{3}$; atque ſtabilitas eius in hoc aequilibrii ſitu prodibit $= \frac{2AM(4\sqrt{\frac{p}{q}} - 3)}{3\sqrt{3}}$. Longitudo vero penduli iſochroni erit $= \frac{A\sqrt{3}}{8\sqrt{\frac{p}{q}} - 6}$.

Coroll. 3.

232. Hoc ergo caſu ſitus aequilibrii erit ſtabilis, ſi $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{3}{4}$, hoc eſt ſi $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Poſita ergo grauitate ſpecifica aquae $q = 1000$, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $p > 562\frac{1}{2}$: inſtabilis autem erit, ſi grauitas ſpecifica trianguli minor eſt quam $562\frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

233. Si angulus ad F fuerit rectus, vt ſit $B = A$, erit ſtabilitas $= \frac{2AM(2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1)}{3}$. Situs ergo aequilibrii erit ſtabilis, ſi, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$, trianguli

anguli grauitas ſpecifica maior fuerit quam 250. Sin autem trianguli grauitas minor ſit quam 250, ſitus aequilibrii erit inſtabilis. Longitudo vero penduli iſochroni illo caſu fiet $= \frac{A}{6\sqrt{\frac{p}{q}} - 3}$.

PROPOSITIO 23.

Problema.

234. *Si figura aquae inſidens fuerit triangulum iſoſceles* FMN *baſem* MN *ſub aqua in ſitu horizontali ſectioni aquae* AB *parallelo habens poſitam; ſeu potius, ſi pars ſubmerſa* AMNB *fuerit trapezium, in quo latera* AB *et* NM *ſunt inter ſe parallela, angulique ad* M *et* N *aequales: determinare ſtabilitatem qua iſte ſitus aequilibrii conſeruatur, motumque oſcillatorium, quem eiusmodi figura, ſi aliquantillum ex ſitu aequilibrii deturbetur acquiret.* Tab. XIIII. fig. 1.

Solutio.

Ducta recta verticali CL, quae tam ſectionem aquae AB, quam baſin MN biſecet, in hac poſitum erit centrum magnitudinis partis ſubmerſae O. Quare neceſſe eſt, vt in eandem rectam centrum grauitatis totius figurae incidat, quod ſit in G. Ponatur $AC = BC = a$: $ML = LN = c$: $CL = b$: et $CG = h$. Centrum magnitudinis vero partis ſubmerſae O ita ſecundum praecepta ſtatica reperietur vt ſit $CO = \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$; erit ergo $GO = h - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$. Denotet preterea M maſſam totius figurae, atque S eiusdem momentum inertiae reſpectu axis ad figuram normaliter per centrum grauitatis G tranſeuntis. Cum ergo pars immerſa AMNB ſit $= b(a+c)$, erit $\frac{AB^3}{12AMNB} = \frac{2a^3}{3b(a+c)}$ vnde

vnde prodit ſtabilitas figurae in iſto ſitu aequilibrii $= M \left(b - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)} + \frac{2a^3}{3b(a+c)}\right) = \frac{M(3bb(a+c)-b^2(a+2c)+2a^3)}{3b(a+c)}$. Longitudo denique penduli ſimplicis cum oſcillationibus figurae iſochroni erit $= \frac{3b(a+c)S}{M(3bb(a+c)-b^2(a+2c)+2a^3)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

235. Huiusmodi ergo figurae, cuius pars aquae ſubmerſa eſt AMNB, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $3bb(a+c) - b^2(a+2c)+2a^3 > 0$: hoc eſt ſi fuerit $b > \frac{b^2(a+2c)-2a^3}{3b(a+c)}$. Atque eo maior erit ſtabilitas, quo maiorem habuerit valorem iſta expreſſio $3bb(a+c)-b^2(a+2c)+2a^3$ ſeu iſta $b - \frac{b^2(a+2c)+2a^3}{3b(a+c)}$.

Coroll. 2.

236. Contra vero ſi fuerit $b < + \frac{b^2(a+2c)-2a^3}{3b(a+c)}$ figurae ſitus iſte aequilibrii erit inſtabilis et ſubuerſioni obnoxius. Indifferens vero erit aequilibrii ſitus, ſi fuerit $b = \frac{b^2(a+2c)-2a^3}{3b(a+c)}$ in quo nullam omnino habebit ſtabilitatem.

Coroll. 3.

237. Si fiat $c = a$, pars figurae ſubmerſa erit rectangulum; his igitur caſibus erit ſtabilitas, qua figura in hoc ſitu perſiſtit $= M\left(b - \frac{b}{2} + \frac{aa}{3b}\right)$.

Coroll. 4.

238. Si ponatur $c = 0$, pars ſubmerſa fiet triangulum iſosceles, qui eſt caſus in praecedente propoſitione tractatus; reperitur autem ſtabilitas omnino vt ante $M\left(b - \frac{b}{3} + \frac{2aa}{3b}\right)$.

Exemplum.

239. Sit tota figura aquae innatans triangulum iſoſceles ex materia vniformi conſtans, cuius grauitas ſpecifica

fica ad aquam teneat rationem $p:q$. Ponatur $ML = NL = A$; et perpendiculum $FL = B$; erit ergo $c = A$; et $FC = B - b$. Quamobrem habebitur $FL.ML : FC.AC = q : q-p$ hoc eſt $AB : a(B-b) = q : q-p$ atque ob $FC : AC = FL : ML$; erit $B - b : a = B : A$ ſeu $a = \frac{A(B-b)}{B}$, quo valore in illa analogia ſubſtituto erit $AB^2 : A(B-b)^2 = q : q-p$ ſeu $q(B-b)^2 = (q-p)B^2$; vnde oritur $pB^2 = q(2Bb - bb)$ ſiue $b = B - \frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. hincque $a = \frac{A\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Cum vero ſit $FG = \frac{2}{3}B$: erit $CG = h = \frac{2}{3}B - \frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Si nunc haec omnia ſubſtituantur in formula ſtabilitatem huius ſitus exprimente, reperietur ipſa ſtabilitas $= \frac{2M(q-p)}{3Bp}\left((A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} - B^2\right)$. Momentum autem inertiae huius figurae eſt vt ante $= \frac{M(3A^2+B^2)}{18}$. Quocirca ſi ſtabilitas fuerit affirmatiua, erit longitudo penduli ſimplicis

$$\text{iſochroni} = \frac{Bp(3A^2+B^2)}{12(q-p)(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 12(q-p)B^2}.$$

Coroll. 2.

240. Huius igitur trianguli hac ratione aquae inſidentis ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} > B^2$; ſeu $\frac{q-p}{q} > \frac{B^4}{(A^2+B^2)^2}$ hoc eſt ſi $\frac{q}{q} < \frac{A^2(A^2+2B^2)}{(A^2+B^2)^2}$. Inſtabilis autem erit ſitus iſte aequilibrii, ſi fuerit $\frac{p}{q} > \frac{A^2(A^2+2B^2)}{(A^2+B^2)^2}$

Coroll. 1.

231. Si haec conferantur cum probl. praeced. (230) apparebit idem triangulum duplicem aequilibrii ſitum habere poſſe ſtabilem, ſi fuerit $A^4 + 2A^2B^2 > B^4$ ſeu $A^2 > B^2(\sqrt{2} - 1)$, hoc eſt ſi fuerit $FM > FL\sqrt[4]{2}$. Quod

eue-

euenit, si fuerit angulus $MFL > 33^\circ$ seu ang. $MFN > 66^\circ$. Hoc vero accidente erunt ipsius $\frac{p}{q}$ limites isti $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FL^4}{FM^4}$; inter quos semper continetur casus quo $p:q = 1:2$; seu quo figura duplo leuior est quam aqua.

Coroll. 3.

242. Intelligitur porro fieri posse, vt neuter situs aequilibrii trianguli isoscelis, quo basis est horizontalis, habeat stabilitatem; quod accidit si fuerit ang. $MFN > 66^\circ$; atque $\frac{p}{q}$ inter hos limites $\frac{FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ contineatur, quorum ille est maior, hic vero minor. Inter hos autem limites continetur iterum semper casus, quo $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

243. Abeat triangulum isosceles in aequilaterum; quo casu fit $B = A\sqrt{3}$. Hanc obrem erit stabilitas trianguli aequilateri modo in figura expresso aquae insidentis $= \frac{2AM(q-p)}{3p\sqrt{3}}\left(4\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 3\right)$.

Coroll. 5.

244. Huius ergo trianguli aequilateri tali situ aquae insidentis situs erit stabilis, si fuerit $\sqrt{\frac{q-p}{q}} > \frac{3}{4}$ seu $\frac{q-p}{q} > \frac{9}{16}$, id quod accidit si fuerit $\frac{p}{q} < \frac{7}{16}$. Posita igitur grauitate specifica aquae $= 1000$; situs erit stabilis, si trianguli grauitas specifica fuerit $< 437\frac{1}{2}$.

Coroll. 6.

245. Si angulus MFN fuerit rectus, seu $B = A$; erit stabilitas $= \frac{2AM(q-p)}{3p}\left(2\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 1\right)$, situs aequilibrii ergo sta-

ſtabilis erit, ſi fuerit $\frac{q-p}{q} > \frac{1}{4}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{3}{4}$. Hoc ergo accidit, ſi grauitas ſpecifica trianguli fuerit < 750, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$.

Scholion.

246. Quamuis hae propoſitiones figuras tantum planas ſcilicet triangula reſpiciant, tamen eae quoque, vti iam notaui, ad corpora accommodari poſſunt, quorum omnes ſectiones transuerſales ſunt triangula aequalia iſoſcelia; cuius modi ſunt prismata triangularia. Ope variorum igitur huiusmodi priſmatum, quorum baſes ſunt triangula iſoſcelia varii generis veritas eorum, quae ex iſtis propoſitionibus deduximus, per experientiam comprobari poterit. In his ceterum propoſitionibus eos tantum triangulorum iſoſcelium aquae inſidentium ſitus examinauimus, in quibus baſes horizontalem obtinent ſitum, praetermiſſis reliquis aequilibrii ſitibus, cum ad calculos nimis prolixos euitandos, tum vero praecipue, quia de ſtabilitate horum reliquorum ſituum ex caſibus pertractatis ſatis tuto iudicare licet. In ſequentibus enim demonſtrabitur inter plures aequilibrii ſitus, quibus corpus quodque aquae innatare poteſt, alternos eſſe ſtabiles, alternos inſtabiles. Quare cum hic eorum caſuum praecipuorum, quibus triangula iſoſcelia aquae innatare poſſunt, ſtabilitatem determinauerimus, de reliquis caſibus facile iudicium ferri poterit Si enim ſtatus quidam aequilibrii fuerit inſtabilis, ii ſitus, qui vtrinque proxime occurrent, certo erunt ſtabiles, niſi duo in vnam coaleſcant, quo caſu ſitus aequilibrii erit indifferens.

O PRO-

PROPOSITIO 24.
Problema.

247. *Si figurae aquae insidentis pars submersa* AIHB
Tab. XIIII. fig. 2. *fuerit quadrilaterum rectangulum; determinare stabilitatem, qua figura in hoc aequilibrii situ perseuerat; atque motum oscillatorium, quo figura ex hoc situ parumper declinata nutabit.*

Solutio.

Ducatur verticalis CL parallelogrammum rectangulum AIHB bifariam secans, in cuius puncto medio O situm erit centrum magnitudinis partis submersae; in eandem igitur cadet centrum grauitatis totius figurae, quod sit in G. Ponatur nunc $AC = BC = \frac{a}{2}$; seu $AB = a$ atque $AI = BH = CL = b$; et $CG = h$; erit $CO = \frac{1}{2}b$ atque $OG = h - \frac{1}{2}b$; massa denique totius figurae sit $= M$. Stabilitas igitur, qua figura in hoc aequilibrii situ persistit, quae generaliter est $= M\left(GO + \frac{AB^3}{12 \cdot AIHB}\right)$, erit pro hoc casu $= M\left(h - \frac{1}{2}b + \frac{a^2}{12b}\right) = \frac{M(a^2 - 6bb + 12bh)}{12b}$. At ad oscillationes definiendas, quas figura circa hunc aequilibrii situm absoluet, sit momentum inertiae figurae respectu puncti $G = S$, hincque reperietur longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{12Sb}{M(a^2 - 6bb + 12bh)}$, ex quo tempus, quo minimae vacillationes absoluuntur, determinatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

248. Quo ergo iste aequilibrii situs conseruetur, necesse est vt $a^2 - 6bb + 12bh$ sit quantitas positiua, id quod

quod euenit si fuerit $b > \frac{6bb - aa}{12b}$. At si fuerit $b = \frac{6bb - aa}{12b}$ tum aequilibrii situs erit indifferens, labilis vero et subuersioni obnoxius erit, si fuerit $b < \frac{6bb - aa}{12b}$.

Coroll. 2.

249. Bacillus igitur admodum gracilis aquae in situ verticali insidere poterit, si fuerit $b > \frac{b}{2}$ ob crassitiem a fere euanescentem. Hoc ergo eueniet, si eius centrum grauitatis in inferiorem partis submersae medietatem seu infra punctum medium eius cadit.

Coroll. 3.

250. Nisi ergo inferior bacilli pars sit notabiliter ponderosior, quam pars superior, bacillus in aqua situm verticalem tenere non poterit. Ex formula autem inuenta determinari licebit, quantum plumbi seu alius materiae aqua grauioris bacillo in inferiore parte sit adiungendum, quo situs verticalis subsistat.

Exemplum.

251. Sit tota figura aquae insidens parallelogrammum EIHF ex materia vniformi constans, cuius grauitas specifica ad aquam teneat rationem $p:q$: sitque eius longitudo $EF = IH = A$, et latitudo $EI = FH = B$; erit $a = A$; et $B:b = q:p$ vnde fit $b = \frac{Bp}{q} = CL$; at $KG = LG = \frac{1}{2}B$ hinc igitur prodibit $CG = CL - LG = \frac{Bp}{q} - \frac{1}{2}B = b$. His in formula stabilitatem exprimente substitutis reperietur $\frac{M(A^2q^2 - 6B^2pq + 6B^2p^2)}{12Bpq}$, qua expressione stabilitas huius aequilibrii situs definitur. Momentum inertiae vero

 huius

huius figurae respectu eius centri grauitatis G est $= \frac{M(A^2+B^2)}{12}$ ex quo obtinebitur longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{Bpq(A^2+B^2)}{A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2}$, vnde oscillationes huius aequilibrii situs, si quidem fuerit stabilis, cognoscentur.

Coroll. 1.

252. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis requiritur vt sit $A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2 > 0$ seu $A > \frac{B}{q} \sqrt{(6pq-6pp)}$. Data ergo materiae, ex qua rectangulum constat grauitate specifica, hinc ratio laterum A et B innotescit, qua fit vt rectangulum latere B verticali, et latere A horizontali aquae innatare queat.

Coroll. 2.

253. Ex his simul intelligitur idem hoc rectangulum aquae innatare posse latere A existente verticali, B vero horizontali, si fuerit $B > \frac{A}{q} \sqrt{(6pq-6pp)}$.

Coroll. 3

254. Horum duorum igitur aequilibrii situum vterque poterit esse stabilis, si tam $\frac{A}{B}$ quam $\frac{B}{A}$ maius fuerit quam $\frac{\sqrt{(6pq-6pp)}}{q}$. Hoc autem accidere nequit, nisi sit $q > \sqrt{(6pq-6pp)}$ seu $qq > 6pq-6pp$. Id quod accidit duplici modo, primo scilicet si fuerit $\frac{q}{p} > 3+\sqrt{3}$, secundo si fuerit $\frac{q}{p} < 3-\sqrt{3}$.

Coroll. 4.

255. Quo ergo parallelogrammum rectangulum vtroque situ aquae firmiter innatare possit, materiae ex

qua

qua conſtat grauitas ſpecifica vel maior eſſe debebit quam 788. $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$ poſita aquae grauitate 1000. Horum caſuum vtroque latera parallelogrammi ita inter ſe adornari poſſunt, vt vterque aequilibrii ſitus fiat ſtabilis.

Coroll. 5.

256. Si igitur materiae, ex qua rectangulum conficitur, grauitas ſpecifica contineatur inter hos limites 788 $\frac{2}{3}$ et 211 $\frac{1}{3}$, tum nullum rectangulum confici poteſt, quod vtroque ſitu aquae firmiter inſidere queat.

Coroll. 6.

257. At ſi data fuerint rectanguli latera A et B requiritur ad hoc vt rectangulum, latere A exiſtente horizontali et B verticali, aquae firmiter inſidere queat, vt ſit vel $\frac{q}{p} > \frac{3B^2 + B\sqrt{(9B^2-6A^2)}}{A^2}$ vel $\frac{q}{p} < \frac{3B^2 - B\sqrt{(9B^2-6A^2)}}{A^2}$, ſiue neceſſe eſt vt ſit vel $p < \frac{q(3B - \sqrt{(9B^2-6A^2)})}{6B}$ vel $p > \frac{q(3B + \sqrt{(9B^2-6A^2)})}{6B}$.

Coroll. 7.

258. Si ergo rectangulum abeat in quadratum, fiatque $B = A$, tum ſitus aequilibrii, quo alterum latus horizontale alterum verticale exiſtit, erit ſtabilis, ſi fuerit vel $p < \frac{q(3-\sqrt{3})}{6}$ vel $p > \frac{q(3+\sqrt{3})}{6}$ hoc eſt, ſi denotante 1000, grauitatem aquae, grauitas ſpecifica quadrati vel maior fuerit quam 788 $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$.

Scholion.

259. Quae in hac propoſitione ſunt determinata, etiamſi ad figuras tantum planas pertinere videantur, tamen

men ad omnis generis parallelepipeda rectangula pertinent; ex iis enim, quouis parallelepipedo proposito, diiudicare licet, quanta stabilitate super quaque hedra aquae innatare possit. Deinde vltimum exempli corollarium ad cuborum natatum super aqua inuestigandum est apprime accommodatum, si quidem cubi vel ex materia homogenea sint confecti, vel saltem centrum grauitatis in sui medio habeant situm. Intelligitur autem eiusmodi cubos aquae in situ erecto, quo binae hedrae sunt horizontales, reliquae verticales, innatare non posse, nisi eorum grauitas specifica vel maior fuerit quam $788\frac{2}{3}$ vel minor quam $211\frac{1}{3}$, posita aquae grauitate specifica $= 1000$. Quoties ergo cubi grauitas specifica inter hos limites continetur, maior scilicet est quam $211\frac{1}{3}$ minor tamen quam $788\frac{2}{3}$, tum talis cubus situ erecto aquae neutiquam insidere poterit, sed situm induet alium, quo vel planum diagonale, vel ipsa diagonalis situm horizontalem vel verticalem occupabit. Quanta vero in istius modi sitibus futura sit stabilitas, ex sequente propositione colligere licebit, in qua quidem tantum quadratum aquae ita insidens, vt altera diagonalis horizontalem, altera verticalem situm habeat, examini sum subiecturus.

PROPOSITIO 25.
Problema.

Tab. XIIII. fig. 3 et 4. 260. *Quadrati* EIHF *quod aquae ita insidit, vt eius diagonalis* EH *situm verticalem obtineat, stabilitatem definire, qua in hoc situ perseuerat, atque motum oscillatorium circa hunc aequilibrii situm.*

Solu-

Solutio.

Duplex hic caſus eſt euoluendus, prout vel maior vel minor pars quam dimidia aquae immergitur, quorum illud accidit, ſi fuerit $p > \frac{1}{2}q$ hoc vero ſi $p < \frac{1}{2}q$, denotante $p:q$ rationem quam tenet pondus quadrati ad pondus aequalis voluminis aquae. Sit autem latus quadrati $= A$; et poſito quadrati centro grauitatis in G ſit HG $= b$. His praemiſſis in genere conſideremus primo caſum quo eſt $p < \frac{1}{2}q$, atque pars ſubmerſa ſit triangulum AHB, ſectione aquae exiſtente AB. Erit ergo AC. CH ſeu $AC^2 : A^2 = p:q$ ideoque $AC = CH = A\sqrt{\frac{p}{q}}$, centrum grauitatis partis ſubmerſae vero cadet in O, vt ſit $HO = \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{p}}$. Quamobrem erit $GO = -b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{4}}$. Hinc igitur prodibit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M(-b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}}) = M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)$. Denique poſito momento inertiae quadrati reſpectu centri grauitatis $G = S$, erit longitudo penduli ſimplicis $= \frac{S}{M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)}$, quod oſcillationes iſochronas vacillationibus quadrati abſoluet. Q. E. Alterum fig. 3.

Sit nunc $p > \frac{1}{2}q$, quo caſu maior pars AIHFB quam dimidia aquae immergitur exiſtente AB ſectione aquae. Erit ergo $A^2 - AC^2 : A^2 = p:q$, et diuidendo $AC^2 : A^2 = p - p : q$ vnde fit $AC = CE = A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$ atque $CH = A\sqrt{2} - A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$. Ex his inuenitur centrum magnitudinis partis ſubmerſae in O ita vt ſit $HO = A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\frac{A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{p\sqrt{q}}$ hincque erit $GO = -b + A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}}$ ipſa vero pars ſubmerſa erit $= \frac{A^2 p}{q}$. Quocirca ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit fig. 4.

$= M$

$=M(-b+A\sqrt{2}-\frac{Aq}{p\sqrt{2}}+\frac{4A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}})$ per quam si diuidatur momentum figurae respectu centri grauitatis G, quod sit S, prodibit longitudo penduli simplicis, quod oscillationes circa hunc aequilibrii situm indicabit. Q. E. Alterum.

Coroll. 1.

261. Si centrum grauitatis quadrati cadat in eius punctum medium, quo casu fit $b=\frac{A}{\sqrt{2}}$; erit casu priore quo $p<\frac{1}{2}q$ stabilitas $=AM(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}-\frac{1}{\sqrt{2}})$: posteriore vero casu, quo $p>\frac{1}{2}q$ stabilitas erit $=AM\frac{(q-p)}{p}(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{q-p}{q}}-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Coroll. 2.

fig. 3. 262. Quadratum ergo ex materia vniformi constans, quod plusquam duplo leuius est quam aqua, in situ diagonalis verticali aquae firmiter insidebit, si fuerit $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoc est si fuerit $\frac{p}{q}>\frac{9}{32}$. Posita ergo aquae grauitate specifica 1000, stabilitatem habebit iste aequilibrii situs, si fuerit quadrati grauitas specifica minor quam 500, maior vero quam $281\frac{1}{4}$.

Coroll. 3.

fig. 4. 263. Quadratum vero ex materia plus quam duplo graviore quam aqua constans in situ diagonalis verticali firmiter aquae innatabit, si fuerit $\frac{q-p}{q}>\frac{9}{32}$ seu $\frac{p}{q}<\frac{23}{32}$. Hoc ergo accidit, si eius grauitas specifica fuerit maior quam 500, minor vero quam $718\frac{3}{4}$.

Coroll. 4.

264. Ante autem iuuenimus quadratum aquae ita innatare non posse, vt bina latera teneant horizontalem, bina

bina vero verticalem situm, si eius grauitas specifica contineatur intra limites $211\frac{1}{3}$ et $788\frac{2}{3}$. Quamobrem eiusmodi quadrata, quorum grauitas specifica continetur vel intra hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$ vel intra hos $788\frac{2}{3}$ et $718\frac{3}{4}$, neque situ erecto neque diagonali verticaliter posita aquae innatare possunt.

Scholion.

265. Hinc diiudicari possunt natationes prismatum ex materia homogenea confectorum, quorum bases sunt quadrata, in aqua si quidem axes situm teneant horizontalem siue bases verticaliter sint positae. Triplici enim modo eiusmodi prismata aquae insidebunt, pro varia grauitatis specificae ratione. Primo scilicet hedrae binae horizontalem, binae vero verticalem situm tenebunt, si prismatis grauitas specifica vel minor fuerit quam $211\frac{1}{3}$ vel maior quam $788\frac{2}{3}$. Secundo duorum planorum diagonalium alterum verticaliter alterum vero horizontaliter erit positum, si prismatis grauitas specifica contineatur inter limites $281\frac{1}{4}$ et $718\frac{3}{4}$. Neutro denique horum modo, sed situ ad vtrumque obliquo prisma aquae innatabit, si eius grauitas specifica contineatur vel inter hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$, vel inter hos $718\frac{3}{4}$ et $788\frac{2}{3}$. Si quis hoc experimentis comprobare voluerit, prismata satis longa adhiberi oportet, quo eorum axes semper horizontaliter aquae incumbant: breuiora enim huiusmodi prismata ad istud negotium minus sunt idonea, cum ea pluribus quam tribus dictis modis aquae innatare queant, eo quod alii etiam axes inter natandum situm horizontalem constanter seruare possint, quae varietas in longioribur locum non habet.

P PRO-

PROPOSITIO 26.
Problema.

Tab. XV. fig 1. 266. *Determinare ſtabilitatem, qua figura quaecunque curuilinea* AFB *circa axem* FC *vtrinque partes ſimiles et aequales habens in ſitu aequilibrii aquae inſidet.*

Solutio.

Sit AFB pars aquae immerſa et AB ſectio aquae, erit FC linea verticalis et ſimul diameter orthogonalis figurae, ita vt ſit $AC = BC$. Denotet M totius figurae maſſam, eiusque centrum grauitatis ſit in G, exiſtente $FG = b$. Ponatur porro $FC = x$ et $AC = BC = y$, ita vt aequatio inter x et y naturam curuae propoſitae exprimat. Sit iam O areae AFB aquae ſubmerſae centrum magnitudinis, erit $FO = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$, ideoque $GO = \frac{\int yxdx}{\int ydx} - b$. Quia vero tota area aquae immerſa eſt $= 2\int ydx$, reperietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus $= M(\frac{\int yxdx}{\int ydx} - b + \frac{y^3}{3\int ydx})$, quae expreſſio in hanc commodiorem ſaepius poteſt transmutari $M(\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx} - b)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

267. Quoties ergo $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx}$ maius eſt quam b, toties iſte aequilibrii ſitus erit ſtabilis, eoque ſtabilior, quo maior fuerit exceſſus, $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx} - b$.

Coroll. 2.

268. At ſi fuerit $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx}$ vel aequale vel etiam minus quam b, tum illo caſu aequilibrii ſitus erit indifferens, hoc vero adeo inſtabilis vt minimum declinatus ſubuertatur.

Exem-

Exemplum 1.

269. Sit figura aquae immerſa AFB ſegmentum circuli cuius radius ſit $= a$, erit $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ et $y^2 + x^2 = 2ax$, vnde fit $y\,dy + x\,dx = a\,dx$. Hoc ergo caſu habebitur $\int y\,dx = \int dx \sqrt{(2ax - xx)}$; et $\int y(x\,dx + y\,dy) = \int a\,dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Quocirca ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit $= M(a - b)$ quae ideo erit conſtans ſiue maius ſiue minus ſegmentum circuli aquae immergatur.

Coroll. 1.

270. Dummodo ergo figurae centrum grauitatis infra centrum circuli cadat, aequilibrium firmiter conſeruabitur, idque eo magis, quo profundius ſitum erit centrum grauitatis.

Coroll. 2.

271. ſin autem centrum grauitatis in centrum circuli incidat, tum ſitus aequilibrii erit indifferens, quod euenit in cylindris homogeneis aquae horizontaliter incumbentibus.

Exemplum 2.

272. Sit figura aquae immerſa AFB ſectio conica quaecunque verticem in F et axem FC habens; erit $y = \sqrt{(2ax - nxx)}$ ſcilicet ſi n fuerit numerus affirmatiuus, curua erit ellipſis, ſin negatiuus hyperbola, at ſi $n = 0$ tum curua abibit in parabolam. Erit ergo $y^2 + x^2 = 2ax - (n-1)xx$, et $y\,dy + x\,dx = a\,dx - (n-1)x\,dx$. Hinc igitur obtinebitur ſtabilitas, qua iſte aequilibrii ſitus gaudet $= M\left(\frac{\int dx(a-(n-1)x)\sqrt{(2ax-nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax-nxx)}} - b\right) = M\left(a - b - \frac{(n-1)\int x\,dx\sqrt{(2ax-nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax-nxx)}}\right)$. Caſu autem quo $n = 0$ atque curua in parabolam abit, erit ſtabilitas $= M(a - b + \frac{3}{5}x)$.

Coroll.

Coroll. 1.

273. Si puncta A, F et B tanquam fixa confiderentur, atque ſtabilitates, quas variae ſectiones conicae per ea tranſeuntes inter ſe comparentur, ponatur $CF = c$ et $AC = f$. ob $x = c$ et $y = \surd(2ax - nxx) = f$; erit $a = \frac{f^2 + nc^2}{2c}$.

Coroll. 2.

274. Caſu ergo quo curua eſt circulus ſtabilitas erit $= M(\frac{ff + cc}{2c} - b)$. Caſu autem quo curua eſt parabola, erit ſtabilitas $= M(\frac{ff + \frac{6}{5}cc}{2c} - b)$. Maiorem ergo habet ſtabilitatem parabola quam circulus per eadem tria puncta tranſiens.

Coroll. 3.

275. Eſt autem generaliter ſatis prope $\frac{(n-1)\int x dx \surd(2ax - nxx)}{\int dx \surd(2ax - nxx)} = \frac{3(n-1)x}{5}$. Quamobrem ſtabilitas erit $= M(a - b - \frac{3(n-1)x}{5}) = M(\frac{ff + \frac{(6-n)}{5}cc}{2c} - b)$. Stabilitas ergo eo erit maior, quo minor fuerit n.

Coroll. 4.

276 At n non vltra datum limitem diminui poteſt, quia a affirmatiuum habere debet valorem, eſtque $a = \frac{ff + ncc}{2c}$ ergo ad ſummum fieri poteſt $n = \frac{-ff}{cc}$ quo caſu ſectio conica abit in triangulum iſoſceles AFB, quod ergo hunc aequilibrii ſitum firmius conſeruabit, quam vlla alia ſectio conica per eadem puncta A, F, B tranſiens, atque centrum grauitatis in eodem puncto G habens.

Scholion

Scholion.

276. Abunde haec sufficere possunt ad stabilitatem, quae in quolibet aequilibrii situ inest, cognoscendam, si quidem corpus aequae innatans vel est figura plana tenuissima, vel instar talis considerari potest. Antequam autem ad stabilitatem corporum indagandam progrediar, proprietatem insignem quam plures eiusdem corporis aequilibrii situs ratione stabilitatis inter se tenent, proferam et demonstrabo.

PROPOSITIO 27.

Theorema.

277. *Si omnes situs, quibus figura data quaecunque in aqua aequilibrium tenere potest, considerentur, tum isti aequilibrii situs alternatim erunt stabiles, et instabiles.*

Demonstratio.

Pro quouis aequilibrii situ concipiatur per figurae centrum grauitatis ducta recta parallela sectioni aquae atque per hanc ipsam rectam per centrum grauitatis ductam innotescet aequilibrii situs: manente enim ista recta horizontali parallela, figura aquae eousque immergatur, donec pars debita sub aqua existat, quo facto habebitur situs aequilibrii. Ita in figura proposita A C *a c* designent rectae A *a*, B *b*, C *c*, D *d* per centrum grauitatis G ductae omnes aequilibrii situs, qui in hac figura dantur, dentur scilicet quatuor aequilibrii situs, in quibus sectiones aquae respectiue sint parallelae rectis A *a*, B *b*, C *c*, D *d*; quibus positis dico, si situs aequilibrii A *a* fuerit stabilis, tum Tab. XV. fig. 2.

 quo-

quoque ſitum ab hoc computando tertium Cc fore ſtabilem ſecundum vero Bb et quartum Dd fore inſtabiles. In hoc demonſtrando ita verſabor vt oſtendam inter duos ſitus ſtabiles neceſſario vnum ſitum inſtabilem contineri debere, pariter ac inter duos ſitus inſtabiles vnum ſtabilem, hoc enim probato veritas theorematis erit euicta. Sint igitur Aa et Cc duo aequilibrii ſitus ſtabiles inter ſe proximi, ſeu tales inter quos non detur alius ſitus ſtabilis. Si nunc figura ex ſitu Aa verſus ſitum Cc convertendo declinetur, tum primo quidem niſum habebit ſeſe in ſitum Aa reſtituendi, at ſi propius ad ſitum Cc peruenietur, tum figura niſum habebit ſeſe in ſitum aequilibrii Cc recipiendi. Quamobrem neceſſe eſt vt inter duos hos ſitus ſtabiles Aa et Cc vna exiſtat poſitio puta Bb, quam ſi figura tenet aequaliter ad vtrumque ſitum Aa et Cc propendeat, in hoc igitur ſitu dabitur aequilibrium, id vero inſtabile, quia figura tantillum ex eo declinata vel ad aequilibrii ſitum Aa vel ad Cc nititur; ex quo manifeſtum eſt, inter duos ſitus aequilibrii ſtabibiles neceſſario vnum aequilibrii ſitum inſtabilem contineri debere. Simili modo ſi ſint Bb et Dd duo aequilibrii ſitus inſtabiles, ſe immediate inſequentes, vterque ea praeditus erit proprietate, vt figura ſi ex vno ſitu verſus alterum declinetur, tum niſum habitura ſit recedendi ab illo aequilibrii ſitu; quamobrem neceſſario dabitur inter iſtos duos aequilibrii ſitus inſtabiles Bb et Dd, talis ſitus vti Cc, in quo figura vtrumque illum aequilibrii ſitum aequae auerſabitur; in hoc igitur ſitu figura aequilibrium tenebit, idque ſtabile quia figura vtrinque ex eo declinata niſu gaudet ſeſe in illum reſtituendi. Cum igitur tam inter

duos

duos ſitus ſtabiles vnus inſtabilis, quam inter duos inſtabiles vnus ſitus ſtabilis exiſtat, ſitus auquilibrii omnes tum ſtabiles tum inſtabiles ſe mutuo alternatim excipient. Q. E. D.

Coroll. 1.

278. In vnaquaque ergo figura aquae inſidente tot dabuntur aequilibrii ſitus ſtabiles, quot inſtabiles, et hanc obrem omnium aequilibrii ſituum numerus erit par.

Coroll. 2.

279. Nulla igitur figura pauciores duobus aequilibrii ſitus habere poteſt. Omnis enim figura vnum neceſſario habet ſitum ſtabilem et propterea vnum quoque inſtabilem.

Coroll. 3.

280. Definitis ergo pro quapiam figura omnibus ſitibus, quibus in aqua aequilibrium tenet, ſi de vnico conſtet, vtrum ſtabilis ſit an inſtabilis, ſimul de omnibus reliquis idem conſtabit.

Coroll. 4.

281. Interim tamen fieri poteſt, vt numerus aequilibrii ſituum in quapiam figura actu deprehendatur impar, id quod eueniet ſi duo aequilibrii ſitus proximi ſtabilis et inſtabilis in vnum confundantur, quo ſitus oritur, indifferens. Situs aequilibrii igitur indifferens ſpectari debet tanquam coniunctio duorum aequilibrii ſituum proximorum, ideoque pro duobus eſt numerandus.

Scho-

Scholion.

282. Veritas huius propoſitionis non ſolum ad figuras planas ſed etiam ad omnis generis corpora aquae innatantia patet. Quodcunque enim corpus aquae innatans, ſi in eandem plagam circumagatur tum alternatim ex ſitu aequilibrii ſtabili ad inſtabilem neceſſario peruenire debet, prout ex demonſtratione data intelligi licet; hocque modo res ſe habet in quamcunque plagam corpus circumagatur. Sed haec omnia clarius percipientur ex ſequentibus, vbi ſtabilitatem corporum quorumcunque aquae in aequilibrio inſidentium ſum inueſtigaturus.

Definitio.

283. Stabilitas reſpectu axis cuiusdam dati horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis eſt vis qua hoc corpus aquae in ſitu aequilibrii inſidens inclinationi circa eundem axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem reſiſtit.

Coroll. 1.

284. Stabilitas igitur reſpectu axis cuiusdam dati horizontalis per centrum grauitatis ducti aeſtimanda eſt ex momento preſſionis aquae, quo corpus angulo infinite paruo circa iſtum axem ex ſitu aequilibrii declinatum reſtituitur, diuiſo per ipſum illum angulum infinite paruum.

Coroll. 2.

285. In corporibus ergo aquae innatantibus ſtabilitas cuiusuis aequilibrii ſitus infinitis modis eſt aeſtimanda, pro infinitis axibus horizontalibus per centrum grauitatis

corporis

corporis transeuntibus, circa quos corpus inclinando ex situ aequilibrii depelli potest.

Coroll. 3.

286. Fieri igitur potest vt idem aequilibrii situs respectu vnius pluriumue axium horizontalium sit satis stabilis, qui tamen respectu reliquorum axium est instabilis. Semper autem in vnoquoque corpore oportet dari vnum aequilibrii situm, qui respectu omnium axium sit stabilis; alioquin enim corpus super aqua quiescere non posset.

Coroll. 4.

287. Si autem corporis cuiuspiam aquae insidentis aequilibrii situs fuerit stabilis respectu duorum axium horizontalium inter se normalium, tum iste aequilibrii situs respectu omnium reliquorum axium erit stabilis. Inclinatio enim circa axes intermedios resolui potest in inclinationes binas circa illos axes inter se normales, quae ambae cum praeditae sint vi restituente, necesse est, vt iste aequilibrii situs respectu omnium axium sit stabilis.

Coroll. 5.

288. Ad corporis igitur aquae in aequilibrio insidentis stabilitatem cognoscendam, sufficiet respectu duorum axium inuicem normalium stabilitatem inuestigasse; cum inde stabilitas respectu cuiusvis alius axis pendeat, atque satis tuto aestimari queat.

Scholion.

289. Quamdiu figuras tantum planas aquae verticaliter innatantes sumus contemplati, vnico modo stabili-

tatem cuiusque aequilibrii ſitus determinauimus, atque id etiam ſufficiebat, quia eiusmodi figuras circa vnicum axem horizontalem, normalem ſcilicet ad planum figurae, mobiles poſuimus; quilibet autem facile intelliget, huiusmodi figuras, quantumuis eae magnam habere inuentae ſunt ſtabilitatem, tamen ſubuerſioni ad latera maxime eſſe obnoxias. Simili modo perſpicuum eſt, naues inclinationi verſus proram puppimue multo fortius reſiſtere quam inclinationi ad latera, illoque proinde caſu maiorem habere ſtabilitatem quam iſto. Quamobrem cum nunc nobis ſit propoſitum in ſtabilitatem, quâ corpora quaecunque aquae inſidentia gaudent, inquirere, omnes inclinationes, quibus corpora ex ſitu aequilibrii declinari poſſunt, conſiderari oportet, atque definiri quanta vi cuique inclinationi reſiſtant. Infinitis autem modis corpus ex ſitu aequilibrii declinari poteſt, pro infinitis axibus horizontalibus per centrum grauitatis tranſeuntibus, circa quos corpus mobile exiſtit. Hanc ob rationem quando de ſtabilitate, qua corpus quodpiam in aqua ſitum aequilibrii tenet, eſt quaeſtio, id abſolute definiri nequit, ſed determinanda eſt certa inclinatio, in qua ſtabilitas ſeſe exerat; quem in finem iſtam ſtabilitatis determinatam definitionem praemiſi, in qua ſtabilitatem ad certum quendam axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem alligaui. Quamuis autem hoc pacto ſumme difficile videatur de ſtabilitate corporum aquae innatantium certi quid ſtatuere, cum infiniti axes deberent conſiderari, et reſpectu cuiusque ſtabilitas aſſignari, tamen iam notaui eiusmodi inſuperabili labore non eſſe opus, ſed ſufficere, ſi reſpectu duorum tantum axium inuicem normalium ſtabilitas definiatur. Motus

enim