Caput Secundum

DE CORPORVM AQVAE INNATANTIVM RESTITVTIONE IN AEQVILIBRIVM.

PROPOSITIO 14.
Theorema.

110.

Vt corpus aquae ita insidat, vt vel non tanta eius pars aquae sit immersa quanta ad aequilibrium requiritur, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non fuerit verticalis, tum corpus mouebitur donec in statum aequilibrii peruenerit.

Demonstratio.

Sit enim primo non tanta pars aquae submersa, quanta ad aequilibrium requiritur, manifestum est vires grauitatis et pressionum aquae fore inaequales, ideoque sese mutuo non destruere. Quare corpus tum mouebitur vel ascendendo vel descendendo, donec in aequilibrii situm perueniat. At si recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non sit verticalis, vires grauitatis et pressionum aquae, etiamsi fuerint aequales, tamen non directe sibi erunt oppositae. Cum igitur etiam hoc casu vires, quibus corpus sollicitatur se non destruant, necesse est vt motum gyratorium in corpore producant, qui tam diu durabit, donec corpus in aequilibrium fuerit constitutum. Q. E. D.

Coroll. 1.

111. Si igitur corpus vi externa ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum, tum ceſſante hac vi moueri incipiet, donec in ſitum aequilibrii peruenerit.

Coroll. 2.

112. Si ergo daretur corpus, quod ita eſſet comparatum, vt nullum ſitum aequilibrii admitteret, tum hoc corpus aquae impoſitum perpetuo moueri deberet, atque perpetuum mobile verum repraeſentaret.

Coroll. 3.

113. Cum igitur huiusmodi mobile perpetuum contradictionem inuoluat, ſequitur omne corpus ſaltem vnicum habere debere ſitum, in quo in aequilibrio eſſe queat.

Coroll. 4.

114. Quia corpus dum ſe reſtituit in aqua moueri debet, patietur quoque ab aqua reſiſtentiam, quae eo maior erit, quo maior fuerit celeritas corporis contra aquam. Motum autem reſiſtentia prorſus impedire non poteſt cum motus tardiſſimos non amplius afficiat.

Coroll. 5.

115. Interim tamen hoc certum eſt, corpus ſe non tam cito reſtituere poſſe, quam ſi aqua nulla prorſus reſiſtentia reluctaretur. Eo tardius igitur corpus ſe reſtituet, quo maior ſuperanda fuerit reſiſtentia.

Scholion

Scholion.

116. In hoc ergo capite inquirendum nobis erit, cuiusmodi motus in corpore, quod *a* potentiis ſeſe non deſtruentibus ſollicitatur, generetur. Ad hoc autem praeſtandum pluribus opus eſt propoſitionibus ex mechanica petendis, circa effectum potentiarum in corpora finita. Qua de re cum vix quicquam adhuc certi ſit traditum, neceſſe eſt vt principia ad hoc neceſſaria ex ipſis mechanicae fontibus hauriamus. In ſequentibus igitur lemmatis inueſtigabimus, cuiusmodi motum quaecunque potentiae corpus ſollicitantes producere debeant; haecque principia, quae hic ſtabiliemus, non ſolum in hoc capite, ſed etiam in omnibus ſequentibus tantae ſunt neceſſitatis, vt iis nullo modo carere queamus.

LEMMA.

117. *Si plura fuerint corpora* A, B, C, D *quae ſingula in directionibus parallelis promota perueniant in* a, b, c, d; *tum eorum commune centrum grauitatis* O *in directione quoque parallela* Oo *mouebitur, et perueniet in* o *vt ſit* $Oo = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A + B + C + D}$ *denotantibus* A, B, C, D *maſſas corporum reſpectiue.* Tab. VII. fig. 2.

Demonſtratio.

Producantur directiones A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, donec rectae $Z\delta$ pro lubitu aſſumtae occurant in punctis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et recta ex centro grauitatis O in ω. Erit ergo ex nota centri grauitatis proprietate $Z\omega = \frac{A.Z\alpha + B.Z\beta + C.Z\gamma + D.Z\delta}{A + B + C + D}$ ex qua aequatione intelligitur, punctum ω fore veſtigium centri grauitatis tam dum corpora in A, B, C, D quam dum in *a*, *b*, *c*, *d* ſunt ſita, quare directio, in qua centrum grauitatis mouetur, erit parallela directionibus corporum. Deinde vero corporibus in A, B, C, D existentibus erit $O\omega = \frac{A.A\alpha + B.B\beta + C.C\gamma + D.D\delta}{A + B + C + D}$ Translatis autem corporibus in a, b, c, d, perueniat centrum grauitatis in o, erit per eandem centri grauitatis proprietatem $o\omega = \frac{A.a\alpha + B.b\beta + C.c\gamma + D.d\delta}{A + B + C + D}$. Cum iam sit $Oo = o\omega - O\omega$, erit $Oo = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A + B + C + D}$. Q. E. D.

Coroll.

181. Quantuscunque ergo sit corporum numerus demonstratio data aeque valet, ac pro casu quatuor corporum tantum. Atque ex demonstratione quoque intelligitur, eam pariter vim suam retinere siue corpora sint in eodem plano sita siue secus.

LEMMA.

Tab. VII. fig. 2.

119. *Si fuerint corporibus* A, B, C, D *potentiae* a, b, c, d *respectiue applicatae, quarum directiones inter se sint parallelae, corporaque ab iis moueantur, tum eorum commune centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur, ac si omnia corpora in ipso grauitatis centro* O *essent concentrata eorumque summa* A + B + C + D *a summa potentiarum* a + b + c + d *in eadem directione sollicitaretur.*

Demonstratio.

Promoueantur puncto temporis dt corpora A, B, C, D a potentiis respectiuis a, b, c, d per elementa Aa, Bb, Cc, Dd, erit per nota mechanicae principia $Aa = \frac{a.dt}{A}$, $Bb = \frac{b.dt}{B}$, $Cc = \frac{c.dt}{C}$, $Dd = \frac{d.dt}{D}$. Interim igitur

igitur per lemma praecedens perueniet centrum grauitatis O in o, vt fit Oo parallela directionibus potentiarum, atque O$o = \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. At fi in O concentrata effet fumma corporum $A+B+C+D$, eaque in directione Oo follicitaretur a fumma potentiarum $a+b+c+d$, tum tempufculo dt perueniret quoque in o vt effet Oo $= \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. Quare dum corpora fingula A, B, C, D, a fuis potentiis refpectiuis a, b, c, d in directionibus inter fe parallelis vrgentur, centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac fi fumma corporum in O concentrata follicitaretur a fumma potentiarum $a+b+c+d$ in eadem directione. Q. E. D.

Corollarium.

120. Haec igitur demonftratio aeque fuccedit, fiue corpora fint in eodem plano pofita, fiue fecus dummodo potentiarum, quibus fingula follicitantur, directiones fint inter fe parallelae.

LEMMA.

121. *Si corpora* A, B, C, D *follicitentur* a *quibus, cunque potentiis, ab iisque moueantur, tum eorum centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur ac fi in eo omnium corporum maffae effent concentratae, eorumque aggregato applicatae effent omnes potentiae quaeque in directione parallela ei, in qua fingula corpora, follicitantur.* Tab. VII. fig. 3.

Demonftratio.

Sumantur pro lubitu tres directiones fixae ZP, ZQ, ZR inter fe normales, et quaelibet potentia, quibus

bus corpora A, B, C, D ſollicitantur, reſoluatur in ternas, quarum directiones reſpectiue ſint parallelae directionibus ZP, ZQ, ZR. Ponatur ſumma omnium potentiarum ex hac reſolutione ortarum, quarum directiones ſunt ipſi ZP parallelae = P, ſumma earum quae ipſi ZQ ſunt parallelae = Q, earumque ſumma quae ipſi ZR ſunt parallelae = R. Iam ſi ſingula corpora tantum ab iis potentiis ſollicitarentur, quarum directiones ipſi ZP ſunt parallelae, tum centrum grauitatis O eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia P in directionem O*p* ipſi ZP parallela ſollicitaretur. Simili modo ſi ſingula corpora a potentiis tantum ſollicitarentur quarum directiones ſunt ipſi ZQ parallelae tum centrum grauitatis eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia Q, cuius directio O*q* quoque ipſi ZQ eſt parallela, vrgeretur. Denique eodem modo ſi ſingula corpora tantum a potentiis, quarum directiones ipſi ZR ſunt parallelae, ſollicitarentur, tum centrum grauitatis *o* eodem modo mouebitur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia R in directione O*r* ipſi ZR parallela ſollicitaretur. Quare ſi ſingula corpora *ab* omnibus potentiis, quae ipſis ſunt applicatae ſimul ſollicitentur, tum centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D eſſet concentrata, eaque a tribus potentiis P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* ſollicitaretur. At ſi omnes potentiae, quibus ſingula corpora ſollicitantur, in directionibus ſibi parallelis in puncto O eſſent applicatae, tum iis omnibus tres potentiae P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* aequiualerent. Quamobrem centrum gra-

grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo omnia corpora eſſent concentrata, iisque omnes potentiae in iisdem directionibus eſſent applicatae. Q. E. D.

LEMMA.

122. *Si corpori rigido, cuius partes firmiſſimo nexu inter ſe cohaerent, quaecunque potentiae fuerint applicatae, eius centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eique omnes potentiae in ſuis directionibus coniunctim applicatae.*

Demonſtratio.

Concipiantur ad momentum omnes corporis particulae a ſe inuicem diſſolutae, vt earum quaeque libere a potentiis moueantur, tum ex lemmate praecedentee conſtat centrum grauitatis corporis eodem modo moueri, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eaque ab omnibus potentiis in iisdem reſpectiue directionibus coniunctim vrgeretur. Cum autem interea ſingulae corporis particulae ex mutuo ſitu, quem inter ſe tenere debent, ſint dislocatae, concipiantur eae ſeſe in debitum ordinem reſtituere, viribus, quibus ſe mutuo attrahant vel repellant. Huiusmodi autem actionibus quibus corpora in ſe mutuo agunt, locus centri grauitatis non mutatur. Quamobrem poſt reſtitutionem centrum grauitatis inuariatum manebit, atque idcirca eodem modo mouebitur ac ſi ſingulae corporis particulae a ſe inuicem eſſent diſſolutae. Mutuus igitur nexus quo corporis particulae inter ſe cohaerent, motum centri grauitatis aſſignatum non turbat. Q. E. D.

 Coroll.

Coroll. 1.

123. Si igitur potentiae, quibus corpus ſollicitatur ita fuerint comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſe mutuo deſtruant et in aequilibrio conſiſtant, tum centrum grauitatis corporis quiescet.

Coroll. 2.

124. At ſi potentiae corpori applicatae non fuerint ita comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſint in aequilibrio, tum centrum grauitatis corporis in media earum potentiarum directione mouebitur.

Coroll. 3.

Tab. VII. fig. 4.

125. Si igitur corpori ABC duae potentiae Ee et Ff, quarum altera deorſum altera ſurſum vrgeat, fuerint applicatae, tum centrum grauitatis quieſcet ſi fuerit $Ee = Ff$. At ſi $Ee > Ff$ centrum grauitatis deſcendet, aſcendet vero ſi fuerint $Ee < Ff$.

Coroll. 4.

126. Quaecunquae ergo potentiae corpori fuerint applicatae, motus centri grauitatis per hoc lemma poterit determinari.

Scholion.

127. Motus autem, quem potentiae centro grauitatis inducunt, non eſt ſolus effectus quem potentiae in corpore producunt, neque ad effectum potentiarum corpori applicatarum ſufficit motum centri grauitatis noſſe. Inte-

Interea enim dum centrum grauitatis vel quiescit, vel descripto modo mouetur, fieri potest, vt reliquae corporis partes circa centrum grauitatis reuoluantur, motumque gyratorium accipiant, quippe quo motu centri grauitatis motus non turbatur. Quamobrem superest, vt inuestigemus cuiusmodi motum gyratorium quaevis potentiae corpori applicatae circa centrum grauitatis producant, hoc enim cognito integer effectus, quem potentiae in corporibus rigidis edere possunt, innotescet.

LEMMA.

128. *Si corpori rigido quaecunque potentiae fuerint applicatae, idque ab iis moueatur ita ut centrum grauitatis eum obtineat motum, quem ipsi assignauimus, totum corpus interea circa centrum grauitatis pariter mouebitur, ac si centrum grauitatis quiesceret vel fixum esset.*

Demonstratio.

Concipiatur corpori in ipso centro grauitatis potentia noua applicata aequalis et contraria ei quae oritur ex compositione omnium potentiarum si essent in centro gravitatis applicatae, tum igitur centrum grauitatis quiescet. Si nunc hoc casu determinetur motus, quem potentiae corpori circa centrum grauitatis inducunt, potentia noua, quam corpori in centro grauitatis applicatam concipimus, motum hunc circa centrum grauitatis non afficiet. Quare etiamsi, ea iterum auferatur, motus circa centrum grauitatis immutatus manebit. Hanc ob rem corpus, circa centrum grauitatis motum eodem modo mouebitur, ac si esset fixum. Q. E. D.

Coroll.

Corollarium.

129. Ad motum igitur corporis circa centrum grauitatis determinandum, licebit centrum grauitatis tanquam fixum confiderare, cum motus gyratorius circa centrum grauitatis motum conueniat cum motu gyratorio circa centrum grauitatis fixum.

Scholion.

130. Quo ergo determinemus hunc circa centrum grauitatis motum, incipiemus a motu circa quodcumque punctum fixum definiendo, atque inueftigabimus motum gyratorium, quem quaecunque potentiae corpori ex quopiam puncto fixo fufpenfo inducere valent. Hoc enim determinato facile erit punctum fixum in ipfum centrum grauitatis transferre atque adeo motum, quem potentiae quaecunque corpori applicatae circa centrum grauitatis generant affignare.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 1. 131. *Si corpusculum* C *circa punctum fixum* O *mobile follicitetur a potentia* CF, *erit angulus dato tempusculo* dt *circa* O *genitus directe vt factum ex potentia* CF *in fin. ang.* FCO *per* dt *multiplicatum et reciproce vt maffa corpusculi* C *in diftantiam* CO *ducta.*

Demonftratio.

Pofitis potentia $CF = p$ et fin. ang. $FCO = m$, refoluatur potentia CF in duas laterales fecundum Cf normalem ad CO et $C\varphi$ ipfam CO, quarum pofterior tota in tendendo filo CO vel immutanda corpufculi a C distantia consumetur, ideoque ad motum nihil praestat. Altera vero potentia in directione Cf, quae erit $= mp$, tota in motu producendo impendetur. Perducatur igitur corpusculum C tempusculo dt per spatiolum Cc, erit $Cc = \frac{mpdt}{C}$. Hoc vero spatiolum per distantiam CO diuisum dabit angulum COc tempusculo dt genitum qui consequenter erit $= \frac{mpdt}{C.CO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

132. Si ergo huic angulo, qui dato tempusculo generatur, vis gyratoria proportionalis ponatur, erit vis gyratoria vt potentia CF in sin. ang. FCO diuisa per corpus C in distantiam CO.

Coroll. 2.

132. Si igitur vis gyratoria perpetuo ista ratione exprimatur, tum statim cognoscetur motus angularis. Expressio enim talis vis gyratoriae per tempusculum dt multiplicata exhibet statim angulum hoc tempusculo genitum circa O.

Coroll. 3.

134. Atque si vis gyratoria compositi cuiusque corporis hoc modo expressa inueniatur, tum statim angularis motus congnoscetur, seu quod idem est, assignari potest corpus solitarium vt C, quod a certa potentia sollicitatum aequalem motum gyratorium habeat.

Scholion.

135. Cum potentia oblique corpusculum C trahens tam facile ad potentiam normalem ad CO reducatur;

 atque

atque altera potentia, cuius directio in ipsam CO incidit, motum gyratorium non afficiat; in sequentibus, vbi motus gyratorius determinari debet, tantum potentias normales cuique corporis particulae applicatas concipiemus. Et quidem si C fuerit particula corporis circa O mobilis, ex hoc lemmate iam constat, si sola particula C adesset, reliquis corporis partibus omnibus annihilatis, qualem motum gyratorium potentia C*f* normalis ad CO corpusculo C induceret. Scilicet corpusculum C ad circulum describendum incitabitur, cuius centrum est in O et radius AO, atque iste circulus situs erit in plano, in quo sitae sunt cum recta CO tum potentiae sollicitantis C*f* directio. Vis autem qua ad hunc circulum describendum incitatur, seu vis gyratoria, prout eam vocabimus, erit aequalis potentiae C*f* diuisae per factum ex massa corpusculi C in distantiam CO.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 2. 136. *Loco corporis* A *a potentia* Aa *circa* O *ad motum gyratorium incitati, substitui potest in distantia* MO, *quae in eodem plano, in quo* AO *et* Aa, *sita est, corpus* $M = \frac{A.AO^2}{MO^2}$, *quod a potentia* $Mm = \frac{MO.\,Aa}{MO}$, *cuius directio in eodem plano est sita et in eandem, in quam* Aa *plagam tendit, ad motum gyratorium circa* O *sollicitetur.*

Demonstratio.

Quo loco potentiae A*a* in distantia AO applicatae substitui queat potentia M*m* in distantia MO applicata, oportet vt primo MO et M*m* in eodem plano sint sitae, in quo sunt AO et A*a*; deinde vero requiritur vt mo-

momenta potentiarum Aa et Mm ſint aequalia, vnde ſequitur fore $Aa . AO = Mm . MO$ ſeu $Mm = \frac{Aa . AO}{MO}$. Hoc enim pacto potentia Mm eundem praeſtabit effectum circa O, quem habet potentia Aa circa O. Praeterea vero corpus in M collocandum tantum eſſe debet, vt vires gyratoriae in M et A circa O ſint aequales, quod eueniet, ſi fuerit $\frac{Mm}{M . MO} = \frac{Aa}{A . AO}$. Quo ergo et vis gyratoria vtrinque ſit eadem, neceſſe eſt vt ſit $M = \frac{A . AO . Mm}{MO . Aa} = \frac{A . AO^2}{MO^2}$ propter $Mm = \frac{Aa . AO}{MO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

137. Perinde igitur eſt in qua directione aſſumatur recta MO, modo ea in eodem plano ſit ſita, in quo poſitae ſunt rectae AO et Aa. Atque ſimili modo arbitrarium eſt quantumvis longa MO capiatur.

Coroll. 2.

138. Definita autem longitudine rectae MO in plano OAa poſitae, ſimul tam corpus in M collocandum, quam potentia ei applicanda Mm determinantur.

Coroll. 3

139. Loco ergo cuiusuis corpusculi A circa punctum fixum O gyrantis aliud in data diſtantia ſubſtitui poteſt, quod prorſus eundem praeſtet effectum in motu gyratorio circa O generando, quem produceret illud corpusculum A in diſtantia AO.

LEMMA.

140. *Si fuerint plura corpuſcula* A B, C, D *inter ſe firmiter connexa et in eodem plano ſita quae a poten-* Tab. VIII. fig. 3.

 tiis

tiis Aa, Bb, Cc, Dd, *quarum directiones in eodem quoque plano sint positae, circa punctum fixum* O *in eodem plano situm ad motum gyratorium sollicitentur, erit vis gyratoria communis* $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$.

Demonstratio.

Sumta in plano, in quo sita sunt tam corpuscula cum puncto O, quam directiones, quibus sollicitantur, recta arbitraria OM, loco corpusculi A a potentia Aa sollicitati substituatur in M corpusculum $\frac{A \cdot AO^2}{MO^2}$ a potentia $\frac{Aa \cdot AO}{MO}$ sollicitatum (136), similique modo loco corpusculorum B, C, D a potentiis Bb, Cc, Dd, sollicitatorum, in M substituantur corpuscula $\frac{B \cdot BO^2}{MO^2}$, $\frac{C \cdot CO^2}{MO^2}$, $\frac{D \cdot DO^2}{MO^2}$ a potentiis $\frac{Bb \cdot BO}{MO}$, $\frac{Cc \cdot CO}{MO}$, $\frac{Dd \cdot DO}{MO}$ sollicitata. Hoc ergo facto loco omnium corpusculorum a suis potentiis sollicitatorum substitui potest in M Corpus $\frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}{MO^2}$, quod sollicitetur in directione Mm a potentia quae est $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CC + Dd \cdot DO}{MO}$. Huius igitur corporis vis gyratoria erit $= \frac{Aa \cdot AC + Bb \cdot BC + Cc \cdot CC + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$ cui aequalis est vis gyratoria, quae ex viribus gyratoriis singulorum corporum, A, B, C, D, coniunctim oritur. Q. E. D.

Coroll. 1.

141. Vis ergo gyratoria plurium huiusmodi corpusculorum aequatur summae momentorum singularum potentiarum in punctum fixum A, diuisae per summam factorum ex singulis corpusculis in quadrata eorum a puncto

cto fixo O ſeu ab axe, circa quem fit motus gyratorius multiplicatis.

Coroll. 2.

142. Angulus igitur, per quem corpusculorum A, B, C, D ſyſtema tempuſculo dt circa punctum fixum o gyrabitur erit $= dt - \frac{Aa \cdot AO + Bb . BO + Cc \cdot CO + Dd . DO}{A \cdot AO^2 + B . BO^2 + C\ CO^2 + D \cdot DO^2}$ vnde ipſe motus gyratorius cognoſcetur.

Coroll. 3.

143. Si aliquot corpuscula in plagam oppoſitam trahantur, tum potentiarum, quibus ea ſollicitantur momenta fient reſpectu reliquorum negatiua, ideoque in expreſſione inuenta ſubtrahi debebunt.

Coroll. 4.

144. Manentibus ergo potentiis corpus circa punctum fixum O ſollicitantibus iisdem, vis gyratoria eo erit maior, quo minor fuerit denominator fractionis inuentae, hoc eſt quo propius ſingulae corporis particulae puncto O fuerint ſitae.

Coroll. 5.

145. Si anguli, quos potentiarum ſollicitantium directiones cum rectis ad punctum O ductis conſtituunt, non fuerint recti, tum ſingula facta Aa. AO, Ab. BO etc. inſuper per ſinus angulorum OAa, OBb etc. reſpectiue multiplicari debent; ſumta vnitate pro ſinu toto.

Coroll. 6.

146. Vis ergo gyratoria euaneſcet, ſi momenta potentiarum corpus ſollicitantium in punctum fixum ſe mutuo deſtruant; hoc ergo caſu corpus quiescet.

 Scholion

Scholion.

147. Haec igitur ſunt lemmata, quibus ad motum corporum aquae innatantium explicandum opus erit; ex quibus ſatis intelligitur, ſi corpori cuicunque rigido applicatae ſint potentiae quaecunque, tum corporis illius centrum grauitatis eodem modo moueri, ac ſi tota corporis maſſa in ipſo centro grauitatis eſſet concentrata, eique omnes potentiae quaeque in ſua directione coniunctim eſſent applicatae. Praeterea vero totum corpus interim circa centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi centrum grauitatis eſſet fixum, hicque motus gyratorius cognoſcetur ex momentis omnium potentiarum in centrum grauitatis. Si enim haec momenta ſe mutuo deſtruant, tum corpus plane nullum habebit motum gyratorium circa centrum grauitatis; eo maior vero erit hic motus gyratorius quo maius fuerit momentum ex omnibus potentiis in centrum grauitatis coniunctim ortum. In motu quidem corporum aquae innatantium iſte motus gyratorius ſi quis oritur ſtatim ſiſtitur, et hancobrem hoc caſu ſufficiet eum corporis ſitum determinare in quo motus gyratorius ceſſat; ad quem definiendum lemmata praemiſſa ſunt accommodata.

PROPOSITIO 15.
Theorema.

148. *Si corpus aquae inſidens non fuerit in aequilibrio, tum conuertetur circa centrum grauitatis, atque centrum grauitatis interea vel quieſcet vel directe ſurſum deorſumue mouebitur.*

De-

Demonſtratio.

Si corpus aquae quomodocunque immergatur id a duabus viribus vrgebitur, quarum altera aequalis eſt ponderi corporis, et in verticali per centrum grauitatis tranſeunte deorſum tendit, altera vero aequalis eſt ponderi aquae volumine partem aquae ſubmerſam aequantis, et corpus directe ſurſum pellit in directione per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeunte. Cum igitur centrum grauitatis ab his potentiis eundem accipiat motum, ac ſi tota corporis maſſa in eo eſſet concentrata et ab vtraque vi coniunctim ſollicitaretur, manifeſtum eſt centrum grauitatis vel quieſcere vel directe ſurſum deorſumue moueri debere. Niſi autem directio potentiae, qua corpus ſurſum vrgetur, per centrum grauitatis tranſeat, tum corpus ab hac vi interea circa grauitatis centrum conuertetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

149. Intelligitur ergo, ſi nimis magna pars corporis aquae fuerit immerſa, tum propter vim ſurſum vrgentem altera maiorem, centrum grauitatis aſcendere debere; contra vero ſi nimis exigua pars aquae immergatur, centrum grauitatis deſcendere debere.

Coroll. 2.

150. Si ergo tanta pars corporis aquae eſt immerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum centrum grauitatis quieſcet propter vires ſollicitantes inter ſe aequales et contrarias.

Co-

Coroll. 3.

151. Si igitur tanta corporis pars aquae fuerit submersa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum corpus sese in aequilibrium restituendo circa centrum grauitatis quiescens conuertetur.

Scholion.

152. Hinc autem non sequitur, quod, si semel tanta corporis pars aquae fuerit submersa, quanta ad aequilibrium producendum est necessaria, tum centrum grauitatis, quam diu conuersio fit, perpetuo quiescere debere. Inter conuertendum enim vtique euenire potest, vt pars corporis sub aqua existens, quippe quae continuo immutatur, fiat iusto vel maior vel minor. Hoc igitur cum accideret, necesse est, vt centrum grauitatis statim vel eleuetur vel deprimatur. Ipse autem motus tum centri grauitatis tum conuersionis non e vestigio cessabit, cum corpus in statum aequilibrii peruenerit, sed prout in motu pendulorum euenit, in partem contrariam inclinabitur et reuertetur, hicque motus oscillatorius tam diu durabit, quoad a resistentia omnino absorbeatur.

PROPOSITIO 16.

Problema.

Tab. IX. fig. 1.

153. Figurae planae aquae verticaliter insistentis EAHBF ex situ aequilibrii depulsae, motum quo se in situm aequilibrii restituet, determinare.

Solutio.

Sit AHB pars aquae immersa, O eius centrum magnitudinis et G centrum grauitatis totius figurae, quae

centra

centra in plano AHB erunt poſita. Sollicitabitur ergo haec figura a preſſionibus aquae ſurſum in directione verticali OI vi aequali ponderi aquae ſpatium AHB occupantis; deorſum vero vrgebitur in directione GH vi ponderi figurae aequali. Quod iam ad motum centri grauitatis G attinet, id ſurſum pelletur, ſi vis OI fuerit maior quam vis GH; deorſum vero nitetur ſi vis GH vim OI ſuperet; caſu denique quo hae vires ſunt inter ſe aequales, centrum grauitatis G quieſcet. Deinde ſiue centrum grauitatis quieſcat ſiue aſcendat ſiue deſcendat, tota figura circa id conuertetur, niſi directiones OI et GH in eandem rectam verticalem incidant; qui motus conuerſionis ex momentis harum virium in centrum grauitatis cognoſcetur. Vis quidem GH, quippe quae per centrum ipſum grauitatis tranſit, momentum eſt nullum, at alterius vis OI momentum eſt OI. GL ducta GL ex G in rectam OI normali. Hac igitur vi figura ſecundum directionem BHA circa centrum grauitatis G conuertetur. Quantitas autem huius vis gyratoriae abſoluta pendet inſuper a ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G, quorum productorum ſumma ſi dicatur S, erit vis gyratoria $= \frac{OI.\,GL}{S}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

154. Impetus ergo, quo figura circa G conuertetur eo erit maior, quo maiores fuerint tum vis OI tum diſtantia GL, atque quo minor fuerit ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G.

Coroll. 2.

155. Manentibus ergo O I et GL invariatis vis figurae se restituendi eo erit maior, quo minor fuerit S, hoc est quo propiores fuerint omnes figurae particulae centro grauitatis G. Contra vero restitutio eo tardius fiet, quo magis particulae a centro grauitatis remoueantur.

Coroll. 3.

Tab. IX fig. 1. et 2. 156. Vis gyratoria, qua figura circa centrum grauitatis conuertitur, reduci potest ad vim qua simplex corpus a circa punctum fixum *o a* vi *a b* vrgetur. Eadem scilicet velocitate hoc corpus *a* gyrabitur, qua figura EHBF, si fuerit vis $ab = \frac{a.ao.GL}{S}$. OI.

Coroll. 4.

157. Datis ergo singulis momentis, dum figura conuertitur, situ centrorum grauitatis et magnitudinis mutuo, determinari poterit velocitas angularis quouis momento, atque tempus, quo tota restitutio absoluitur.

Scholion. 1.

158. Si corpus aquae insidens fuerit cylindricum, cuius omnes sectiones transuersales sint similes et aequales figurae EAHBF, manifestum est hoc corpus in aqua simili modo motum iri quo figura sola EAHBF. Quamobrem si huiusmodi corpus cylindricum ita fuerit ex statu aequilibrii depulsum, vt omnes illae sectiones in situ verticali permaneant, tum hoc corpus circa rectam horizontalem per singularum sectionum centra grauitatis G tran-

transſeuntem tanquam circa axem conuertetur, donec in ſtatum aequilibri peruenerit. Atque praeterea motus huius reſtitutionis omnino congruet cum motu figurae EAHBF et eadem celeritate abſoluetur. Vis ergo, qua corpus hoc, dum ſingularum ſectionum partes ſimiles et aequales ipſi AHB aquae ſunt ſubmerſae, circa axem per omnium ſectionum centra grauitatis G transſeuntem conuertetur, aequalis erit ponderi aquae volumine toti parti ſubmerſae aequali ducto in interuallum LG et diuiſo per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe conuerſionis multiplicatarum.

Scholion 2.

159. Quemadmodum hoc corpus cylindricum, cuius omnes ſectiones tranſuerſales non ſolum ſunt ſimiles et aequales, ſed etiam onera per eas ſimiliter ſunt digeſta, circa axem immobilem per centrum grauitatis tranſeuntem conuerti poteſt, ita quoque idem in aliis cuiusque formae corporibus euenire poteſt, vt circa axem immotum gyrari queant. Plerumque autem iſte motus reſtitutionis in ſtatum aequilibrii non circa axem quieſcentem, ſed pariter circa centrum grauitatis mobilem fieri ſolet, qui ipſius axis motus difficulter determinatur. Interim tamen ſemper qualiscunque fuerit corporis circa centrum grauitatis motus, is tanquam compoſitus ſpectari poteſt ex motibus circa duos axes factis, qui conceptus ita ſe habet, vt dum corpus circa axem quendam gyratur, eodem tempore quoque circa alium axem conuerti concipiendum ſit. Quin etiam fieri poteſt, vt motus circa centrum grauitatis ex

motibus circa tres axes ſit compoſitus. Quamobrem quo huiusmodi motus curatius perſequi liceat, ante nobis inveſtigandae ſunt leges motus gyratorii circa axem fixum, quae deinde etiam ad motum ex aliquibus huiusmodi motibus compoſitum accommodari queant.

LEMMA.

Tab. XI. fig. 3. 160. *Si corpori, quod axe fixo* E F *eſt traiectum, applicatae fuerint quaecunque potentiae, erit vis gyratoria circa axem* E F *aequalis ſummae momentorum omnium potentiarum corpori applicatarum in axem* E F *diuiſae per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe* E F *multiplicatarum.*

Demonſtratio.

Ex punctis A, B, C, D in quibus vires ſunt applicatae in axem E F demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c*, D*d*; perſpicuum autem eſt vim B applicatam eundem effectum in corpore circa E F conuertendo habere, ac ſi recta B*b* in quodlibet aliud axis punctum promoueatur. Quamobrem puncta omnia *a*, *b*, *c*, *d* in idem punctum a incidere concipiantur, ita vt ſimul omnes corporis particulae in planum ad E F normale et per *a* tranſiens collocentur. Quo facto totum corpus in hoc planum reductum pari modo circa punctum fixum a ad gyrandum incitabitur a potentiis, atque ante: Quocirca vis gyratoria aequalis erit ſummae momentorum potentiarum omnium in axem E F diuiſae per aggregatum omnium particularum per ſuarum ab axe E F diſtantiarum quadrata multiplicatarum. Q. E. D.

Co-