mediam e f *incidat. Et quidem eodem situ aquae insidere poterit, quo sectio media sola* ALBI *aquae situ verticali innatare potest, si eius centrum grauitatis in* G *fuerit situm.*

Demonstratio.

Insideat enim hoc corpus aquae situ horizontali, sitque tanta eius pars iam immersa, quanta ad aequilibrium requiritur; manifestum est centrum magnitudinis o partis submersae quoque in sectionem mediam *e f* cadere debere, esseque in ipso centro magnitudinis partis ipsius sectionis mediae submersae. Nisi ergo haec centra G et *o* in eandem rectam verticalem incidant, conuertatur corpus eousque donec illa centra hoc requisitum acquirant. Quo facto sit LAIB situs sectionis mediae, AB sectio aquae, G eius centrum grauitatis, quod congruere ponimus cum totius centro grauitatis, O centrum magnitudinis partis submersae AIB, quod per se conuenit cum centro magnitudinis in ipso corpore *a d*. Quare si recta G*o* fuerit verticalis, tam sola sectio LI quam totum corpus hoc situ aquae insidere poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Quo autem sectionis LAIB solius tanta pars aquae immergatur, quanta immergi debet, si est cum corpore coniunctum, ipsi huic sectioni eadem grauitas specifica respectu aquae tribui debet, quam habet integrum corpus.

Coroll. 2.

49. Si corpus fuerit homogeneum, tum eius centrum grauitatis non solum in sectionem mediam *e f* incidet sed insuper in ipsius sectionis mediae centro grauitatis erit situm.

Coroll.

Collor. 3.

50 Vt igitur huiusmodi corporum cylindricorum ſitus, quo horizontaliter aquae inſidere poſſint, determinetur, ſufficiet inquirere, in quonam ſitu vna eius ſectio aquae verticaliter inſiſtere poſſit.

Scholion.

51. Quo igitur definiri queat ſitus, quo huiusmodi corpora cylindrica aquae horizontaliter incubare poſſint, tantum ad figuram ſectionum transuerſalium reſpiciendum eſt. Problema ergo huc redit, vt data quacunque figura plana LAIB, eius grauitate ſpecifica reſpectu aquae et centro grauitatis G determinetur pars AIB aquae immergenda, quae quidem quantitate conſtat, vt recta iungens centrum grauitatis G et centrum magnitudinis *a* partis AIB ſit in ſectionem aquae AB normalis. Quamobrem ad noſtrum inſtitutum conueniet aliquot huiusmodi figurarum planarum conſiderare, et quibusnam ſitibus aquae verticaliter innatare queant inueſtigare. Praecipue autem ad corpora cylindrica ſeu priſmatica homogenea reſpiciemus, et hanc ob cauſam pro centro grauitatis G figurae LAIB ſumemus ipſius figurae centrum grauitatis; ita vt nobis quaeſtio huc reducatur; A data figura LAIB ducendo rectam AB partem AIB datae magnitudinis abſcindere, hac conditione vt recta iungens centra totius figurae et partis abſciſſae perpendicularis ſit ad rectam AB. Incipiamus igitur *a* triangulo tanquam figura ſimpliciſſima indeque ad quadrilatera progrediemur.

LEMMA.

52. *Si per trianguli* ACB *centrum grauitatis* G *ducatur recta quaecunque* IPQ *lateri* BC *producto in* Q *occurrens, erit* AC. CQ − BC. CP = 3 CP. CQ. Tab. IV. Fig. 1.

De-

Demonstratio.

Ex angulis A et B per centrum grauitatis G ducantur rectae AH, et BK quae per notam centri grauitatis proprietatem bisecabunt latera BC et AC eritque AG : GH = 2 : 1. et BG : GK = 2 : 1. Est vero sin. API : sin. BQI = $\frac{AG}{AP} \cdot \frac{GH}{HQ} = \frac{GK}{KP} \cdot \frac{BG}{BQ}$ = CQ : CP. Ex quibus proportionibus eruitur BC + 2 CQ : AC − CP = BC + CQ : AC − 2 CP = CQ : CP atque hinc AC . CQ − BC . CP = 3 CP . CQ. Q. E. D.

Coroll. 1.

53. Si sinus anguli API ponatur = m, et sinus anguli BQI = n; erit $m : n$ = CQ : CP. Vnde cum sit CQ = $\frac{AC \cdot CQ - BC \cdot CP}{3\, CP}$ erit CQ = $\frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3\, n}$ et CP = $\frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3\, m}$.

Coroll. 2.

54. Si ex A ducatur ipsi GQ parallela donec ipsi BC productae occurrat, erit ea = 3 GQ. Quocirca erit CP : PQ = AC : 3 GQ atque GQ = $\frac{AC \cdot PQ}{3 \cdot CP}$. Posito ergo sin. ACB = k erit GQ = $\frac{K \cdot AC}{3\, n}$.

Coroll. 3.

55. Si recta QI fuerit normalis in AB, erit BC : AC = cos. API : cos. BQI. Quare si cosinus anguli API ponatur M et cosinus ang. BQI = N erit BC : AC = M : N seu M. AC = N. BC.

PROPOSITIO 9.

Problema.

Tab. IV. fig. 2. 56. *Proposito triangulo homogeneo* ACB, *cuius ad aquam grauitas specifica sit vt* p *ad* q, *casus determinare, quibus*

quibus hoc triangulum aquae ita innatare potest, vt latus AB maneat extra aquam situm.

Solutio.

Sit aCb pars quaesita aquae immergenda, quo triangulum aquae insidere queat, sitque recta IPQ ducta per centra grauitatis tum totius trianguli ACB tum partis submersae aCb. Quo ergo triangulum in hoc situ aquae insidere queat, oportet vt recta IQ sit in ab perpendicularis atque praeterea vt area trianguli aCb sit ad aream ACB vt $p:q$. Ponatur nunc $AC = a$ $BC = b$ atque sinu anguli $ACB = k$, eiusque cosinu $= K$. Porro sit $aC = x$, $bC = y$, sin. $API = m$ eius cosinus $= M$, item sin. $BQI = n$ et cos. $= N$. His positis erit $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$. Cum nunc recta QPI transeat per centrum grauitatis trianguli ACB erit $CQ = \frac{ma - nb}{3n}$ Deinde quia eadem recta per centrum grauitatis trianguli aCb transit, erit $CQ = \frac{mx - ny}{3n}$, quibus coniunctis erit $mx - ny = ma - nb$. Porro cum recta PI normaliter occurrat rectae ab erit $Mx = Ny$, ex quibus aequationibus elicitur $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et $y = \frac{M(ma - nb)}{mN - Mn}$. Quoniam vero est $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$, substituantur hi valores in aequatione $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et posito $t = \frac{n}{N}$ prodibit $x = \frac{ka - Kat - bt}{k - 2Kt - ktt}$ atque $y = (kt + K)x$. Hinc vero inuenitur $t = \frac{\frac{1}{2}(b + Ka) - Kx + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}}{Kx}$ atque $y = \frac{1}{2}(b + Ka) + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}$ Denique est triang. aCb ad triang. ACB vt xy ad ab, erit ergo $p:q = xy:ab$ et $y = \frac{pab}{qx}$, quo valore loco y in in superiore aequatione substituto prodibit $q^2x^4-(a+Kb)q^2x^3+(b+Ka)pqabx-a^2b^2p^2=0$. Valor igitur ipsius x ex hac aequatione erutus dabit latus aC, quo inuento si sumatur $bC=\frac{pab}{q\cdot aC}$ habebitur sectio aquae ab, atque pars aquae immergenda quaesita. Q. E. I.

Coroll. 1.

57 Quot igitur aequatio inuenta continet radices reales et affirmatiuas tot casibus triangulum propositum aquae ita insidere poterit, vt latus AB extra aquam maneat, solusque angulus C immergatur, dummodo sit $x<a$ et $y<b$.

Coroll. 2.

58. Si autem omnes 4 radices fuerint reales, tum earum tres tantum possunt esse affirmatiuae ob ternas tantum signorum alternationes. Radix autem negatiua proposito non inseruit. Quare non dari possunt plures tribus casus, quibus triangulum praescripto modo aquae insistere potest.

Coroll. 3.

59. Praeterea neque x maius esse potest quam a neque y maius quam b. Quare si eueniat vt vel x excedat a vel y excedat b, tum hi quoque casus erunt inutiles.

Coroll. 4.

60. Si tertium latus trianguli AB ponatur $=c$, hocque loco cosinus K ang. ACB in computum introducatur, propter $K=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ prodibit $q^2x^4-\frac{q^2x^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2)+\frac{apqx}{2}(a^2+3b^2-c^2)-a^2b^2p^2=0$.

Coroll.

Coroll. 5.

61. Duae autem aequationes, in quibus insunt x et y, simplicissimae sunt sequentes. Prima scilicet est $qxy = pab$, atque altera erit ista $y^2 - (b + Ka)y = x^2 - (a + Kb)x$; quibus duabus aequationibus problema propositum soluitur.

Scholion.

62. Cum aequatio inuenta habeat quatuor dimensiones neque generaliter concepta diuisionem admittat, ita vt vix quicquam ex illa ad vsum deduci queat; eam ad casus particulares triangulorum accommodabimus, pro quibus aequatio fit diuisibilis, atque casus, quibus natatio euenire potest, reipsa assignari et repraesentari possunt.

Exemplum 1.

63. Sit triangulum propositum ACB isosceles, ita vt latera AC et BC, quae angulum C sub aqua situm, comprehendunt sint aequalia. Ponatur ergo BC $=$ AC $= a$, erit $b = a$, atque aequatio inuenta abibit in hanc $q^2x^4 - (1 + K)q^2ax^3 + (1 + K)pqa^3x - a^4p^2 = 0$, quae diuisione resoluitur in has duas I. $qx^2 - pa^2 = 0$ et II. $qx^2 - (1 + K)qax + pa^2 = 0$. Quarum illa aequatio dat $x = \pm aV\frac{p}{q}$, solus autem valor affirmatiuus habet locum, quia latera AC et BC non vltra C producta ponuntur. Quare ex prima aequatione erit $aC = x = aV\frac{p}{q}$ et $bC = y = aV\frac{p}{q}$, qui ergo est vnus casus, quo triangulum isosceles, ACB aquae insidere potest; eritque pars submersa aCb itidem triangulum isosceles, et sectio aquae ab parallela basi AB, atque AC : $aC = Vq : Vp$. Ex altera aequatione pro x duo obtinentur valores, quorum alter si pro x capiatur, Tab. IV. fig. 3.

 alter

alter pro y valebit, adeo vt vel neuter vel vterque ſit locum habiturus. Erit vero $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})}$, atque $y = \frac{1}{2}(1+K)a \mp a\sqrt{(\frac{1}{4}(+K)^2 - \frac{p}{q})}$; qui valores ne fiant imaginarii oportet vt ſit $1 + K > 2\sqrt{\frac{p}{q}}$ ſeu $K > 2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1$. Praeterea quia tam x quam y minores eſſe debent quam a, oportet ſit $\frac{1}{2}(1+K) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} < 1$ ſeu $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} < \frac{1}{2}(1-K)$, vnde erit $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ denotante α quemcunque numerum affirmatiuum. Quamobrem quo praeter caſum aſſignatum adhuc duo reliqui locum habeant, oportet vt in his duabus aequationibus $K = 2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1 + \beta$ et $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ tam α quam β obtineant valores affirmatiuos. Quod ſi ergo euenerit, prodibunt duo reliqui caſus quibus triangulum aquae inſidere poteſt.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1+K)a + a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \\ y = \frac{1}{2}(1+K)a - a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \end{array}\right\} \text{caſus ſecundus.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1+K)a - a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \\ y = \frac{1}{2}(1+K)a + a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})} \end{array}\right\} \text{caſus tertius.}$$

Coroll. 1.

64. Si triangulum ACB fuerit aequilaterum, erit angulus C 60°, ideoque eius coſinus $K = \frac{1}{2}$. Quare quo duo poſteriores caſus locum inueniant oportet ſit primo vt $\frac{3}{2} > 2\sqrt{\frac{p}{q}}$ hoc eſt vt $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Deinde neceſſe eſt quoque vt ſit $\frac{p}{q} = (1-\alpha)(\frac{1}{2}+\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \alpha^2$, ſumto pro α numero affirmatiuo quocunque. Quod autem $\frac{p}{q}$ ſit fractio affirmatiua oportet ſit $\alpha < 1$. Requiritur ergo vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$.

Scholion.

Scholion.

65. Cum alterum requisitum, ne duo posteriores casus fiant impossibiles, sit $\frac{p}{p} < \frac{1}{4}(1+K)^2$ ponatur $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}(1+K)^2 - \alpha^2$, et per alterum requisitum debebit esse $\alpha < \frac{1}{2}(1-K)$. Erit ergo $\alpha^2 < \frac{1}{4}(1-K)^2$ ideoque $\frac{p}{q} > K$. Quocirca dato angulo ACB, nisi ratio $\frac{p}{q}$ contineatur intra limites $\frac{1}{4}(1+K)^2$ et K, praeter situm primo determinatum alius non datur, quo triangulum isosceles vertice deorsum verso aquae innatare potest. Est vero semper $\frac{1}{4}(1+K)^2 > K$, differentia enim est quadratum $\frac{1}{4}(1-K)^2$, quare pro quouis angulo C triangula exhiberi possunt, quae tribus modis angulo C deorsum verso aquae insidere possunt.

Coroll. 2.

66. In triangulo autem aequilatero, si fuerit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $< \frac{9}{16}$, duo casus posteriores quibus triangulum aquae insidere potest erunt $x = \frac{3}{4}a \pm a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})}$, et $y = \frac{3}{4}a \mp a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})}$

Coroll. 3.

67. Si angulus C fuerit rectus erit $K = o$ huiusmodi igitur triangula triplici modo aquae innatare poterunt, dummodo sit $\frac{p}{q} < \frac{1}{4}$. Tum vero erit I. $x = a\sqrt{\frac{p}{q}}$; II. $x = \frac{1}{2}a + a\sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})}$ et III. $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})}$.

Exemplum 2.

68. Si grauitas specifica trianguli ita fuerit comparata vt sit $p : q = Kb : a$ abibit aequatio generalis in hanc:

 $x^4 -$

Tab. V. fig. 1. $x^4-(a+Kb)x^3+(b+Ka)Kb^2x-K^2b^4=0$ quae diuisione resoluitur in has duas I. $x-Kb=0$; et II. $x^3-ax^2-Kabx+Kb^3=0$. Harum aequationum prima dat $Ca=x=Kb$ et cum ſit $y=\frac{pab}{qx}$ fiet $y=b$. Incidet ergo punctum b in B, et recta Ba erit ſectio aquae.

Coroll. 1.

69. Cum ſit $Ca=Kb$, erit $\frac{Ca}{CB}=K=$ coſinui ang. C. Quare recta Ba erit parpendicularis in latus AC. Haec ergo perpendicularis ſemper poteſt eſſe ſectio aquae, ſi fuerit $p:q=Ca:CA$.

Coroll. 2.

70. Iſta autem innatatio locum habere non poteſt, niſi vterque angulus A et C ſit acutus, alioquin enim recta Ca non intra triangulum caderet quod tamen eſt neceſſe.

Scholion.

71. Simili modo ſi aſſumſiſſemus $p:q=Ka:b$, aequatio diuidi potuiſſet per $x-a$, ita vt prodiiſſet $x=a$. Hic vero caſus a priore non differt, niſi quod punctum B in A et viciſſim ſit translatum. Determinatis ergo caſibus, quibus triangulum homogeneum aquae verticaliter ita innatare poteſt, vt vnicus angulus aquae immergatur, ſupereſt vt etiam in eos caſus inquiramus, quibus huiusmodi triangula cum duobus angulis ſub aqua ſubmerſis innatare queant; his enim in duobus modis continentur omnes omnino caſus, quibus triangulum aquae verticaliter innatare poteſt.

PROPO-

PROPOSITIO 10.
Problema.

72. *Proposito triangulo homogeneo* CAB *cuius grauitas specifica sit ad aquam vt* p *ad* q, *determinare casus, quibus hoc triangulum situ verticali aquae ita insidere potest, vt solus angulus* C *supra aquam emineat.* Tab. V. Fig. 2.

Solutio.

Sit $aABb$ pars aquae immergenda, quae quaesito satisfaciat. Per centra grauitatis tam totius trianguli ACB, quam partis submersae $aABb$ ducatur recta IPQ, quae debebit esse normalis in sectionem aquae ab. At ista recta IPQ quoque transibit per centrum grauitatis trianguli Cab supra aquam eminentis. Quamobrem quaestio huc reducitur vt inueniatur positio rectae ab, quae a toto triangulo partem $aABb$ abscindat, quae sit ad totum vt p ad q; atque vt recta iungens centra grauitatis totius trianguli et trianguli Cab sit normalis ad sectionem aquae ab. Haec ergo posterior conditio prorsus conuenit cum praecendente problemate, prior vero in hoc discrepat quod hic area trianguli Cab se habere debeat ad aream trianguli totius CAB vt $q-p$ ad q; cum haec ratio ibi esset vt p ad q. Qamobrem solutio prioris problematis ad hoc accomodabitur, si tantum $q-p$ loco p scribatur. Ponatur ergo vt ante $AC=a$, $BC=b$, cos. ang. $ACB = K$, et $Ca=x$ atque $Cb=y$, erit $q^2x^4-(a+Kb)q^2x^3+(b+Ka)(q-p)qabx-(q-p)^2a^2b^2=0$. Ex qua aequatione valor ipsius x erutus dabit respondentem valorem ipsius $y=\frac{(q-p)ab}{qx}$. Q. E. I.

Coro. I.

Coroll. 1.

73. Quod igitur aequatio inuenta continebit radices reales et affirmatiuas pro x quae ſunt ipſo a minores et quibus reſpondent valores ipſius y minores quam b, tot modis triangulum propoſitum aquae ita inſidere poterit, vt anguli A et B ſub aqua verſentur.

Coroll. 2.

74. Sin autem aequationis propoſitae omnes radices ſunt reales, earum tres tantum eſſe poſſunt affirmatiuae. Quare fieri non poteſt, vt triangulum pluribus quam tribus modis aquae ita innatare queat, vt ſolus angulus C extra aquam emineat.

Coroll. 3.

75. Si tertium latus AB ponatur $= c$, hocque loco coſinus K anguli ACB introducatur, tum ſequens oritur aequatio $q^2x^4 - \frac{q^2y^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2) + \frac{(q-p)qax}{2}(a^2+3b^2-c^2) - (q-p)^2a^2b^2 = 0$.

Coroll. 4.

76. Si fuerit $p : q = 1 : 2$, haec aequatio congruit cum aequatione ſuperioris propoſitionis. Quare hoc caſu eadem recta ab poterit eſſe ſectio aquae tam ſi angulus C fuerit ſolus extra aquam, quam ſi fuerit aquae ſubmerſus.

Exemplum.

77. Ponatur triangulum propoſitum ACB iſoſceles, latus ſcilicet $BC = AC$ ſeu $b = a$, atque prodibit iſta aequatio $q^2x^4 - (1+K)q^2ax^3 + (1+K)(q-p)qa^3x - (q-p)^2a^4 = 0$,

$a^4 = 0$, quae per diuiſionem abit in has duas aequationes I. $qx^2 - (q-p)a^2 = 0$ et II. $qx^2 - (1+K)qax + (q-p)a^2 = 0$. Harum aequationum prior dat $x = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$; cui quoque reſpondet $y = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$, hoc ergo caſu triangulum extra aquam eminens erit quoque iſosceles, et ſectio aquae ab parallela baſi AB. Altera aequatio has duas pro x dat quantitates $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm a\sqrt{\left(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q}\right)}$, quibus reſpectiue reſpondet $y = \frac{1}{2}(1+K) \mp a\sqrt{\left(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q}\right)}$. Praeter primum ergo ſitum inuentum alius non dari poteſt, niſi ſit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, at etiamſi fuerit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, hoc ſolum non ſufficit ad realitatem poſterium caſuum; inſuper enim requiritur vt tam x quam y ſint ipſo a minores, id quod locum habebit ſi fuerit $\frac{q-p}{q} > K$. Quamobrem, quo caſus poſteriores fiant reales, oportet vt ratio $\frac{p}{q}$ inter hos limites $1-K$ et $1-\frac{1}{4}(1+K)^2$ contineatur.

Scholion.

78. Ex his igitur duabus propoſitionibus omnes caſus definiri poſſunt, quibus datum triangulum homogeneum aquae ſitu verticali innatare poteſt. Perſpicitur autem ſimul numerum caſuum ſatis magnum eſſe poſſe, prout plures radices aequationum inuentarum ſunt reales et quaeſito ſatisfacientes. Omnes autem radices ſi fuerint vtiles, tum triangulum 18 diuerſis modis aquae innatare poterit; tres enim ſunt caſus, quibus ſinguli anguli aquae immerguntur, totidemque quibus ſinguli extra aquam eminent. Vix autem euenire poteſt, vt omnes octodecim caſus fiant reales quia ſi grauitas ſpecifica trianguli ad aquam pro

 vno

vno angulo requiſitam habet proprietatem, eadem pro reliquis angulis non amplius ſatisfacere poteſt. Ita triangulum aequilaterum, ſi quidem eius grauitas ſpecifica ad aquam contineatur inter rationes 16 et 9 : 16, quo caſu plurimas admittit radices ſatisfacientes, 12 tantum diuerſis modis aquae inſidere poteſt.

LEMMA.

79. *Si ex trianguli* ABC *centro grauitatis* G *in latus* AB *perpendicularis* GQ *ducatur, erit lateris* AB *ſegmentum* $AQ = \frac{3 \cdot AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$.

Tab. V. fig. 3.

Demonſtratio.

Ex angulo C per centrum grauitatis G ad latus AB ducatur recta CD, erit ex nota centri grauitatis natura $AD = BD$, atque $GD = \frac{1}{3} CD$. Demittatur porro ex C ad AB perpendiculum CP, erit $AP = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB}$, hincque $DP = \frac{AB}{2} - AP = \frac{BC^2 - AC^2}{2 AB}$. Cum autem CP ſit parallela ipſi GQ erit $PQ = \frac{2}{3} DP$ vnde fiet $PQ = \frac{BC^2 - AC^2}{3 \cdot AB}$. Quamobrem erit $AQ = AP + PQ = \frac{3 AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

80. Ipſum ergo perpendiculum GQ ex centro grauitatis trianguli G in latus AB demiſſum erit tertia pars perpendicularis CP, ita vt ſit $GQ = \frac{1}{3} CP$.

Coroll. 2.

81. Si angulus ACB fuerit rectus, erit $AB^2 = AC^2 + BC^2$, hoc ergo caſu fiet $AQ = \frac{2 AC^2 + BC^2}{3 AB}$ $= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} AB + \frac{AC^2}{3 \cdot AB}$. Atque cum ſit $CP = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ erit $GQ = \frac{AC \cdot BC}{3 \cdot AB}$.

Coroll. 3.

82. Si triangulum ACB fuerit iſoſceles, ita vt ſit $AC = BC$ erit $AQ = \frac{1}{2} AB$. Atque hoc caſu erit $GQ = \frac{1}{3} \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$.

LEMMA.

83. *Si a parallelogrammo rectangulo* ABDC *recta* EF *abſcindatur triangulum* EDF, *atque ex centro grauitatis* G *rectanguli totius* AD *in rectam* EF *perpendiculum* GH *demittatur, inuenire punctum* H. Tab. V. fig. 4.

Solutio.

Ex centro grauitatis G rectanguli in latus BD demittatur perpendicularis GI ſecans rectam EF in K erit $DI = \frac{1}{2} BD$, et $EI = ED - \frac{1}{2} BD$, itemque $GI = \frac{1}{2} AB$. Iam ob triangula EIK, EDF ſimilia, erit $IK = \frac{DF \cdot EI}{DE} = DF - \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque $EK = \frac{EF \cdot EI}{DE} = EF - \frac{EF \cdot BD}{2 \cdot DE}$. Deinde habebitur $GK = \frac{1}{2} AB - KI = \frac{1}{2} AB - DF + \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque propter triangula GHK et EDF ſimilia iſta analogia $EF : DF = GK : KH$, ex qua ſequitur $KH = \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF} + \frac{DF \cdot {}^2BD}{2 DE \cdot EF}$. Quocirca reperietur $EH = EF - \frac{BD \cdot DE}{2 EF} + \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF}$, ſeu $EH = \frac{2 DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2 EF}$. Q. E. I.

Coroll.

84. Ex eorundem triangulorum GHK et EDF ſimilitudine ſequitur etiam fore $EF : ED = GK : GH$. Ex

 hac

hac ergo analogia reperitur ipsa centri grauitatis G a recta EF distantia $= \frac{AB \cdot DE}{2EF} + \frac{BD \cdot DF}{2EF} - \frac{DE \cdot DF}{EF} = \frac{AB\,DE + BD \cdot DF - 2DE \cdot DF}{2EF}$.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. V. fig. 4. 85. *Proposito parallelogrammo rectangulo homogeneo* ABDC, *cuius grauitas specifica sit ad aquam vt* p *ad* q, *inuenire casus, quibus hoc parallelogrammum rectangulum aquae ita insidere potest, vt solus angulus* D *immergatur.*

Solutio.

Sit EF sectio aquae quaesita, et EDF portio aquae immergenda, erit $\frac{1}{2}DE.DF : AB.BD = p : q$; atque recta jungens centra grauitatis totius rectanguli, et partis EDF normalis esse debet in sectionem aquae EF. Quare normales ex centro grauitatis rectanguli, et centro grauitatis trianguli EDF in idem rectae EF punctum incidere debebunt. Quare per 83. et 81 erit $\frac{2DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2EF} = \frac{2DE^2 + DF^2}{3EF}$. Positis nunc $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $DF = x$ et $DE = y$, erit $qyx = 2pab$ seu $y = \frac{2pab}{qx}$, atque $2y^2 + 3ax - 3by = 2x^2$, quae si loco y eius valor $\frac{2pab}{qx}$ substituatur abit in hanc $2qqx^4 - 3qqax^3 + 6pqab^2x - 8p^2a^2b^2 = 0$. Ex qua aequatione inuenietur valor ipsius x, ex eoque valor ipsius y. Q. E. I.

Coroll. I.

86. Aequatio haec ad summum tres habere potest radices affirmatiuas reales, quarum autem ea tantum quaesito

ſito ſatisfaciunt, quae pro x valores dant ipſo $\underline{a}$ minores, et quibus ſimul valores ipſius y reſpondent ipſo $\underline{b}$ minores.

Coroll. 2.

87. Cum triangulum EDF dimidium rectanguli excedere nequeat, perſpicuum eſt rationem q ad p minorem dupla eſſe non poſſe, ita vt eſſe debeat vel $\frac{q}{p} = 2$ vel $\frac{q}{p} > 2$.

Exemplum.

88. Si rectangulum abeat in quadratum vt ſit $b = a$, habebitur iſta aequatio $2q^2x^4 - 3qqax^3 + 6pqa^3x - 8ppa^4 = 0$, quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $qx^2 - 2pa^2 = 0$ et II. $2qx^2 - 3qax + 4pa^2 = 0$. Harum aequationum illa dat $x = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, cui reſpondet $y = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, quo ergo caſu x et y ſunt aequales, et ſectio aquae EF fit parallela diagonali BC. Ex altera aequatione eruitur duplex valor ipſius $x = \frac{3a}{4} \pm a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$, cui quoque iſte duplex valor ipſius y reſpondet, ſcilicet $y = \frac{3a}{4} \mp a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$. Ne igitur hi valores fiant imaginarii oportet ſit $\frac{2p}{q} < \frac{9}{16}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{9}{32}$. Deinde ne excedant latus a oportet ſit $a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})} < \frac{a}{4}$ ſeu $\frac{q}{p} > \frac{1}{4}$. Quare ſi $\frac{p}{q}$ contineatur inter hos limites $\frac{8}{32}$ et $\frac{9}{32}$ tres caſus dantur, quibus quadratum aquae ita inſidere poteſt, vt ſolus angulus D aquae immergatur.

Scholion.

89. Eadem ſolutio parumper immutata etiam huic problemati ſatisfaciet, quo quaeruntur caſus, quibus paralle-

rallelogrammum rectangulum aquae ita insidere queat, vt tres anguli B, A, C sub aquam mergantur, solusque angulus D emineat. Hoc enim casu pariter vt ante positio rectae EF inueniri debet, in quam recta iungens centra grauitatis rectanguli AD et trianguli EDF sit normalis. Hoc tantum differt istud problema a praecedente, quod hic area ABEFC ad totum rectangulum rationem habere debeat p ad q. Cum ergo hoc casu ratio areae trianguli EDF ad rectangulum totum esse debeat vt $q-p$ ad q, solutio praecedens ad hunc casum accommodabitur ponendo $q-p$ loco p. Manentibus igitur ceteris denominationibus vt ante, erit $2qqx^4 - 3qqax^3 + 6(q-p)qab^2x - 8(q-p)^2a^2b^2 = 0$, ex qua valori ipsius x inuento respondet valor ipsius $y = \frac{2(q-p)ab}{qx}$. Si rectangulum abeat in quadratum eadem valebunt, quae in exemplo sunt inuenta, si modo loco p ponatur $q-p$. Ita quadratum tribus diuersis modis aquae ita poterit innatare, vt solus angulus D extra aquam emineat, si $\frac{p}{q}$ contineatur intra hos limites $\frac{24}{32}$ et $\frac{23}{32}$

LEMMA.

Tab. VI. Fig. 1. 90. *Dato trapezio* ABDC, *in quo latera* AC *et* BD *sint inter se parallela, atque ad basin* CD *normalia, inuenire punctum* H, *in quo recta* GH *per centrum grauitatis trapezii* G *ducta in latus* AB *normaliter incidit.*

Solutio.

Producantur tum latus AB tum basis CD, donec concurrant in I et ex vtriusque trianguli ACI et BDI cen-

centris grauitatis concipiantur perpendicula in AI demiſſa. Iam ex ſtaticis conſtat fore momentum trapezii reſpectu puncti I aequale differentiae momentorum triangulorum. Momentum autem figurae reſpectu I obtinetur, ſi area multiplicetur in diſtantiam puncti, in quo perpendiculum ex eius centro grauitatis in AI demiſſum in AI incidit, *a* puncto I. Ita momentum trapezii erit $= ABDC.IH$, atque per 81. erit momentum trianguli $ACI = \frac{ACI(2CI^2 + AC^2)}{3AI}$ atque momentum trianguli $BDI = \frac{BDI(2DI^2 + BD^2)}{3BI}$ Quamobrem habebitur iſta aequatio $ABDC.IH = \frac{ACI(2CI^2 + AC^2)}{3AI} - \frac{BD(2DI^2 + BD^2)}{3BI}$ ex qua punctum H determinabitur. Ponantur ergo $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, et $CD = \surd(a^2 - (b-c)^2) = d$, eritque $AI = \frac{ab}{b-c}$; $BI = \frac{ac}{b-c}$; $CI = \frac{bd}{b-c}$ atque $DI = \frac{cd}{b-c}$. Ex his prodibit $ABDC = \frac{(b+c)d}{2}$; $ACI = \frac{bbd}{2(b-c)}$ et $BDI = \frac{ccd}{2(b-c)}$. Iam ponatur $AH = x$. erit $HI = \frac{ab}{b-c} - x$, quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur tandem $AH = x = \frac{a^2(b+2c)+b^3-c^3}{3a(b+c)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

91. Simili modo ipſum perpendiculum GH ope momentorum poterit determinari, prodibit autem calculo ad finem perducto $GH = \frac{d(b^3-c^3)}{3a(bb-cc)} = \frac{d(bb+bc+cc)}{3a(b+c)}$.

Coroll. 2.

92. Si fuerit $AC = BD$ ſeu $c = b$, quo caſu trapezium mutatur in parallelogrammum rectangulum, prodibit $AH = \frac{a}{2}$, et $GH = \frac{bd}{2a} = \frac{b}{2}$ propter $d = a$ hoc caſu.

PRO-

PROPOSITIO. 12.
Problema.

93. *Determinare casus, quibus parallelogrammum rectangulum* ABDC *homogeneum, cuius grauitas specifica ad aquam sit vt* p *ad* q, *aquae. ita insidere potest, vt duo anguli* C *et* D *sub aqua, reliqui vero* A *et* B *extra aquam versentur.*

Solutio.

Sit EF sectio aquae, quae quaestioni satisfaciat, oportet primo vt sit $\frac{CE+DF}{2} : AC = p:q$. Deinde requiritur vt recta iungens centra grauitatis totius rectanguli et portionis ECDF in EF sit normalis, id quod eueniet, si perpendicula ex vtriusque trapezii ECDF et EABF centris grauitatis in EF demissa coincidant. Per lemma igitur praemissum obtinebitur ista aequatio $\frac{EF^2(CE+2DF)+CE^3-DF^3}{3EF(CE+DF)} = \frac{EF^2(CAE+2BF)+AE^3-BF^3}{3EF(AE+BF)}$. Ponantur ergo $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $CE = x$, $DF = y$, erit $AE = b-x$, $BF = b-y$, et $EF^2 = a^2 + x^2 - 2xy + y^2$. Iam propter primam conditionem fit $\frac{x+y}{2} : b = p:q$ seu $x+y = \frac{2bp}{p}$ altera vero conditio hanc suppeditat aequationem $\frac{(a^2+(x-y)^2)(x+2y)+x^3-y^3}{x+y} = \frac{(a^2+(x-y)^2)(2b-x-2y)+(b-x)^3-(b-y)^3}{2b-x-y}$ Quae aequatio per diuisionem reducitur ad has duas $x=y$ et $a^2+2(y^2+yx+xx) = 3b(y+x)$. Cum autem sit $y = \frac{2bp}{q}$ dabit prior aequatio $x = y = \frac{bp}{q}$ posterior vero $-x2qqxx - 4pqbx + 8p^2b^2 - 6pqb^2 + q^2a^2 = 0$, ex qua aequatione eruitur valor ipsius $x = \frac{pb}{q} \pm \sqrt{\left(\frac{3pb^2}{q} - \frac{3p^2b^2}{q^2} - \frac{a^2}{2}\right)}$ eritque $y = \frac{pb}{q} \mp \sqrt{\left(\frac{3pb^2}{q^2} - \frac{3ppb^2}{q^2} - \frac{a^2}{2}\right)}$. Q.E.I.

Co-

Coroll. 1.

94. Primus ergo casus, quo $x = y = \frac{pb}{q}$ semper locum habet, dummodo fuerit rectangulum grauitate specifice leuius quam aqua seu $p < q$. Tum autem sectio aquae erit EF parallela lateribus AB et CD. Tab. VI. fig. 3.

Coroll. 2.

95. Haec igitur sola solutio quatuor exhibet casus, quibus rectangulum homogeneum aquae innatare potest. Quodlibet enim latus per eam in aqua situm horizontalem prout CD tenere poterit.

Coroll. 3.

96. Duo autem reliqui casus non semper locum habere possunt. Quo enim existere queant requiritur, vt primo sint reales, deinde vt sint affirmatiui et tertio vt sint minor quam latus b. Tab VI. fig. 2.

Coroll. 4.

97. Hi vero pro x et y inuenti valores, quo sint reales requiritur vt sit $a^2 < \frac{6pb^2}{q} - \frac{6p^2b^2}{q^2}$ hoc est vt sit $\frac{a}{b} < \sqrt{\left(\frac{6pq - 6pp}{qq}\right)}$. Deinde quo sint affirmatiui necesse est vt sit $a^2 > \frac{6pqb^2 - 8p^2b^2}{q^2}$ seu $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{(6pq - 8pp)}{qq}}$. Tertio vero quo sint latere b minores oportet vt sit $a^2 > \frac{10pb^2}{q} - \frac{8p^2b^2}{q^2} - 2b^2$ seu $\frac{a}{b} > \sqrt{\left(\frac{10pq - 8pp - 2qq}{qq}\right)}$.

Coroll. 5.

98. Si fuerit rectangulum duplo leuius quam aqua, vt sit $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$; quo posteriores casus fiant reales oportet

sit

ſit $\frac{a}{b} < \frac{\sqrt{6}}{2}$ atque $\frac{a}{b} > 1$ et tertio $\frac{a}{b} > 1$. Requiritur itaque vt $\frac{a}{b}$ contineatur inter limites 1 et $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Coroll. 6.

99. Si fuerit $p : q = 3 : 4$; quo rectangulum poſteriore ratione aquae inſidere queat, oportet vt ſit primo $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, ſecundo $\frac{a}{b} > 0$ et tertio $\frac{a}{b} > 1$. Quare neceſſe eſt vt $\frac{a^2}{b^2}$ contineatur intra limites $\frac{8}{8}$ et $\frac{9}{8}$.

Coroll. 7.

100. Si fuerit $p : q = 1 : 4$, ne poſteriores aquae innatandi modi fiant inutiles neceſſe eſt vt ſit $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, atque $\frac{a}{b} > 1$ nec non $\frac{a}{b} > 0$. Quare limites erunt 1 et $\sqrt{\frac{9}{8}}$ vt ſupra.

Scholion.

101. Quod in his duobus caſibus poſterioribus limites ſint iidem, mirandum non eſt. Nam ſi EF eſt ſectio aquae pro parte ſubmerſa ECDF, quoque ſectio aquae eſſe poterit pro parte ſubmerſa EABF; hicque caſus locum habet ſi grauitas ſpecifica rectanguli ad aquam fuerit vt $q-p$ ad q. Atque ſi in limitibus pro $\frac{a}{b}$ datis ponatur $q-p$ loco p, primus omnino non mutatur, ſecundus vero et tertius commutantur, adeo vt ſemper pro vtroque caſu iidem limites prodire debeant.

Exemplum.

Tab. VII. fig. 1. 102. Abeat rectangulum in quadratum ABDC et quaeratur, quo modo eius grauitas ſpecifica comparata eſſe debeat, vt quadratum plurimis diuerſis modis aquae inſidere fidere queat. Quia ergo eſt $b = a$, fiet primo $x = y = \frac{pa}{q}$ deinde $x = \frac{p}{q}a \pm a\sqrt{(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})}$ atque $y = \frac{p}{q}a \mp a\sqrt{(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})}$, quae poſteriores expreſſiones, quo fiant reales et vtiles, oportet vt primo $\frac{q}{p}$ contineatur intra limites $3 + \sqrt{3}$ et $3 - \sqrt{3}$. Deinde opus eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 4$ vel $\frac{q}{p} < 2$. Tertio vero neceſſe eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 2$ vel $\frac{q}{p} < \frac{4}{3}$. Quare caſus hi fient reales ſi $\frac{q}{p}$ vel intra hos limites $3 + \sqrt{3}$ et 4 vel intra hos $3 - \sqrt{3}$ et $\frac{4}{3}$ contineatur. Deinceps etiam hoc quadratum priore caſu aquae inſidere poteſt, vt vnicus angulus ſub aqua, altero vero vt tres ſub aqua exiſtant (88, 89), hocque vno ſaltem modo, duo enim reliqui ibi expoſiti requirunt vt $\frac{q}{p}$ vel contineatur intra limites 4 et $\frac{32}{9}$, vel intra limites $\frac{4}{3}$ et $\frac{32}{23}$, qui ergo limites ab illis excluduntur. Quare ſi $\frac{q}{p}$ contineatur vel intra limites $3 + \sqrt{3}$ et $\frac{23}{9}$, vel intra limites $3 - \sqrt{3}$ et $\frac{32}{23}$, tum quadratum tam per hanc, quam praecendentem propoſitionem 16 diuerſis modis aquae inſidere poterit. Sit ergo $p : q = 1 : 4$, erunt ſedecim ſectiones aquae, quibus quadratum aquae inſidere poteſt, prout in figura ſunt expreſſae per ef quae eaedem ſectiones quoque valent pro quadrato cuius grauitas ſpecifica ad aquam eſt vt 3 ad 4. Niſi autem grauitas ſpecifica intra dictas rationes contineatur, tum octo tantum modis quadratum aquae inſidere poterit.

Scholion.

103. Quae igitur hic de diuerſis modis, quibus vel triangula vel parallelogramma rectangula homogenea aquae inſidere poſſunt, tradidimus, ea quoque pertinent ad

 priſmata

prismata homogenea, quarum sectiones sunt vel triangula vel rectangula vti supra monstrauimus. Tot scilicet modis huiusmodi prismata, dum eorum axes manent in situ horizontali, aquae insidere poterunt, quot tum pro triangulis tum rectangulis in his propositionibus assignauimus. Hi autem vtique non sunt omnes casus, quibus prismata aquae innatare possunt, nam praeter hos pluribus quoque aliis modis aquae insidere poterunt, dum eorum axes vel sint verticales vel ad horizontem oblique positi, quemadmodum ex allatis facile colligere licet. His autem vlterius persequendis contra nostrum esset institutum, vt immoraremur.

Definitio.

104. Planum diametrale voco planum, quo corpus in duas partes similes et aequales diuiditur ita vt omnes sectiones corporis, quae fiunt planis ad planum diametrale normalibus, ab hoc plano diametrali diuidantur in duas partes similes et aequales.

Corollarium.

105. Corporis igitur plano diametrali praediti centrum magnitudinis incidit in ipsum planum diametrale, cum ex vtraque eius parte corpus sit sibi simile et aequale.

Scholion.

106. Corpora, quae habent planum diametrale, prae ceteris merentur, quae examini subiiciantur; omnia enim corpora quae ad natandum in aqua adhibentur, ita sunt comparata, vt planum diametrale admittant. Sic in omni-

omnibus nauibus planum verticale per ſpinam tranſiens habebit hanc proprietatem, vt naues in duas partes ſimiles et aequales diuidat. Quod autem omnes naues hoc modo fabricentur ratio in promtu eſt, cum nulla ſit ratio, cur ex vna parte aliam habeant figuram, quam ex altera. Quamobrem ad figuram nauium aptiſſimam determinandam ſufficit alteram medietatem circa planum diametrale aſſignaſſe, quippe cui altera pars ſimilis et aequalis conſtitui debet.

PROPOSITIO 13.
Problema.

107. *Corpus, quod plano diametrali eſt praeditum, aquae ſemper ita innatare poteſt, vt planum diametrale ſit verticale, ſi modo corporis centrum grauitatis in planum diametrale cadat.*

Demonſtratio.

Sit corpus huiusmodi aquae ita impoſitum, vt planum diametrale teneat ſitum verticalem, erit ſectio aquae normalis ad planum verticale, ideoque pars aquae ſubmerſa a plano diametrali in duas partes ſimiles et aequales diuidetur. Quamobrem huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis cadet in planum diametrale, in quod etiam centrum grauitatis totius corporis cadere ponitur. Conſequenter corpus ita inclinando, vt planum diametrale maneat verticale, effici poteſt, vt recta iungens centra grauitatis et magnitudinis fiat verticalis, quo ergo caſu corpus aquae innatabit. Q. E. D.

 Scholion

Scholion 1.

108. Huiusmodi ſitu, quo planum diametrale eſt verticale, videmus omnis generis naues aquae inſidere, niſi a viribus alienis ex hoc ſitu declinentur. Atque tum in conſtruendis tum onerandis nauibus in id potiſſimum eſt incumbendum, vt centrum grauitatis in planum diametrale cadat, quo naues hoc ſitu deſcripto aquae innatare queant.

Scholion 2.

109. Expoſita igitur ſunt in hoc capite principia quibus ſtatus aequilibrii corporum aquae innatantium nititur, atque ſimul methodus eſt tradita, cuius ope pro quibuscunque corporibus propoſitis ſitus, quibus aquae inſidere poſſunt, determinare licet. Corpora autem hic ſumus contemplati omnino libera, quae a nullis viribus externis ſunt ſollicitata, ſed a ſolis viribus tum grauitatis tum preſſionum aquae in aequilibrium conſtituuntur; in ſequentibus autem tam ad motum quam aequilibrium corporum, quae vel non ſunt libera vel a viribus externis ſollicitantur determinandum progrediemur. Nunc autem ad caput ſecundum pergimus, in quo inueſtigabimus motum, quo corpus non in aequilibrio conſtitutum, ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituit. In hoc ſcilicet capite conſiderabimus corpora aquae ita impoſita, vt vel non debita pars aquae ſit immerſa, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non ſit verticalis, et inquiremus, quomodo ex hoc ſitu in ſtatum aequilibrii ſe recipiant. Cum autem corpus aquae non ita imponi queat, quin e veſtigio in ſtatum aequilibrii collocetur, eiusmodi caſus hic examinandi venient, quibus corpus ab externa vi ex aequilibrio eſt depulſum, et ceſſante ea vi in ſtatum aequilibrii reuertitur.

Caput