leri Arcano regio Leibnitius ita senſit, ut id improbaſſe existimandus ſit. *Fr. Julii Lüttkenſi* cogitata reconciliationis irenicæ iterum hic edita conſpiciuntur *pag. 342 ſeq.* Epiſcopi *Urſini* ea de cauſa ſcriptæ literæ haud minus exhibentur. Quid ordo theologicus de arcano illo regio ſenſerit Helmſtadii, ex ejus reſponſo, hic evulgato, pateſcit. Criteria Pietiſmi in eo inter alia explicantur *pag. 386.* Irenicis epiſtolis *Moluni, Urſini, Leibnitii, Jablonskii*, jam non immoramur. De Pietiſtis & Socinianis candide *Leibnitius* fecit judicium tale, quale ab ipſo exſpectaſſes. At quid multa? Sylloge integra ſelectis ornamentis effulget.

Pag. 340. 363. 371. 424.

L. E. SOLUTIO PROBLEMATIS CATOPTRICI, in Novis Actis Eruditorum Lipſienſibus pro Menſe Novembri A. 1745 propoſiti, iterum continuata, & finita.

Conf. *Nova Acta Menſ. Januar.* hujus *Anni pag. 27 ſeq.* & *Menſ. Februar. pag. 61 ſeq.*

Problema VII.

LXIV. Dato puncto radiante C invenire curvam continuam $FMBmf$ hujus naturæ, ut ſinguli radii CM, poſtquam duas reflexiones in M & m fuerint paſſi, in ipſum punctum C revertantur. Schema habet Lector in *Figura V Tabulæ II, Menſem Februarium* hujus *Anni* comitantis.

Solutio.

Per punctum C ducatur pro lubitu recta CB, ad quam tanquam ad axem curvæ quæſitæ referantur, ſitque CM radius incidens, Mm primo reflexus, atque MC ſecundo reflexus: ita ut M ſit punctum prioris reflexionis, & m poſterioris reflexionis. Perſpicuum igitur eſt, hæc puncta M & m inter ſe commutari poſſe. Si enim Cm fuerit radius incidens, is poſt geminam reflexionem abibit in MC: unde quemadmodum in curva quæſita punctum m refertur ad punctum M, ita pari modo viciſſim punctum M referetur ad punctum m, eritque relatio inter hæc puncta M & m reciproca. Si igitur ponamus, ſingula curvæ FBf puncta per variabilitatem quantitatis cujuſpiam ω determinari, ac punctum M definiri, ſi ponatur $\omega = \mu$, punctum m vero, si ponatur $\omega = v$, inter hos valores μ & v ejusmodi relationem intercedere oportet, ut, quemadmodum ex μ oritur v, ita vicissim ex v oriatur μ: cui conditioni satisfit, si sit $v = -\mu$. Hinc, si punctum M per functiones quascunque ipsius ω determinetur, punctum m per similes functiones ipsius $-\omega$ determinabitur. Statuamus ergo in Axe CB intervallum $CR = r$ & angulum $CRM = \varphi$, cujus sinus sit $= s$ & cosinus $= u$; atque pro puncto altero m idem habebimus intervallum $CR = r$, angulus autem ille fiet CRm, quia in plagam contrariam cadit, erit $= -180° + \varphi$, eritque propterea ejus sinus $= -s$ & cosinus $= -u$. Cum igitur pro m quantitates r, $-s$ & $-u$ tales debeant esse functiones ipsius $-\omega$, quales sunt r, s, & u, ipsius $+\omega$, manifestum est, r esse debere functionem parem ipsius ω, at s & u functiones impares ipsius ω. Hinc vicissim erit ω functio impar ipsarum s & u, ac propterea intervallum $CR = r$ erit functio par ipsarum s & u. Pro curvis ergo Problemati satisfacientibus relatio inter angulum $CRM = \varphi$ & intervallum $CR = r$, ita debet esse comparata, ut, posito sin. $\varphi = s$ & cos. $\varphi = u$, sit r functio parium dimensionum ipsarum s & u: ita ut si loco s & u ponantur $-s$ & $-u$, quo casu angulus CRM abit in CRm, idem prodeat intervalli $CR = r$ valor: eritque ergo in functionibus rationalibus:

$$\text{vel } r = \frac{A + Bs^2 + Csu + Du^2 + Es^4 + Fs^3u + Gs^2u^2 + \&c.}{\alpha + \beta\alpha^2 + \gamma su + \delta u^2 + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \&c.}$$

$$\text{vel } r = \frac{As + Bu + Cs^3 + Ds^2u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + \&c.}{\alpha + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon su^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \&c.}$$

Quæcunque ergo hujusmodi relatio inter s, u, & r, accipiatur per Probl. I, semper orietur curva, Problemati satisfaciens. Scilicet, si ex M & m ad axem CB demittantur perpendicula MP & mp, vocenturque $CM + MR = p$; $RM = q$; $CM = z$; & coordinatæ $CP = x$, $PM = y$, hæ quantitates sequenti modo determinabuntur:

$CM + MR = p = a + \int u dr$; $MR = q = \frac{pp - rr}{2(p - ur)}$ CM
$= z = p - q = \frac{pp + rr - 2upr}{2(p - ur)}$

$$CP = x = r - uq = \frac{2pr - u(pp + rr)}{2(p - ur)}$$

$$PM = y = sq = \frac{s(pp - rr)}{2(p - ur)} \quad Q. \quad E. \quad I.$$

Coroll. 1.

LXV. Quoniam pro puncto m quantitates s & u fiunt negativæ, r vero non mutatur, formula integralis $\int u dr$ abibit in $-\int u dr$, eritque ergo $Cm + mR = a - \int u dr$. Cum igitur sit $CM + MR = a + \int u dr$, erit perpetuo tota via ab eodem radio confecta $CM + Mm + mC = 2a$, ideoque constans.

Coroll. 2.

LXVI. Si pro puncto m ponatur: $Cm + mR = p'$; $Rm = q'$, $Cm = z'$ & $Cp = x'$; $pm = -y'$, quia in partem contrariam vergit, erit:

$$p' = a - \int u dr$$

$$q' = \frac{p'p' - rr}{2(p' + ur)} \qquad \& \quad x' = \frac{2p'r + u(p'p' + rr)}{2(p' + ur)}$$

$$z' = \frac{p'p' + rr + 2up'r}{2(p' + ur)} \qquad y' = \frac{s(p'p' - rr)}{2(p' + ur)}$$

Coroll. 3.

LXVII. Cum sit $\int u dr = ur - \int r du$ ponatur $\int r du = v$, positoque u negativo, fiet quoque v negativum. Erit ergo $p = a + ur - v$ & $p' = a - ur + v$. Sic denotante $v = \int r du$ sequentes habebimus formulas:

pro puncto M	pro puncto m
$p = a + ur - v$	$p' = a - ur + v$
$q = \frac{a - v}{2} + ur - \frac{ssrr}{2(a - v)}$	$q' = \frac{a + v}{2} - ur - \frac{ssrr}{2(a + v)}$

 $z =$

$$u = \frac{a-v}{2} + \frac{ssrr}{2(a-v)} \qquad z' = \frac{a+v}{2} + \frac{ssrr}{2(a+v)}$$

$$x = ssr - \frac{u(a-v)}{2} + \frac{ssurr}{2(a-v)} \qquad x' = ssr + \frac{u(a+v)}{2} + \frac{ssurr}{2(a+v)}$$

$$y = \frac{s(a-v)}{2} + sur - \frac{s^3rr}{2(a-v)} \qquad y' = \frac{s(a+v)}{2} - sur - \frac{s^3rr}{2(a+v)}$$

Coroll. 4.

LXVIII. Si in curvæ punctis M & m ducantur tangentes MT & mt, itemque normales MN & mn, erit ex §. XX:

$$\text{tang.}\, RMT = \frac{p-ur}{sr} = \frac{a-v}{sr} \ \&\ \text{tang.}\, RMN = \frac{sr}{a-v},$$

unde fit tang. $RTM = \frac{r-up}{sp}$ & tang. $RNM = \frac{sp}{r-up}$.

Ex §. XXIV autem habebimus: $RT = \frac{pp-rr}{2(r-up)}$ & $RN = \frac{r(pp-rr)}{2p(p-ur)} = \frac{qr}{p}$.

Coroll. 5.

LXIX. Deinde etiam ſupra invenimus eſſe, $CR = \frac{2\,CT \cdot CN}{CT+CN}$ quia hic CT in partes contrarias vergit. Cum igitur pro puncto m ſimili modo ſit $CR = \frac{2\,Ct \cdot Cn}{Ct+Cn}$, erit $\frac{CT \cdot CN}{CT+CN} = \frac{Ct \cdot Cn}{Ct+Cn}$, hincque $Tt : Nn = CT \cdot Ct : CN \cdot Cn$.

Coroll. 6.

LXX. Quod ad cauſticam attinet, quoniam hic eandem habemus æquationem inter r & Φ, quam ſupra pro radiis axi parallelis invenimus, erit ut ibi, ſi O ſit punctum in cauſtica

TAB. III ad Nov. Act. Erud. A. 1748. Mens. Mart. P. II pag. 173 seq.

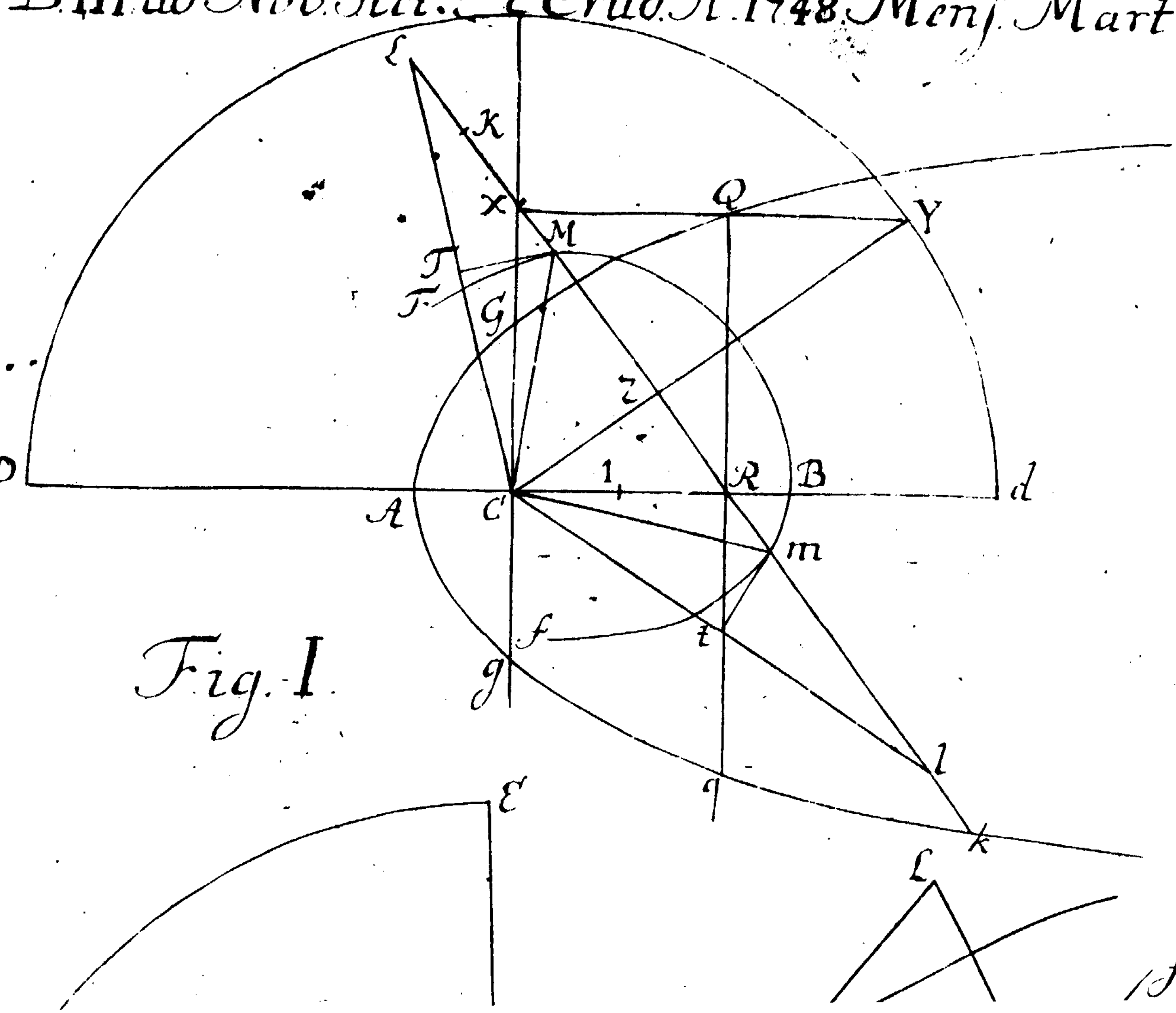

Fig. I

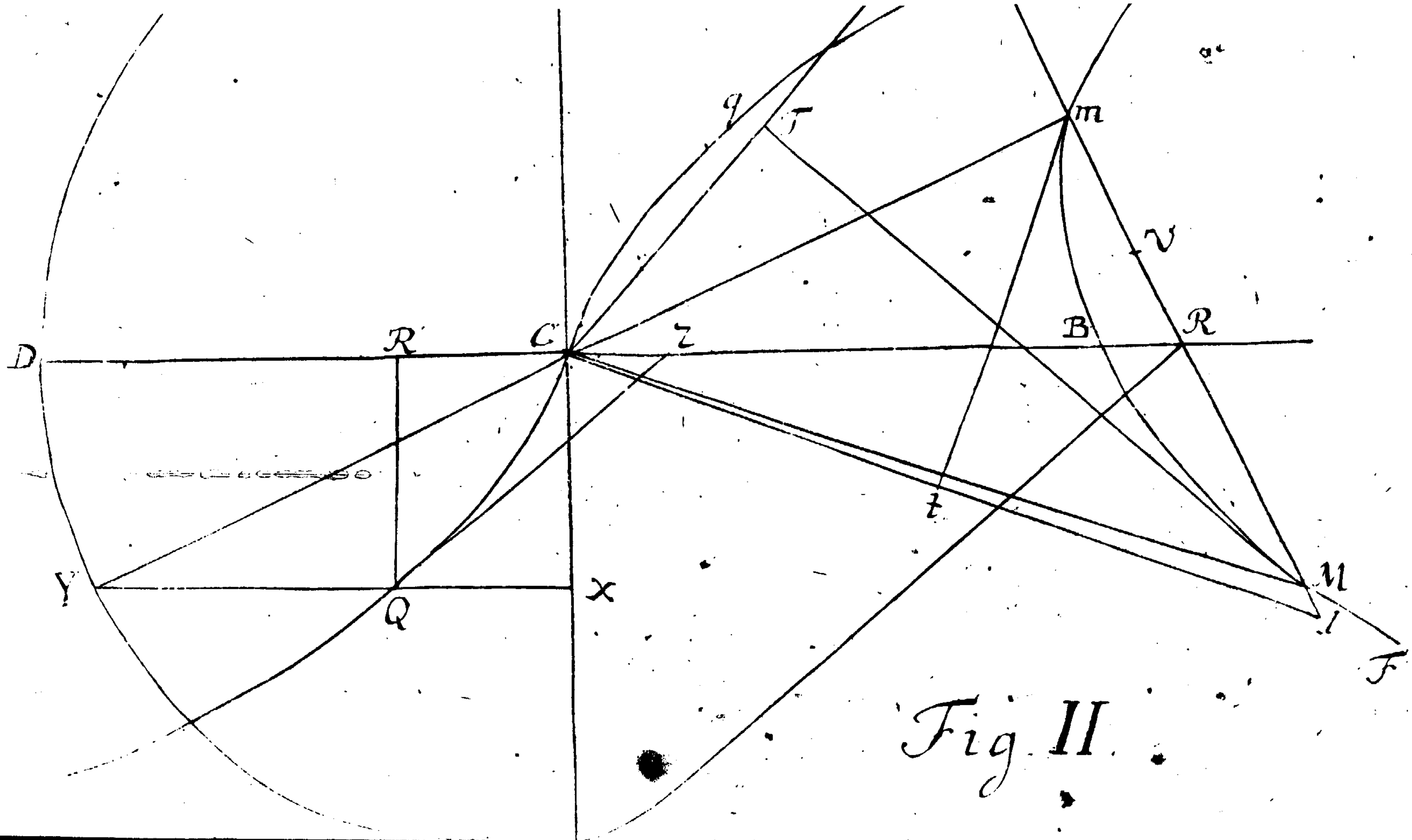

Fig. II.

stica $RO = \frac{-ssdr}{du}$; unde, si ducto ad axem perpendiculo OS vocentur coordinatæ pro caustica $CS = X$ & $SO = Y$, erit $X = r - \frac{ssudr}{du}$ & $Y = -\frac{s^3dr}{du}$: & longitudo causticæ denuo erit $= CM + MO \pm C = a + \int udr - \frac{ssdr}{du} \pm C$: unde eadem constructio fluit, quam jam ante §. XLIX tradidimus.

Coroll. 7.

LXXI. Si punctum radians C in axe promoveatur, seu removeatur, ita ut r quantitate constante vel augeatur, vel diminuatur, caustica ob dr non variatum non mutabitur. Unde, si inventa fuerit caustica idonea ad axem CB relata, ex ea pro quocunque puncto radiante in axe CB assumto curvæ quæsito satisfacientes construi poterunt, & quidem infinitæ, siquidem quantitatem constantem a, a qua caustica non pendet, pro lubitu variare licet.

Coroll. 8.

LXXII. Brevissimus ergo modus hoc Problema resolvendi in hoc consistit, ut plures curvæ causticæ idoneæ ex æquationibus $X = r - \frac{ssudr}{du}$ & $Y = -\frac{s^3dr}{du}$ investigentur & construantur. Tum enim ex qualibet caustica pro quovis puncto radiante in ejus axe sito infinitæ curvæ Problemati satisfacientes inveniri & construi poterunt.

Constructio Curvæ.

LXXIII. Circa axem Ad per punctum radians d ductum describatur curva quæcunque QAq, quæ ab axe Ad in duas partes similes & æquales bisecetur, ita ut Ad sit ejus diameter orthogonalis. Statuatur G initium abscissarum, sitque $CR = r$ & $RQ = u$, atque hæc curva talem exprimet relationem inter r & u, qualis requiritur: valori enim $-u = Rq$ eadem abscissa $CR = r$ respondet. Hinc ergo formula integralis TAB. III Fig. 1.

 $\int udr$

$\int u\,dr$ exhibebit aream hujus curvæ $CGQR$. Jam centro C radio quovis $CE = 1$ deſcribatur circulus, poſitaque CE ad axem Ad perpendiculari, per Q axi parallela agatur XQY, erit $XY = \sqrt{(1 - uu)} = s$, ideoque ducto radio CY, erit angulus $ECY = \phi$, quippe cujus ſinus eſt $= s$ & coſinus $= u$. Ex R in CY demittatur perpendiculum RZ, in quo utrinque producto capiatur $RK = Rk = a$, denotante a quantitatem quamcunque conſtantem pro lubitu aſſumtam, erit ang. $CRZ = ECY = \phi$. Tum quæratur linea quædam CI, ut ſit rectangulum CE. CI æquale areæ $CGQR = \int u\,dr$, erit $CI = \int u\,dr$ ob $CE = 1$: atque hoc intervallum CI ad RK addatur, ab Rk vero auferatur, ut ſit $KL = kl = CI$, & $RL = a + \int u\,dr = p$, atque $Rl = a - \int u\,dr = p'$. Jungantur CL & Cl, ex quarum punctis mediis T & t perpendicula erigantur TM & tm, rectæ Ll occurrentia in M & m, erunt puncta M & m in curva quæſita $FMBmf$, quam ſimul tangent rectæ MT & mt: ita ut ductis CM & Cm, ſi CM fuerit radius incidens, tum futurus ſit Mm radius primo reflexus, & mC radius ſecundo reflexus in ipſum punctum C revertens.

Coroll.

LXXIV. Cum igitur deſcripta curva QAq, non ſolum radius circuli CE, ſed etiam intervallum $RK = Rk = a$ pro lubitu aſſumi poſſit; manifeſtum eſt, ex eadem curva QAq innumerabiles lineas curvas Problemati ſatisfacientes conſtrui poſſe. Ac, ſi curva quidem QAq fuerit quadrabilis, lineæ inde conſtructæ erunt algebraicæ.

Problema VIII.

LXXV. Iisdem manentibus conditionibus, quæ in Problemate præcedente erant poſitæ, invenire omnes curvas algebraicas FBf, quæ radios ex C emiſſos poſt duplicem reflexionem in idem punctum C repercutiant. Vid. *TAB. II Fig. 5.*

Solutio.

Per punctum radians C ducatur recta quæcunque CB pro axe habenda, ad quem curva FBf referatur. Sit CM radius incidens Mm primo reflexus axem ſecans in R, & mC radius

radius altera vice reflexus. Ponatur ut ante intervallum $CR = r$, & angulus $CRM = \phi$, cujus sit sinus $= s$ & cosinus $= u$: debebitque esse r functio parium dimensionum ipsarum s & u, ut puncta reflexionum M & m ad eandem lineam curvam pertineant. Cum igitur supra invenerimus esse $CM + MR = p = a + \int u dr$ & $Cm + mR = a - \int u dr$, manifestum est, curvam fore algebraicam, si formula $\int u dr$ sit integrabilis. Est vero $\int u dr = ur - \int r du$, quare r ejusmodi functionem ipsarum s & u esse oportet, ut formula $\int r du$ fiat integrabilis. Erit autem $\int r du$ functio imparium dimensionum ipsarum s & u. Denotet ergo v functionem quamcunque imparium dimensionum ipsarum s & u, ita ut in rationalibus sit

$$\text{vel } v = \frac{As + Bu + Cs^3 + Dssu + Esuu + Fu^3 + Gs^5 + \&c.}{\alpha + \beta s^2 + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \&c.}$$

$$\text{vel } v = \frac{A + Bs^2 + Csu + Du^2 + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + \&c.}{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon su^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \&c.}$$

atque hujusmodi functioni v æqualis ponatur formula $\int r du$, ut sit $v = \int r du$ erit $r = \frac{dv}{du}$: & $\int u dr = ur - v = \frac{u\,dv}{du} - v$; unde fiet $CM + MR = p = a + ur - v$; & $Cm + mR = a - ur + v = p'$. Si jam porro ponatur ut ante: $RM = q$; $CM = z$; $CP = x$ & $PM = y$, item $Rm = q'$; $Cm = z'$; $Cp = x'$; & $p'm = -y'$; erit ut supra (§. LXVII), siquidem quantitas r jam algebraice per s, u, & v, datur ob $r = \frac{dv}{du}$:

$p = a + ur - v$	$p' = a - ur + v$
$q = \frac{a - v}{2} + ur - \frac{ssrr}{2(a - v)}$	$q' = \frac{a + v}{2} - ur - \frac{ssrr}{2(a + v)}$
$z = \frac{a - v}{2} + \frac{ssrr}{2(a - v)}$	$z' = \frac{a + v}{2} + \frac{ssrr}{2(a + v)}$

$x =$

$$x = ssr - \frac{u(a-v)}{2} + \frac{ssurr}{2(a-v)} \qquad x' = ssr + \frac{u(a+v)}{2} - \frac{ssrr}{2(a+v)}$$

$$y = \frac{s(a-v)}{2} + sur - \frac{s^3 rr}{2(a-v)} \qquad y' = \frac{s(a+v)}{2} - sur - \frac{s^3 rr}{2(a+v)}.$$

In quibus formulis omnes prorſus curvæ algebraicæ, quæ Problemati ſatisfaciunt, continentur. *Q. E. I.*

Coroll. 1.

LXXVI. Jam notavimus, ſemper eſſe $CM + Mm + mC = 2a$. Hic igitur notaſſe juvabit, eſſe $q + q' = Mm = a - \frac{assrr}{aa - vv}$ & $z + z' = CM + Cm = a + \frac{assrr}{aa - vv}$. Præterea vero erit: $x' - x = Pp = uu - \frac{assurr}{aa - vv}$ & $PM + pm = as - \frac{as^3 rr}{aa - vv}$.

Coroll. 2.

LXXVII. Si ponamus $v = ut$, erit t functio par ipſarum s & u nempe in rationalibus

$$\text{vel } t = \frac{A + Bs^2 + Csu + Du^2 + Es^4 + Fs^3u + Gs^2u^2 + \&c.}{\alpha + \beta s^2 + \gamma su + \delta u^2 + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \&c.}$$

$$\text{vel } t = \frac{As + Bu + Cs^3 + Ds^2u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + \&c.}{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon su^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \&c.}$$

Hinc vero erit $dv = tdu + udt$; & $r = t + \frac{udt}{du}$; & $p = a + \frac{uudt}{du}$, atque $p' = a - \frac{uudt}{du}$.

Conſtructio.

TAB. III Fig. 2. LXXVIII. Circa punctum radians C tanquam centrum deſcribatur curva algebraica partibus alternatim poſitis CQ, Cq ſimilibus prædita, ita ut quævis recta per C ducta utrinque ad curvam ſimiliter ſit poſita. Capiatur hujusmodi recta DCB

cta DCB pro axe, ac vocetur abſciſſa $CP = v$, applicata $PQ = u$, fietque poſita u negativa & v negativa, ita ut v ſit functio impar ipſius u, uti requiritur. Ad Q ducatur tangens QZ, erit ſubtangens $PZ = \frac{udv}{du}$; & $PQ : PZ = du : dv$, quare, ſi, ducto ad axem perpendiculo $Ce = 1$, per e tangenti QZ parallela ducatur eR erit $CR = \frac{dv}{du}$, ideoque $CR = r$. Deinde centro C radio $Ce = 1$ deſcribatur circulus, in quo per Q axi parallela agatur XQY, erit $XY = \sqrt{(1 - uu)} = s$, hincque juncto radio CY angulus $YCe = \phi$, jam ex R in YC productam demittatur perpendicularis RL, erit ang. $CRL = eCY = \phi$, ideoque RL poſitio debita radii ſemel reflexi. Sumatur $RV = CZ = \frac{udv}{du} - v$, & in recta RV utrinque producta, ex V capiantur ſpatia æqualia $VL = Vl = a$, datæ ſcilicet rectæ a æqualia: erit $RL = a + \frac{udv}{du} - v = p$, & $Rl = a - \frac{udv}{du} + v = p'$. Jungantur rectæ CL & Cl; ad quas in T & t biſectas normaliter ſtatuantur TM & tm, erunt M & m puncta in curva quæſita, & rectæ TM & tm erunt tangentes hujus curvæ in iisdem punctis M & m, hocque modo curva ſatisfaciens $FMBmf$ eo facilius conſtruetur, quod non ſolum ex quovis puncto Q curvæ aſſumtæ QCq duo puncta M & m, ſed etiam tangentes, ibidem invenientur.

Scholion.

LXXIX. In Figura, qua hanc conſtructionem illuſtravimus puncta M & m ſitum permutatum obtinent, dum punctum M propius ad l, m vero propius ad L, cadit, atque adeo intervallum Mm valorem nanciſcitur negativum; qui caſus ad Problema ſolvendum, ex natura reflexionis, ineptus eſt cenſendus. Curva enim FBf convexitatem axi obvertit, & radius incidens CM non ſecundum Mm, ſed ſecundum directionem contrariam Ml, reflectitur, in qua directione non amplius ad curvam pertingit, neque alteram reflexionem subit. In hoc ergo calculus a vera Problematis indole recedit, quod alterum reflexionis punctum in m indicat, ad quod radius Ml pervenire nequit; cujus dissensus causa est, quod in calculo sola radii directio spectetur, eaque utrinque producta æque consideretur. Scilicet pro radio incidente CM, si natura reflexionis geometrice consideretur, ad punctum incidentiæ M, angulum FMl æqualem constitui oportet angulo CMT, atque recta Ml tam antrorsum, quam retrorsum, Mm versus producta, pro radio reflexo habetur, cum tamen sola prior directio Ml naturæ reflexionis conveniat. Si igitur hanc reflexionis indolem omittamus, atque Problema tantum geometrice interpretemur, curva hæc FBf Problemati ita satisfacit, ut pro quavis recta CM ex C ad curvam educta, si ad M constituatur recta Mm, ad tangentem MT æque inclinata ac ipsa CM, ea curvæ denuo occurrat in puncto quodam m, quæ cum tangente mt angulum constituat $Mmt = Cmt$. Neque ergo in M, neque in m, erit reflexio vera, principiis catoptricis consentanea, sed reflexio ficta, quæ in calculo æque locum habeat. Interim tamen hujusmodi casus, quibus Problema per reflexiones fictas resolvitur, facile dignosci, atque, si visum fuerit, excludi, poterunt: occurrunt scilicet, quoties situs punctorum M & m permutatur, atque intervallum Mm fit negativum. Supra autem invenimus, esse $Mm = a - \frac{assrr}{aa - vv}$: quare, quo curva Problemati proprie satisfaciat, necesse est, ut sit $aa - vv > ssrr$, seu $a > \sqrt{(vv + ssrr)}$; vel $a > \sqrt{\left(vv + \frac{(1 - uu)dv^2}{du^2}\right)}$. Unde patet, ex eadem curva assumta QCq innumerabiles curvas FBf Problemati proprie satisfacientes construi posse, dummodo linea constans a major assumatur, quam $\sqrt{\left(vv + \frac{(1 - uu)dv^2}{du^2}\right)}$. Cum igitur $CP = u$ excedere nequeat

$CD = 1$,

$CD = 1$, quæratur maximus valor formulæ $\sqrt{\left(vv + \frac{(1-uu)dv^2}{du^2}\right)}$, dum u continetur intra limites o & 1, hocque quantitas conſtans a major ſtatuatur. Sic, ſi ſit $v = bu$, debebit eſſe $a > \sqrt{(bbuu + bb(1-uu))}$ ſeu $a > b$; ſi ſit $v = bu^n$ denotante n numerum imparem quemcunque ob $\frac{dv}{du} = nbu^{n-1}$, debet eſſe $a > b\sqrt{(nnu^{2n-2} + (1-nn)u^{2n})}$ qui valor ſi vel $n < o$, vel $n < 1$ caſu $u = o$ evadit infinitus: unde reflexiones fictæ evitari non poterunt.

Conſtructio alia.

LXXX. Deſcribatur curva algebraica quæcunque diametro ortthogonali prædita QAq, cujus diameter AB per punctum radians C tranſeat, &, quia applicatæ ſive affirmativæ PQ, ſive negativæ Pq, eadem abſciſſa CP reſpondet, ſi ponatur $PQ = u$ & $CP = t$, erit t functio par ipſius u: uti §. LXXVII poſtulatur. Ad Q ducatur curvæ tangens QZ, erit ſubtangens $PZ = \frac{udt}{du}$, cui ad alteram applicatæ partem in axe æquale capiatur intervallum $PR = PZ$, erit $CR = t + \frac{udt}{du}$, ideoque $CR = r$. Jam centro C radio $CE = 1$ deſcribatur circulus, ſeu ſaltem quadrans ED, & per Q agatur axi parallela XQY, erit $XY = \sqrt{(1-uu)} = s$, unde ducto radio CY erit angulus $ECY = \phi$. Ex P ipſi CY ducatur parallela PV, in quam ex R demittatur perpendiculum RV utrinque producendum, erit angulus $CRV = ECY = \phi$, & $RV = u$. $PR = \frac{uudt}{du}$. Jam in recta RV producta ex V utrinque æqualia abſcindantur intervalla $VL = Vl = a$, erit $RL = a + \frac{uudt}{du} = p$ & $Rl = a - \frac{uudt}{du} = p'$. Deinde jungantur rectæ CL, Cl, ad quas bisectas in T & t perpendicula ducantur TM, tm rectam Ll secantia in M & m erunt M & m puncta in curva Problemati solvendo apta: atque rectæ TM & tm simul ejus erunt tangentes. Radius enim incidens CM ad M reflectetur in Mm, & ad m denuo in mC.

Scholion.

LXXXI. Constructio hæc nititur Coroll. 2, dum prior ex ipsa solutione est derivata: utraque autem latissime patet, atque omnes lineas algebraicas Problemati satisfacientes in se
TAB. III complectitur. Tum vero etiam utraque ex eadem curva as-
Fig. 2. sumta QAq innumerabiles suppeditat curvas satisfacientes. In constructione enim priori quævis recta per punctum F radians C ducta loco axis assumi potest, in altera vero constructio-
TAB. IV ne curva QAq secundum axem CD pro lubitu vel promoveri,
Fig. 1. vel removeri, potest. Tum vero in utraque constructione, tam radium circuli CE, quam quantitatem constantem a, pro lubitu variari licet, unde ex eadem curva QAq innumerabiles lineæ curvæ FBf per constructionem emergent. Superest igitur, ut lineas curvas algebraicas simpliciores, quæ Problemati satisfaciant, eruamus, earumque æquationes more solito inter coordinatas orthogonales expressas exhibeamus. Hoc præstabimus, si loco v functiones idoneas simpliciores substituamus, ubi quidem primo est notandum, ex pluribus diversis valoribus ipsius v eandem lineam curvam oriri posse: cum enim nihil sit, quo axis CB, ad quam curvam referimus, determinetur, & quævis recta per punctum radians C ducta vicem axis subire queat, eadem curva FBf infinitis modis diversis obtinere poterit, dum modo ad hunc, modo ad alium, axem refertur. Ne igitur hic decipiamur, atque eandem curvam ex pluribus diversis valoribus ipsius v assumtis adi-
TAB. IV piscamur; quemadmodum omnes ipsius v valores, qui ean-
Fig. 2. dem lineam curvam ad diversos axes relatam præbent, sint inter se affecti, erit dispiciendum. Si igitur pro axe CB sit angulus $CRM = \phi$, ejusque sinus $= s$ & cosinus $= u$; pro alio quovis axe Cb cum illo CB angulum constituente $BCb = \theta$, erit angulus $CrM = \phi - \theta$: unde si sit sin. $\theta = m$ &

cos. θ

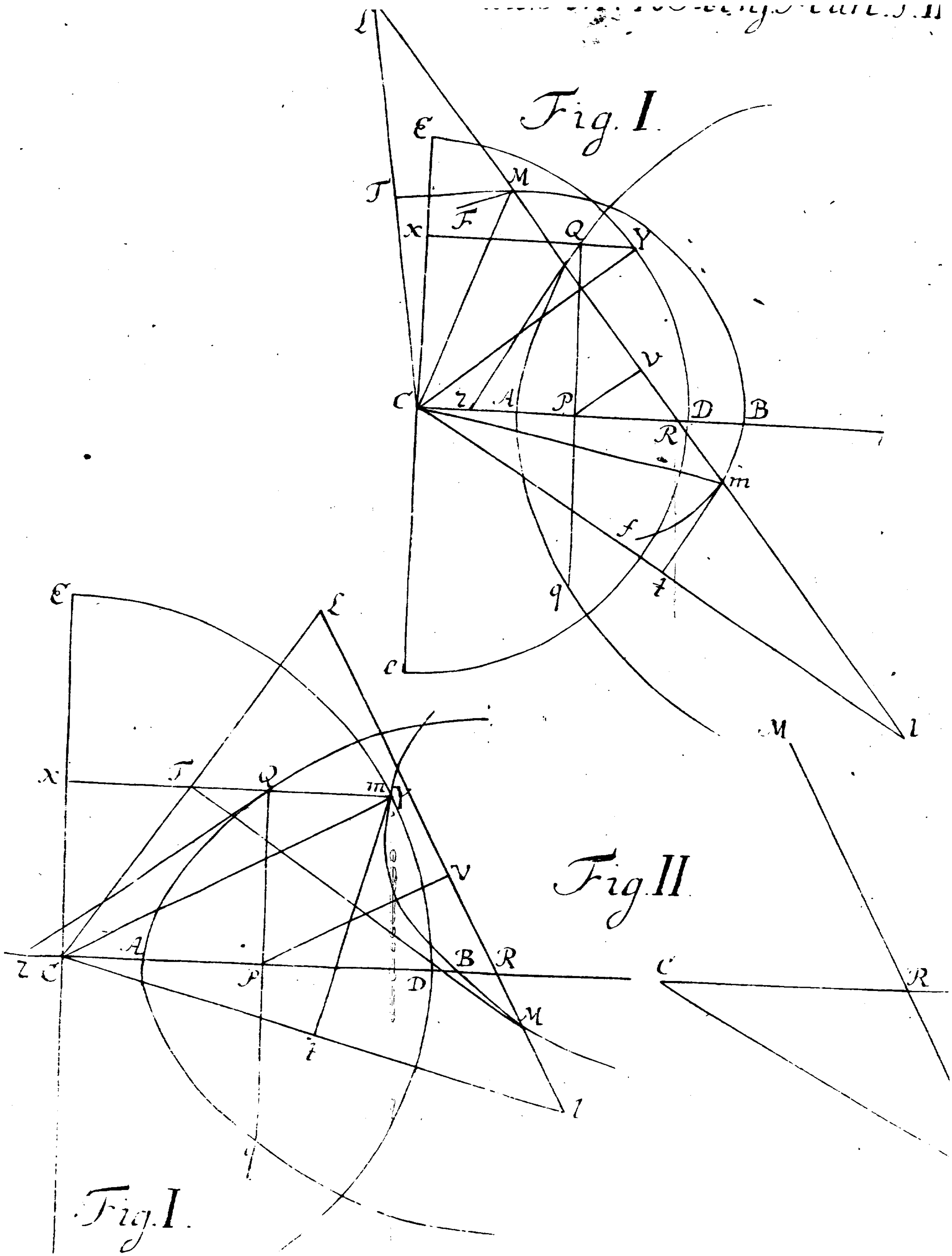
Fig. I.
E
M
T
F
x
Q
Y
V
C
Z
A
P
D
B
R
m
f
q
t
c
l
L
Fig II.
E
L
x
T
Q
m
V
Z
C
A
P
B
R
D
M
t
l
C
R
M
Fig. I.

cos. $\theta = n$, erit anguli CrM sinus $= ns - mu$ & cosinus $= ms + nu$. Quare, sive pro v assumatur functio quæpiam ipsarum s & u, sive similis functio ipsarum $ns - mu$ & $ms + nu$, eadem reperietur linea curva. Scilicet, si curva fuerit inventa ex valore $v = bu$, eadem curva reperietur, si ponatur $v = mbs + nbu$: hincque ex omnibus valoribus ipsius v, qui ad eandem lineam curvam deducunt, facillimus & ad calculum maxime accommodatus eligi poterit.

Exemplum. 1.

LXXXII. Cum v debeat accipi functio impar ipsarum s & u, ponamus $v = bu$, qui valor æque late patet; ac si assumeremus $v = bu + cs$: uti modo vidimus. Erit ergo $r = \frac{dv}{du} = b$: ideoque punctum R in axe CB constans; ex quo jam est perspicuum, curvam fore sectionem conicam; circa focos C & R descriptam, atque ellipses quidem Problemati per reflexiones veras, hyperbolas vero per fictas, esse satisfacturas. Calculum autem si prosequamur, erit ob $r = b$ & $v = bu$: TAB. II Fig. 5.

$CM + MR = p = a$	$Cm + mR = p' = a$
$RM = q = \dfrac{aa - bb}{2(a - bu)}$	$Rm = q' = \dfrac{aa - bb}{2(a + bu)}$
$CM = z = \dfrac{aa - 2abu + bb}{2(a - bu)}$	$Cm = z' = \dfrac{aa + 2abu + bb}{2(a + bu)}$
$PR = uq = \dfrac{aau - bbu}{2(a - bu)}$	$Rp = uq' = \dfrac{-aau + bbu}{2(a + bu)}$
$CP = x = \dfrac{2ab - (aa + bb)u}{2(a - bu)}$	$Cp = x' = \dfrac{2ab + (aa + bb)u}{2(a + bu)}$
$PM = y = \dfrac{aas - bbs}{2(a - bu)}$	$pm = -y' = \dfrac{aas - bbs}{2(a + bu)}$.

Ex æquatione $x = \dfrac{2ab - (aa + bb)u}{2(a - bu)}$ fit $u = \dfrac{2ab - 2ax}{aa + bb - 2bx}$ & $a - bu = \dfrac{a(aa - bb)}{aa + bb - 2bx}$, atque s

 $= \surd$

$$= \sqrt{(1 - uu)} = \frac{\sqrt{((aa-bb)^2 + 4b(aa-bb)x - 4(aa-bb)xx)}}{aa + bb - 2bx}.$$

Hinc erit $y = \frac{\sqrt{(aa - bb)(aa - bb + 4bx - 4xx)}}{2a}$.

ideòque $yy = \frac{(aa - bb)^2 + 4b(aa - bb)x - 4(aa-bb)xx}{4aa}$

quæ eſt pro ellipſi, ſi $a > b$; pro parabola, ſi $a = b$; pro hyperbola, ſi $a < b$, & pro circulo, ſi $b = o$. Tum vero parameter erit $= \frac{aa - bb}{a}$; axis conjugatus $= \sqrt{(aa - bb)}$, & axis transverſus $= a$.

Exemplum. 2.

LXXXIII. Ponamus $v = bu + cu^3$, erit $r = \frac{dv}{du} = b + 3cuu = CR$, unde porro fiet:

$GM + MR = p = a + 2cu^3$	$Cm + mR = p' = a - 2cu^3$
$RM = q = \frac{(a+2cu^3)^2 - (b+3cuu)^2}{2(a - bu - cu^3)}$	$Rm = q' = \frac{(a-2cu^3)^2 - (b+3cuu)^2}{2(a + bu + cu^3)}$
$CM = z = \frac{(a-bu-cu^3)^2 + (1-uu)(b^2 + 3cuu)^2}{2(a-bu-cu^3)}$	$Cm = z' = \frac{(a + bu + cu^3)^2 + (1-uu)(b+3cuu)^2}{2(a + bu + cu^3)}$
$PR = uq = \frac{u(a + 2cu^3)^2 - u(b + 3cuu)^2}{2(a - bu - cu^3)}$	$Rp = uq' = \frac{u(a-2cu^3)^2 - u(b+3cuu)^2}{2(a + bu + cu^3)}$
$CP = x = \frac{(2a-bu+cu^3)(b+3cuu) - u(a+2cu^3)^2}{2(a - bu - cu^3)}$	$Cp = x' = \frac{(2a + bu - cu^3)(b+3cuu) + u(a-2cu^3)^2}{2(a - bu - cu^3)}$
$PM = y = \frac{s(a+2cu^3)^2 - s(b+3cuu)^2}{2(a - bu - cu^3)}$	$pm = -y' = \frac{s(a - 2cu^3)^2 - s(b + 3cuu)^2}{2(a + bu + cu^3)}$

Quoniam

Quoniam hæ formulæ nimis ſunt complicatæ, ponamus $b = 3a$ & $c = -4a$, ut ſit $v = 3au - 4au^3$ & $r = 3a - 12auu$, fietque

$p = a - 8au^3$; $q = -4a - 12au + 8au^3$; $z = 5a + 12au - 16au^3$

$x = 3a + 4au - 8au^4$, & $y = -4as - 12asu + 8asu^3$.

Hinc autem inter x & z æquatio rationalis quarti ordinis reſultat, quæ veriſimiliter inter x & y ad gradum octavum aſſurget.

Exemplum 3.

LXXXIV. Statuamus $v = bu + \frac{c}{u}$, erit $r = \frac{dv}{du} = b - \frac{c}{uu} = CR$, atque

$$\begin{array}{l|l}
CM + MR = p = a - \frac{2c}{u} & Cm + mR = p' = a + \frac{2c}{u} \\
RM = q = \dfrac{\left(a - \frac{2c}{u}\right)^2 - \left(b - \frac{c}{uu}\right)^2}{2\left(a - bu - \frac{c}{u}\right)} & Rm = q' = \dfrac{\left(a + \frac{2c}{u}\right)^2 - \left(b - \frac{c}{uu}\right)^2}{2\left(a + bu + \frac{c}{u}\right)}
\end{array}$$

Ponamus $b = 0$ & $a = c$, erit $CR = -\frac{c}{uu}$ atque

$$\begin{array}{l|l}
CM + MR = c - \frac{2c}{u} = p & Cm + mR = p' = c + \frac{2c}{u} \\
RM = q = c - \frac{3c}{u} + \frac{c}{uu} + \frac{c}{u^3} & Rm = q' = c + \frac{3c}{u} + \frac{c}{uu} - \frac{c}{u^3} \\
CM = z = -\frac{c}{u} - \frac{c}{uu} - \frac{c}{u^3} & Cm = z' = -\frac{c}{u} - \frac{c}{uu} + \frac{c}{u^3} \\
CP = x = -cu + 3c - \frac{c}{u} - \frac{2c}{uu} & Cp = x' = cu + 3c + \frac{c}{u} - \frac{2c}{uu} \\
PM = y = cs - \frac{3cs}{u} + \frac{cs}{uu} + \frac{cs}{u^3} & pm = -y' = cs + \frac{3cs}{u} + \frac{cs}{uu} - \frac{cs}{u^3}
\end{array}$$

Ex

Ex his ergo erit $u^3z - cuu + cu + c = 0$ & $cu^3 + (x - 3c)uu + cu + 2c = 0$, unde eliminando u fiet primo

$$\begin{array}{l} +2zuu + cu + c = 0 \\ -cuu - xu \end{array}$$

tum vero $zuu - 2zu + x = 0$; ex quibus obtinetur

$$uu = \frac{2zu - x}{z} = \frac{(c - x)u + c}{c - 2z}$$ ac propterea $$u = \frac{cx + cz - 2xz}{cz + xz - 4zz} = 1 \pm \surd\left(1 - \frac{x}{z}\right):$$ ergo $$\pm \surd\left(1 - \frac{x}{z}\right) = \frac{cx - 3xz + 4zz}{z(c + x - 4z)} = \frac{\surd(zz - xz)}{z}$$ quæ ad rationalitatem perducta dat

$$x^3z - 4cxxz - 2cxzz + 8cz^3 + ccxx + ccxz - cczz = 0$$

ac si pro z ſtatuatur valor $\surd(xx + yy)$ æquatio ad octavum gradum eſt adſcenſura. Ad curvas ergo Problemati ſatisfacientes cognoſcendas præſtabit, utramque coordinatam x & y per functiones ejusdem variabilis u exprimere, quam eliminando u æquationem rationalem inter coordinatas x & y eruere, quæ nullum alium habere poteſt uſum, niſi quod oſtendat, ad quemnam linearum ordinem curva inventa pertineat.

THESAURI EPISTOLICI LACROZIANI Tomus II. Ex Bibliotheca Jordaniana edidit JO. LUDOVICUS UHLIUS.

Lipſiæ, impenſis Jo. Frid. Gleditſchii, 1743, 4.
Alph. 1 plag. 19.

Continet hic *Tomus* Epiſtolas *CLXVIII* celeberrimi quondam, nunc deſideratiſſimi, Hamburgenſium Theologi, *Jo. Chriſtoph. Wolfii*, limatiſſimas utique ac digniſſimas lectu. His mantiſſæ loco, & ad *primum Tomum* ſupplendum, adjunguntur *Theophili Sigefr. Bayeri* Epiſtolæ quatuor, una *Jo. Hübneri*, *Pauli Ern. Jablonskii* una, una *Bernardi Pezii*, *Caroli Schaafii* ſola Germanica, *Guilielmi Whiſtoni*, pariter ſingularis, ut