Zanottus attentus esset, isque adeo hoc tempus, & quo in Conventu accensum tormentum fuerat, centum quinquaginta septem sexagesimas momenti partes intercederc deprehendit, quarum tres impendendæ fuerunt tormento in arce accendendo. Nebulosa igitur tempestas velocitatem soni perparum mutavit, præcipue cum multo remissius, quam quo tempore prius experimentum instituebatur, frigus esset. Nihilo minus *Bianconius*, quia in omnium Physicorum observationibus, de soni velocitate factis, aliqua varietas est, mavult eam causis in aera agentibus tribuere, quam tantorum virorum negligentiæ. Cumque sonus per successivam communicationem motus cum omnibus a sonoro corpore procedentibus aeris particulis, fiat, quicquid elasticitatem aeris, densitatem, pariter ac gravitatem, mutare possit, & soni putat velocitatem variare posse. Et maxima sine dubio a ventis aeris sonique mutatio provenit, præcipue cum alius possit in loco, ubi corpus sonorum est, alius, ubi percipitur, alius in intermediis, esse. Quapropter, ut certi quid inveniretur, necesse esset, ut non, nisi ubi constans ventus sit, & in locis multum distantibus, experimentum caperetur, quod tamen intelligitur facile fieri vix posse.

Pag. 94 seq. 96 seq. 99. 105 seq.

L. E. SOLUTIO PROBLEMATIS CATOPTRICI, in Novis Actis Eruditorum Lipsiensibus pro Mense Novembri A. 1745 propositi.

I. Notissima est illa ellipseos proprietas, quod radii lucidi, ex altero ellipsis foco emanantes, post reflexionem ad ejus perimetrum factam, in altero foco colligantur; in hyperbola autem radii, ex uno foco profecti, post reflexionem, quam in perimetro patiuntur, divergant quidem, sed, si retro producti concipiantur, in altero foco conveniant; in parabola vero, quæ nihil aliud est nisi ellipsis, cujus foci intervallo infinito distant, radii, ex foco emissi, post reflexionem fiant axi paralleli, &, si radii axi paralleli in parabolam incidant, post reflexionem in ejus foco concurrant. Hæc autem reflexionis ratio ita propria eſt ſectionibus conicis, ut præter eas nulla alia detur linea curva, quæ radios lucidos, ex dato puncto emiſſos, poſt reflexionem in alio quodam puncto dato colligat; erunt ſcilicet hæc duo puncta foci ſectionis conicæ, huic caſui ſatisfacientis. Verum, ſi hanc ideam latius extendamus, atque geminam reflexionem contemplemur, ellipſis quidem hac inſigni proprietate prædita deprehendetur, ut omnes radii lucidi, qui ex uno foco emittuntur, poſtquam duplicem reflexionem ad ejus perimetrum fuerint paſſi, in eodem foco, ex quo erant egreſſi, jugiter concurrant. Statim autem facile animadvertimus, hanc affectionem ſectionibus conicis non ita, uti priorem, eſſe propriam, ſed in innumerabiles alias lineas curvas competere. Quoniam enim hic perinde eſt, ſive radii poſt primam reflexionem ſeſe in unico puncto trajiciant, ſive cauſticam quamcunque tangant; manifeſtum eſt hoc poſteriori caſu, quo radii poſt primam reflexionem non per idem punctum transmittuntur, alias lineas curvas quæſtioni eſſe ſatisfacturas, atque adeo earum numerum fore infinitum. Has igitur omnes curvas exhibere Problema propoſitum jubet.

II. Si punctum, unde radii lucidi egrediuntur, in infinitum remotum concipiatur, ita ut radii incidenter fiant inter ſe paralleli, caſus habebitur Problematis, qui ſolutu facilior merito videatur. Quæruntur ſcilicet omnes lineæ curvæ, quæ cum parabola hac communi proprietate gaudeant, ut omnes radii datæ lineæ rectæ pro axi aſſumtæ paralleli, poſtquam in curva duplicem reflexionem fuerint paſſi, eidem rectæ denuo fiant paralleli, quam proprietatem præter parabolas, quarum axes eidem rectæ ſunt paralleli, innumerabiles lineæ curvæ aliæ habebunt. Hujus igitur Problematis ſpecialioris æque ac præcedentis generalioris ſolutionem hic exponam. Ac primo quidem formulas generales inveſtigabo, quibus omnes lineæ curvæ, propoſita proprietate præditæ, contineantur, &, cum harum linearum aliæ ſint tranſcendentes, aliæ algebraicæ, inprimis operam dabo, ut algebraicas ſeorſim exhibeam, in quo

quo præcipua propositionis vis consistere videtur. Tum vero ex formulis generalibus inventis constructiones geometricas adornabo, ut Problema propositum non solum analytice, sed etiam geometrice, solutum tradam.

III. Qui solutionem hujus Problematis saltem tentaverit, is, nullum est dubium, quin maximam difficultatem in duplici reflexione offenderit; quoniam efficiendum est, ut bina reflexionis puncta in eadem linea curva sint sita. Omissa enim lineæ curvæ continuitate, quælibet linea curva, in qua altera radiorum reflexio fieret, pro lubitu assumi posset, neque difficile tum foret, pro altera reflexione ejusmodi lineam curvam investigare, ut radii post utramque reflexionem in idem punctum, unde primum exierant, reverterentur. Verum hoc modo non una, sed duæ lineæ curvæ obtinebuntur, quæ junctim sumtæ conditionem Problematis adimplerent; neque ergo idoneæ essent censendæ, nisi forte ambæ essent partes ejusdem lineæ curvæ continuæ. Difficultas ergo denuo huc redibit, quomodo eæ lineæ pro prima reflexione assumendæ inveniri debeant, ut alteræ, quæ hoc modo pro secunda reflexione eliciantur, earum sint partes continuæ, & ambæ in eadem æquatione simplici contineantur. Æquationem simplicem autem hic voco, quæ in duas pluresve æquationes resolvi nequeat; nisi enim hæc restrictio subintelligeretur, binas quasvis lineas curvas diversissimas in una eademque æquatione complecti liceret.

IV. Quanquam autem jam passim hujusmodi Problemata exstant soluta, quibus ex proposita quapiam binorum punctorum curvæ relatione ipsæ curvæ sunt definitæ, uti in Problemate trajectoriarum reciprocarum, aliisque ejusdem generis; tamen, si more consueto naturam reflexionis in calculum inducamus, formulæ prodeunt nimis complicatæ, quam ut in earum, quatenus ad duo diversa curvæ puncta pertinent, comparatione continuitatis ratio haberi possit. Hæc scilicet difficultas occurrit, si ad coordinatas orthogonales curvæ calcu-

lum accommodare velimus; qua ratione non solum ipsæ coordinatæ, sed etiam earum differentialia in positionem radii reflexi; atque adeo differentio-differentialia in longitudinem radii reflexi ingrediuntur: quibus rebus effectis continuitatis plurimum impeditur, atque solutio maxime prolixis & inextricabilibus calculis implicatur. Hoc ergo incommodum ut evitemus, loco coordinatarum alias quantitates in calculum introduci conveniet, quibus natura curvæ æque determinetur, quæ autem ita sint comparatæ, ut per eas ratio reflexionis satis succincte & simpliciter exprimi queat. Cum igitur,
TAB. I si proposita fuerit curva AMB cum puncto radiante C, ex
Fig. 1. quolibet radio incidente CM positio radii reflexi MR, atque adeo tam intervallum CR in axe pro lubitu assumto AB, quam angulus CRM, definiri queat; vicissim ex data relatione inter intervallum CR & angulum CRM ipsa curva cognosci poterit, uti in Problemate sequente ostendetur.

Problema 1.

V. Si radii CM, ex puncto lucido C emissi, ad curvam AMB in M reflectantur, ut radii reflexi sint MRO, atque in recta AB pro axe assumta detur relatio inter intervallum CR & angulum CRM; determinare inde naturam curvæ reflectentis AMB.

Solutio.

Vocetur intervallum $CR = r$ & angulus $CRM = \phi$, cujus sit sinus $= s$ & cosinus $= u$, posito sinu toto $= 1$, ita ut sit $ss + uu = 1$, & $d\phi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Si igitur data sit æquatio quæcunque inter r & angulum ϕ, ejusve sinum & cosinum s & u; hinc definiri oportet naturam curvæ AMB; quod commodissime efficietur, si inde relatio inter coordinatas orthogonales $CP = x$ & $PM = y$ determinetur. Concipiatur radius incidens proximus Cm, cui respondeat reflexus mrO, priori CMO occurrens in O, ita ut sit O punctum in caustica, a radiis reflexis per contactum formata: atque ex natura reflexionis particula curvæ Mm spectari poterit tanquam

Tab. I ad Nov. Act. Erud. A. 1748. Mens. Jan. p. 3[illegible]

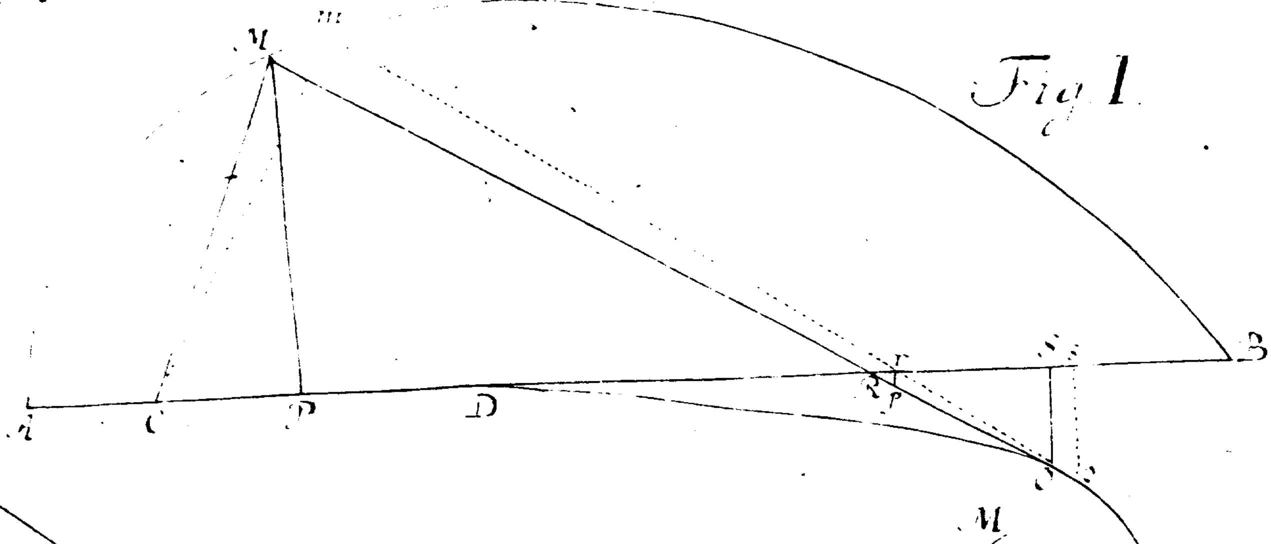

Fig. I.

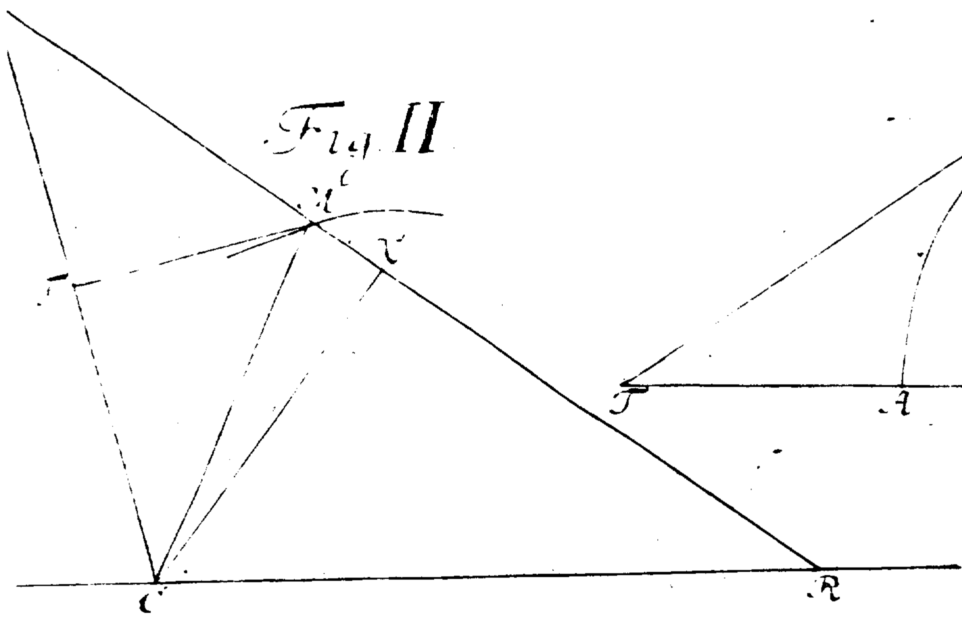

Fig. II.

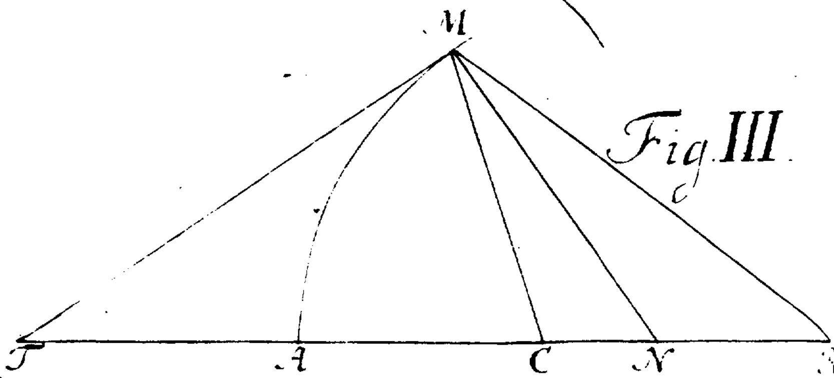

Fig. III.

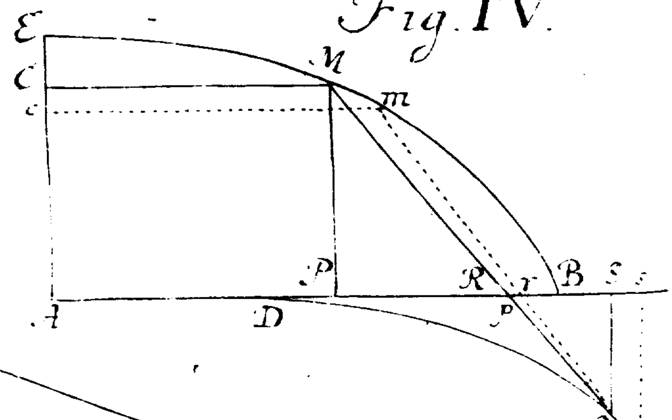

Fig. IV.

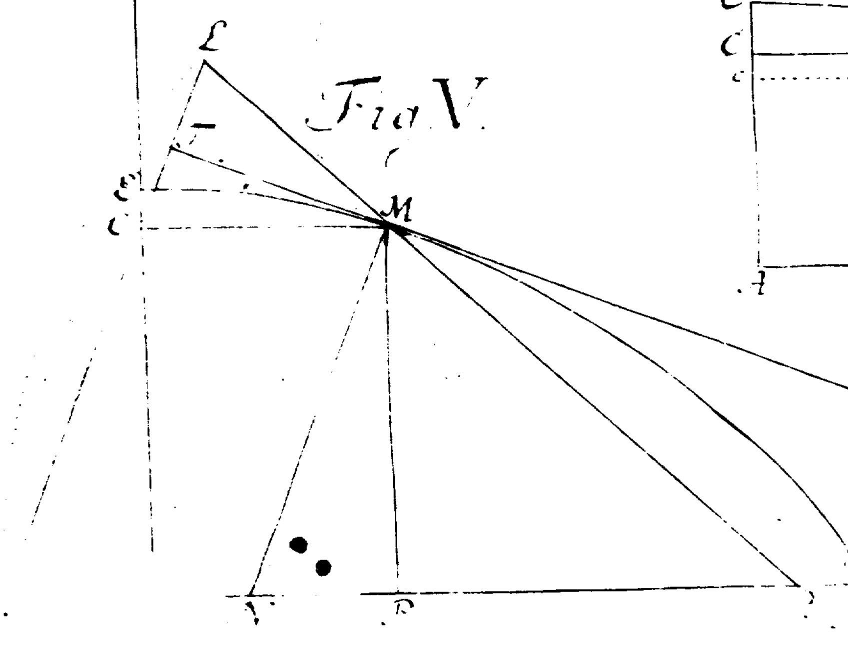

Fig. V.

quam elementum ellipsis, binis focis C & O descriptæ: eritque igitur $CM + MO = Cm + mO$. Ob situm autem proximum erit $Rr = dr$ & angulus $Crm = \phi + d\phi$, unde fiet angulus $ROr = d\phi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Centro O describatur arculus $r\varrho$, ut sit $Or = O\varrho$, atque in triangulo $R\varrho r$ ad ϱ rectangulo ob $Rr = dr$ & angulum $rR\varrho = \phi$ erit $r\varrho = dr\, sin\, \phi = s\,dr$, & $R\varrho = dr\, cos\, \phi = u\,dr$. Vocetur nunc $CM + MR = p$, erit $Cm + mr = p + dp$: unde ob $CM + MO = Cm + mO$ habebitur $p + RO = p + dp + rO$, seu $dp = RO - rO = R\varrho = u\,dr$: unde fit integrando $p = a + \int u\,dr$. Sit jam porro $RM = q$ & $CM = z$; erit $q + z = p = a + \int u\,dr$: at ob angulum $CRM = \phi$ datum erit $zz = qq + rr - 2uqr = (p-q)^2 = pp - 2pq + qq$; ideoque $pp - rr = 2pq - 2uqr$, seu $q = \frac{pp - rr}{2(p - ur)}$. Quoniam igitur per r & ϕ jam definivimus $p = CM + MR = a + \int u\,dr$, cognitum erit latus $RM = q = \frac{pp - rr}{2(p - ur)}$, hincque $CM = z = p - q = \frac{pp - 2upr + rr}{2(p - ur)}$. Verum ex $RM = q$ & angulo $CRM = \phi$ reperietur: $PM = sq = \frac{s(pp - rr)}{2(p - ur)}$ & $RP = uq = \frac{u(pp - rr)}{2(p - ur)}$: ideoque $CP = \frac{2pr - urr - upp}{2(p - ur)}$. Quamobrem ex data relatione inter $CR = r$ & angulum $CRM = \phi$ (positis $sin\, \phi = s$ & $cos\, \phi = u$) coordinatæ orthogonales ita exprimentur, ut posito $p = a + \int u\,dr$ sit:

$$CP = x = \frac{2pr - u(pp + rr)}{2(p - ur)}$$

$$PM = y = \frac{s(pp - rr)}{2(p - ur)}$$ unde porro fit radius inci-

dens

dens $CM = z = \frac{pp + rr - 2upr}{2(p - ur)}$ & radius reflexus $MR =$

$q = \frac{pp - rr}{2(p - ur)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

VI. Si igitur cosinus anguli $CRM = u$ ita detur per r, ut formula $\int u\,dr$ integrabilis exiſtat; tum pro coordinatis x & y formulæ algebraicæ reperientur, ideoque his caſibus curva AMB erit algebraica.

Coroll. 2.

VII. Quia in formula integrali $p = a + \int u\,dr$ pro a quantitatem quamcunque conſtantem aſſumere licet, perſpicuum ex relatione inter r & ϕ data, curvam AMB non determinari, ſed innumerabiles lineas curvas exhiberi poſſe, quæ relationi propoſitæ æque ſatisfaciant.

Coroll. 3.

VIII. Quoniam eſt $\int u\,dr = ur - \int r\,du$, erit $p = a + ur - \int r\,du$ & $p - ur = a - \int r\,du$, & curva erit algebraica, ſi formula $\int r\,du$ fuerit integrabilis. Ponatur ergo $\int r\,du = v$, fiet $p = a + ur - v$, $pp - rr = (a-v)^2 + 2ur(a-v) - ssrr$, & ob $p - ur = a - v$ erit $q = \frac{a-v}{2} + ur - \frac{ssrr}{2(a-v)}$ $= RM$.

Coroll. 4.

IX. Hinc ergo porro erit $PM = \frac{s(a-v)}{2} + sur - \frac{s^3rr}{2(a-v)}$, & $RP = \frac{u(a-v)}{2} + uur - \frac{ssurr}{2(a-v)}$ atque $CM = \frac{a-v}{2} + \frac{ssrr}{2(a-v)}$. Quare ex his formulis habebimus:

$$CP = x = ssr - \frac{u(a-v)}{2} + \frac{ssurr}{2(a-v)}$$

$PM =$

$$PM = y = sur + \frac{s(a-v)}{2} - \frac{s^3 rr}{2(a-v)}$$

$$CM = z = \frac{a-v}{2} + \frac{ssrr}{2(a-v)} \ \& \ RM = q = ur + \frac{a-v}{2} - \frac{ssrr}{2(a-v)}$$ ut ſit $CM + MR = a - v + ur$.

Conſtructio Curvæ.

X. Quia relatio inter r & ϕ datur, ad quodvis intervallum $CR = r$ conſtituatur angulus $CRL = \phi$, &, cum ſit $u = \text{coſ.}\ \phi$, quæratur, vel conſtruatur, valor formulæ integralis $\int udr$, tum pro lubitu aſſumta conſtante $= a$, capiatur recta $RL = a + \int udr$; junctaque CL biſecetur in T, ex quo puncto T ſimul perpendiculum ad CL erigatur TM, rectam RL ſecans in M, erit M non ſolum punctum in curva quæſita, ſed etiam recta TM ejus in M erit tangens, quo facilius conſtructio practice abſolvetur. Erit enim per conſtructionem $CM = ML$, ideoque $CM + MR = RL = a + \int udr$, qui eſt ille ipſe valor $= p$, quem ſupra pro ſumma rectarum $CM + MR$ invenimus; ita ut M ſit punctum in curva, ubi radius CM reflectitur. Deinde ob angulos CMT & LMT æquales ex natura reflexionis perſpicuum eſt, rectam MT eſſe tangentem curvæ in puncto M. TAB. I Fig. 2.

Coroll. 5.

XI. Ex his formulis ſponte liquet, fore ob $ss + uu = 1$; $sx + uy = sr$, ideoque $r = x + \frac{u}{s} y$. Tum vero erit $sy - ux = \frac{a-v}{2} - \frac{ssrr}{2(a-v)}$, ubi ſi loco $ssrr$ valor ante inventus $(sx + uy)^2$ ſubſtituatur, habebitur $(a-v)^2 = 2(a-v)(sy - ux) + (sx + uy)^2$; unde reperitur $a - v = sy - ux - \sqrt{(xx + yy)} = sy - ux + z$.

Coroll. 6.

XII. Quia eſt $dv = rdu = xdu + \frac{uydu}{s} = xdu -$

E yds

$y\,ds$ ob $u\,du = -s\,ds$, erit postremam æquationem coroll. præced. differentiando:

$$-x\,du + y\,ds = s\,dy + y\,ds - u\,dx - x\,du + dz,$$ seu $s\,dy - u\,dx + dz = 0$, seu $dz = u\,dx - s\,dy$. Hinc fit $ss\,dy^2 = (1-uu)\,dy^2 = uu\,dx^2 - 2u\,dx\,dz + dz^2$, ideoque $uu = \frac{2u\,dx\,dz + dy^2 - dz^2}{dx^2 + dy^2}$, unde extracta radice erit: $U = \frac{dx\,dz + dy\sqrt{(dx^2 + dy^2 - dz^2)}}{dx^2 + dy^2}$

Coroll. 7.

XIII. Verum ob $z = \sqrt{(xx+yy)}$ erit $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ atque $\sqrt{(dx^2 + dy^2 - dz^2)} = \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}}$; hincque ergo fiet $u = \frac{2y\,dx\,dy + x\,dx^2 - y\,dy^2}{z(dx^2+dy^2)}$ & $s = \frac{y\,dx^2 - y\,dy^2 - 2x\,dx\,dy}{z(dx^2+dy^2)}$ ideoque $\frac{u}{s} = \frac{2y\,dx\,dy + x(dx^2-dy^2)}{y(dx^2-dy^2) - 2x\,dx\,dy}$; unde reperitur $CR = r = \frac{2xy(dx^2-dy^2) - 2dx\,dy(xx-yy)}{y(dx^2-dy^2) - 2x\,dx\,dy}$ $= 2x + \frac{2zz\,dx\,dy}{y(dx^2-dy^2) - 2x\,dx\,dy}$. Quæ eædem formulæ vulgo ex coordinatis x & y inveniuntur.

Problema II.

TAB. I Fig. 1. XIV. Iisdem datis, quæ ante erant assumta, nempe relatione inter $CR = r$ & angulum $CRM = \Phi$, definire causticam DOo, quæ a radiis reflexis MO per contactum formatur.

Solutio.

Radius reflexus MO causticam tangit in puncto O, ubi cum proximo mO concurrit. Cum igitur sit angulus $ROr = d\Phi =$

$d\varphi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$, posito s sinu & u cosinu anguli φ, sinu toto existente $= 1$: & perpendiculum $r\varrho$ inventum sit $= sdr$ erit $\frac{r\varrho}{RO} = d\varphi$; ideoque $\frac{sdr}{RO} = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$, unde invenitur: $RO = \frac{sudr}{ds} = \frac{-ssdr}{du}$. Quodsi jam ex hoc puncto O ad axem AB perpendiculum ducatur OS, erit $SO = s.\ RO = \frac{-ssudr}{ds} = \frac{-s^3dr}{du}$ & $RS = u.\ RO = \frac{suudr}{ds} = \frac{-ssudr}{du}$, & $CS = r + \frac{suudr}{ds}$. Unde, si pro caustica vocetur abscissa $CS = X$, & applicata $SO = Y$ erit:

$$CS = X = r + \frac{suudr}{ds} = r - \frac{ssudr}{du}.$$

$$SO = Y = \frac{ssudr}{ds} = \frac{-s^3\,dr}{du}.$$

Vel ponatur anguli CRM cotangens $= t$, seu sit tang. $RMP = t$, erit $t = \frac{u}{s}$, & $u = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$ & $s = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, unde fit $ds = \frac{-tdt}{(1+tt)\sqrt{(1+tt)}}$, & $\frac{ds}{su} = \frac{-dt}{\sqrt{(1+tt)}}$. Quare habebitur $RO = \frac{-dr\sqrt{(1+tt)}}{dt}$; hincque $SO = \frac{-dr}{dt}$ & $RS = \frac{-tdr}{dt}$; ita ut sit $X = \frac{rdt - tdr}{dt}$ & $Y = \frac{-dr}{dt}$; quæ formulæ præcedentibus sunt simpliciores. Denique longitudo curvæ causticæ DO assignari poterit. Cum enim sit ejus elementum $Oo = Cm + mo - Cm - mO = Cm + mo - CM - MO$ ob $CM + MO = Cm + mO$, erit $Oo =$ diff. $(CM + MO)$ ideoque integrando tota curva $DO = CM + MO$

$+ MO + C$. Est vero $CM + MO = CM + MR + RO = p + \frac{sudr}{ds} = a + \int udr + \frac{sudr}{ds}$; ideoque $DO = a + C + \int udr + \frac{sudr}{ds} = a + C + \int \frac{tdr}{\surd(1+tt)} \frac{-dr\surd(1+tt)}{dt}$.

Hinc, posito dt constante, fiet $Oo = \frac{-ddr\surd(1+tt)}{dt}$, ergo tota curva $DO = C - \int \frac{ddr\surd(1+tt)}{dt}$ *Q. E. I.*

Coroll. 1.

XV. Cum sit arcus causticæ $DO = CM + MO - C$, manifestum est, curvam AMB describi, si causticæ DO filum circumplicetur, cujus alter terminus in puncto C sit fixus; hocque filum ope stili in M tendatur. Tum enim evolutione hujus fili stilus curvam AMB describet, uti constat.

Coroll. 2.

XVI. Si ponamus, causticam DO axem AB in D tangere, ita ut curva AMB axi AB in A normaliter insistat; dum punctum M in A cadit, causticæ punctum O in D incidet; fietque $DO = o$, & $CM + MO = CA + AD$; unde erit $o = CA + AD - C$. Constans ergo adhuc indeterminata C erit $= CA + AD$; ideoque ubique erit $DO = CM + MO - CA - AD$.

Coroll. 3.

XVII. In curva ergo caustica DO præterea sponte datur subtangens $RS = \frac{suudr}{ds} = \frac{-tdr}{dt}$, & ipsa tangens $RO = \frac{sudr}{ds} = \frac{-dr\surd(1+tt)}{dt}$; quæ producta usque ad curvam AMB radium reflexum MO exhibebit.

Coroll. 4.

XVIII. Erit autem $MO = p + \frac{sudr}{ds} - CM = q + \frac{sudr}{ds}$.

At

At ante invenimus $q = \frac{pp - rr}{2(p - ur)}$, unde erit $MO =$ $\frac{pp - rr}{2(p - ur)} + \frac{sudr}{ds}$, ſin autem ponamus $\int r\,du = v$, ut ſit $p = a + ur - v$, fiet $MO = \frac{a - v}{2} + ur - \frac{ssrr}{2(a - v)} +$ $\frac{sudr}{ds}$; quæ longitudo ſi tangenti OR tribuatur, habebitur punctum M.

Scholion.

XIX. Cum igitur ex æquatione inter angulum $CRM =$ ϕ & intervallo $CR = r$ propoſita tam ipſa curva AMB reflectem, quam ejus cauſtica DO determinetur; ita quidem, ut infinitæ curvæ AMB inveniantur, quæ omnes eandem habeant cauſticam DO: hujusmodi relatio inter r & ϕ commodiſſime adhibebitur ad Problemata, quibus curvæ reflectentes data quapiam proprietate præditæ requiruntur, ſolvenda, cujusmodi eſt Problema propoſitum, cujus ſolutionem hic tradere conſtitui. Etſi autem ex hac relatione inter ϕ & r coordinatas orthogonales $CP = x$ & $PM = y$ elicuimus, unde reliqua curvæ AMB ſymtomata cognoſci poſſunt, tamen plures curvæ hujus affectiones commodius ex angulo ϕ & intervallo r definientur. Demittatur enim ex C in rectam RM perpendiculum CV, atque ob $CR = r$, $CRV =$ ϕ & ſin. $\phi = s$ atque coſ. $\phi = u$ erit $CV = sr$ & $RV = ur$. Tum, quia eſt $RL = p = a + \int u\,dr = a + ur - \int r\,du = a +$ $ur - v$, quantitatem hanc p tanquam datam ſpectare licebit. Erit ergo $LV = p - ur$, & anguli CLR tangens erit $=$ $\frac{CV}{LV} = \frac{sr}{p - ur}$: cujus anguli cum ſit CMT, quem radius incidens CM ac propterea quoque reflexus cum tangente format, complementum erit tangens ang. $CMT = \frac{p - ur}{sr}$. TAB. I Fig. 2.

 Coroll. 1.

Coroll. 1.

TAB. I Fig. 1. XX. Quia igitur eſt tang. $CMA =$ tang. $OMm = \frac{p - ur}{sr}$; erit ejusdem anguli ſecans $= \frac{\sqrt{(pp - 2upr + rr)}}{sr}$, ideoque ſinus $= \frac{p - ur}{\sqrt{(pp - 2upr + rr)}}$ & coſinus $= \frac{sr}{\sqrt{(pp - 2upr + rr)}}$. Ergo habebitur ſinus dupli anguli $= \frac{2sr(p - ur)}{pp - 2upr + rr}$, qui ſimul eſt ſinus anguli CMR; cujus coſinus erit $= \frac{pp - 2pur + (uu - ss)rr}{pp - 2upr + rr} = 1 - \frac{2ssrr}{pp - 2upr + rr}$, & tang. $CMR = \frac{2sr(p - ur)}{pp - 2upr + (uu - ss)rr}$.

Coroll. 2.

XXI. In triangulo MOm invenimus eſſe angulum $MOm = d\phi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$; $MO = mO = \frac{pp - rr}{2(p - ur)} + \frac{sudr}{ds}$, & ſin. $OMm = \frac{p - ur}{\sqrt{(pp - 2upr + rr)}}$. Hinc ergo habebitur hæc proportio: ſin. $OMm : Om =$ ſin. $MOm : Mm$ $\frac{p - ur}{\sqrt{(pp - 2upr + rr)}} : \frac{pp - rr}{2(p - ur)} + \frac{sudr}{ds} = \frac{ds}{u}$: unde fit $Mm = \frac{(pp - rr)ds + 2sudr(p - ur)}{2u(p - ur)^2} \sqrt{(pp - 2upr + rr)}$.

Coroll. 3.

XXII. Si concipiatur ducta recta CO, ac brevitatis gratia ponatur $RO = \frac{sudr}{ds} = w$, erit ex triangulo CRO recta

$CO =$

$CO = \sqrt{(rr + 2urw + ww)}$. Tum in triangulo CMO erit: CO : fin. $CMO = CM$: fin. COM. $\sqrt{(rr + 2urw + ww)}$:
$$\frac{2rs(p-ur)}{pp-2upr+rr} = \frac{pp-2upr+rr}{2(p-ur)} : \frac{rs}{\sqrt{(rr+2urw+ww)}}$$
atque cof. $COM = \frac{w+ur}{\sqrt{(rr+2urw+ww)}}$. Hinc fit tang.
$$COM = \frac{rs}{w+ur} \text{ \& cot. } COM = \frac{w}{rs} + \frac{u}{s} = \frac{udr}{rds} + \frac{u}{s} = \frac{u(sdr+rds)}{rsds}.$$
Unde reliqui anguli & lineæ, quæ forte defiderantur, facile determinari poterunt.

Coroll. 4.

XXIII. Producatur tangens MT, donec axi AR occurrat in T, ducaturque normalis MN, erit ang. $CMN = NMR$, ejusque complementum $= CMT$; hinc erit fin. $NMR =$ TAB. I Fig. 3.
$$\frac{sr}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}} \text{ \& cof. } NMR = \frac{p-ur}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}}:$$
unde ob fin. $NRM = s$ & cof. $NRM = u$ erit fin. $TNM =$
$$\text{cof. } T = \frac{sp}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}} \text{ \& fin. } T = \frac{up-r}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}},$$
atque fin. $TMR =$ fin. $CMT = \frac{p-ur}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}}$.

Coroll. 5.

XXIV. Cum igitur fit $RM = q = \frac{pp-rr}{2(p-ur)}$ erit in triangulo NMR ob omnes angulos datos: fin. $TNM : RM =$ fin. $RMN : RN =$ fin. $R : MN$
$$\frac{sp}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}} : \frac{pp-rr}{2(p-ur)} = \frac{sr}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}} : \frac{r(pp-rr)}{2p(p-ur)} = s : \frac{(pp-rr)\sqrt{(pp-2upr+rr)}}{2p(p-ur)}.$$
Deinde in triangulo

TMR

TMR erit: fin. $T : RM =$ fin. $TMR : TR =$ fin. $R : TM$

$$\frac{up-r}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}} : \frac{pp-rr}{2(p-ur)} = \frac{p-ur}{\sqrt{(pp-2upr+rr)}}:$$

$$\frac{pp-rr}{2(up-r)} = s : \frac{s(pp-rr)\sqrt{(pp-2upr+rr)}}{2(p-ur)(up-r)}.$$

Coroll. 6.

XXV. Cum igitur fit $RN = \frac{r(pp-rr)}{2p(p-ur)}$ erit $CN = \frac{r(pp-2upr+rr)}{2p(p-ur)}$ & ob $TR = \frac{pp-rr}{2(up-r)}$ erit $CT = \frac{pp-2upr+rr}{2(up-r)}$. Hinc fiet $CT + CN = TN = \frac{(pp-rr)(pp-2upr+rr)}{2p(p-ur)(up-r)}$, & $CT - CN = \frac{(pp-2upr+rr)^2}{2p(p-ur)(up-r)}$. At eft $CT.CN = \frac{r(pp-2upr+rr)^2}{4p(p-ur)(up-r)}$; unde fit $\frac{CT.CN}{CT-CN} = \frac{r}{2}$ & $r = CR = \frac{2CT.CN}{CT-CN}$.

Coroll. 7.

XXVI. Hæc ultima æqualitas $CR = \frac{2CT.CN}{CT-CN}$ facile per fola principia Geometriæ obtinetur. Cum enim fit fin. TMC = fin. TMR, erit fin. T: fin. $TMC = CM : CT$ & fin. T: fin. $TMR = RM : TR$, ideoque $CM : CT = RM : TR$ & alternando $CM : RM = CT : TR$. At ob angulum CMR bifectum erit $CM : RM = CN : RN$, hincque $CN : RN = CT : TR$, feu $CN : CR - CN = CT : CT + CR$: unde componendo $CN : CR = CT : 2CT + CR$, feu $CN : CT = CR : 2CT + CR$ & dividendo $CN : CT - CN = CR : 2CT$, ergo $CR = \frac{2CT.CN}{CT-CN}$.

Problema

Problema III.

XXVII. Si radii CM axi AB paralleli in curvam EMB incidant, atque ad quodvis axis punctum R, ubi radius reflexus MRO transit, detur angulus ARM; hinc definire naturam curvae reflectentis EMB. TAB. I Fig. 4.

Solutio.

Sumto in axe pro arbitrio puncto A, ex eo erigatur perpendicularis AE, radios incidentes CM normaliter secans in C, voceturque intervallum $AR = r$, & angulus $ARM = \phi$, sitque sin. $\phi = s$ & cos. $\phi = u$ existente sinu toto $= 1$, ut sit $ss + uu = 1$ & $d\phi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Jam ex M ad axem AB demittatur perpendiculum MP, & vocetur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$: atque ex datis r & ϕ valores harum coordinatarum x & y definiri oportebit. Concipiatur radius incidens cm priori CM infinite propinquus & parallelus, qui reflectatur in mO, ut O sit intersectio horum duorum radiorum reflexorum. Elementum ergo curvae Mm considerari poterit tanquam particula parabolae, focum in O & axem ipsi AB parallelum habentis; hincque ex natura parabolae erit $CM + MO = cm + mO$. Erit vero ob situm proximum $Rr = dr$ & ang. $Arm = \phi + d\phi$, unde fiet angulus $ROr = d\phi$. Ex r ad RO ducatur perpendiculum $r\varrho$, ob angulum $rR\varrho = \phi$ erit $r\varrho = dr$ sin. $\phi = s\,dr$ & $R\varrho = dr$ cos. $\phi = u\,dr$. Vocetur nunc $CM + MR = p$, erit $cm + mr = p + dp$: cum igitur sit $CM + MO = cm + mO$, erit $CM + MR + RO = cm + mr + rO$, ideoque $p + RO = p + dp + rO$, seu $dp = RO - rO = R\varrho = u\,dr$, unde fiet $p = a + \int u\,dr$. Sit jam porro $RM = q$, erit $MP = sq$ & $RP = uq$, hincque $AP = x = r - uq$, & $PM = y = sq$. Est vero $CM + MR = x + q = p = a + \int u\,dr$; unde fit $q = p - x$, & $x = r - up + ux$, ita ut sit $x = \frac{r - up}{1 - u}$ & $q = \frac{p - r}{1 - u}$. Ex his ergo si detur relatio inter r & ϕ, ex qua capiatur $p = a + \int u\,dr$, coordinatae x & y ita determinabuntur,

F tur,

tur, ut sit: $AP = x = \frac{r - up}{1 - u}$ & $PM = y = \frac{s(p-r)}{1-u}$. Unde æquatio inter coordinatas pro curva quæsita obtinebitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

XXVIII. Quia in valore $p = a + \int u\,dr$ constans a pro arbitrio assumi potest, innumerabiles lineæ curvæ exhiberi possunt, quæ omnes eandem relationem inter angulum $ARM = \phi$ & intervallum $AR = r$ præbent: hæque curvæ erunt algebraicæ, quoties formula $\int u\,dr$ integrationem admittit.

Coroll. 2.

XXIX. Cum sit $\int u\,dr = ur - \int r\,du$, ponatur $\int r\,du = v$ ut sit $r = \frac{dv}{du}$, erit $p = a + ur - v = a + \frac{u\,dv - v\,du}{du}$. Hinc fit $MR = q = \frac{a - (1-u)r - v}{1-u} = \frac{a-v}{1-u} - r$, atque $AP = x = (1+u)r - \frac{u(a-v)}{1-u}$. $PM = y = \frac{s(a-v)}{1-u} - \int r$.

Coroll. 3.

XXX. Ex his formulis sequitur etiam fore: $sx + uy = sr$ & $sy - ux = \frac{a-v}{1-u} - (1+u)r$; unde efficitur $sy + (1-u)x = a - v$, & $x + \frac{uy}{s} = r$. Hinc ob $dv = r\,du = x\,du + \frac{uy\,du}{s} = x\,du - y\,ds$ erit differentiando: $s\,dy + y\,ds + (1-u)dx - x\,du = -x\,du + y\,ds$, seu $s\,dy + (1-u)\,dx = 0$ vel $\frac{dx}{dy} = \frac{-s}{1-u} = -\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

Coroll. 4.

XXXI. At æquatio $-s\,dy = (1-u)\,dx$ quadrata dabit $(1-uu)\,dy^2 = (1-u)^2 dx$, seu $(1+u)\,dy^2 = (1-u)\,dx^2$; unde fit $u = \frac{dx^2 - dy^2}{dx^2 + dy^2}$ & $s = -(1-u)\frac{dx}{dy} = \frac{-2\,dx\,dy}{dx^2 + dy^2}$: ideoque

ideoque $\frac{s}{u} = \frac{-2dxdy}{dx^2-dy^2}$ & $r = x + \frac{uy}{s} = x -$ $\frac{y(dx^2-dy^2)}{2dxdy} = \frac{2xdxdy - ydx^2 + ydy^2}{2dxdy}$, vel $AR =$ $r = x - \frac{ydx}{2dy} + \frac{ydy}{2dx}$.

Constructio Curvæ.

XXXII. Quia pro quovis axis puncto R, ubi est intersectio radii reflexi, datur angulus ARM, in recta RM producta capiatur $RL = p = a + \int u\,dr$, quod intervallum, nisi $\int u\,dr$ sit integrabile, per quadraturas construi potest. Tum in axe capiatur $RK = RL$, & jungatur recta KL, cujus cum AE intersectio notetur in C. Per C agatur recta CM axi AB parallela, donec recta RL occurrat in M, erit M punctum in curva, & CM radius incidens, cui reflexus MR respondet. Deinde, si CL bisecetur in T, erit recta MT tangens curvæ. Nam ob triangula EMC & LRK similia, erit $LM = CM = AP$, ideoque $RL = p = RM + CM$, uti requiritur. Deinde, quia recta MT angulum CML bisecat, producta TM in t erit $CMT = RMt$, ideoque ex natura reflexionis TMt tangens curvæ in M. TAB. I Fig. 5.

Coroll. 5.

XXXIII. Cum igitur, producta tangente TM in t usque, ubi axem AB intersecat, sit ang. $t = CMT = RMt$, erit $RM = Rt$, ideoque $Rt = q = \frac{p-r}{1-u}$. Deinde, si ducatur MN ipsi LK parallela, erit ea ad curvam in M normalis, & $RM = RN$: unde erit $Rt = RN$, seu $Pt - PR = PR + PN$, hincque $PR = \frac{1}{2}Pt - \frac{1}{2}PN$.

Coroll. 6.

XXXIV. Si dicatur $AP = x$, $PM = y$, erit $Pt = \frac{-ydx}{dy}$ & $PN = \frac{-ydy}{dx}$, ideoque $PR = \frac{-ydx}{2dy} + \frac{ydy}{2dx}$: & AR

$= x -$

$= x - \frac{y\,dx}{2\,dy} + \frac{y\,dy}{2\,dx} = r$: quæ eſt eadem æquatio, quam ſupra (§. XXXI) invenimus.

Problema IV.

TAB. I Fig. 4. XXXV. Iisdem manentibus, quæ in Problemate præcedente erant aſſumta, nempe ex data relatione inter ſpatium $AR = r$ & angulum $ARM = \varphi$, invenire cauſticam DOo, quam radii reflexi per contactum formant.

Solutio.

Quoniam radius reflexus MO cauſticam tangit in puncto O, ubi cum radio ſibi proximo mO concurrit; ex angulo $ROr = d\varphi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$ & $r\varrho = s\,dr$ erit $\frac{r\varrho}{RO} = \frac{s\,dr}{RO} = \frac{ds}{u}$, ideoque $RO = \frac{su\,dr}{ds} = \frac{-ss\,dr}{du}$. Ducatur jam ex O ad axem AB perpendiculum OS, erit $OS = \frac{ssu\,dr}{ds} = \frac{-s^3\,dr}{du}$ & $RS = \frac{suu\,dr}{ds} = \frac{-ssu\,dr}{du}$: unde fit $AS = r - \frac{ssu\,dr}{du}$. Si ergo vocetur cauſticæ DO abſciſſa $AS = X$ & applicata $SO = Y$ erit $X = r - \frac{ssu\,dr}{du} = r + \frac{suu\,dr}{ds}$ & $Y = \frac{ssu\,dr}{ds} = \frac{-s^3\,dr}{du}$. Vel ponatur, ut ſupra (§. XIV), anguli $CRM = \varphi$ cotangens $= t$, ita ut ſit tang. $RMP = t$, fiet $RO = \frac{-dr\sqrt{(1+tt)}}{dt}$; $SO = \frac{-dr}{dt}$, & $RS = \frac{t\,dr}{dt}$; hincque $X = \frac{r\,dt - t\,dr}{dt}$ & $Y = \frac{-dr}{dt}$. Denique longitudo curvæ cauſticæ DO aſſignari poterit. Cum enim ſit ejus elementum $Oo = cm + mo - cm - mO$ ob $cm + mO = CM + MO$, erit $Oo = cm + mo - CM - MO = \text{diff.}(CM + MO)$; ideoque

ideoque integrando $DO = CM + MO \pm C$. Eſt vero $CM + MO = CM + MR + RO = p + \frac{sudr}{ds} = a + \int u\,dr + \frac{sudr}{ds}$; unde fit longitudo cauſticæ $DO = a \pm C + \int udr + \frac{sudr}{ds} = a \pm C + \frac{\int tdr}{\sqrt{(1+tt)}} - \frac{dr\sqrt{(1+tt)}}{dt}$, ſeu, ſi dt conſtans aſſumatur, erit $DO = a \pm C - \int \frac{ddr\sqrt{(1+tt)}}{dt} = a \pm C + \int \frac{suddr}{ds} = a + C - \int \frac{ssddr}{du}$. *Q. E. I.*

Coroll. 1.

XXXVI. Cum ſit arcus cauſticæ $DO = CM + MO \pm C$, ſi ponamus, cauſticam in D axem AB tangere, ita ut radio incidenti AB reſpondeat reflexus BD; translato puncto M in B fiet $DO = 0$, $CM = AB$ & $MO = BD$, ideoque $0 = AB + BD \pm C$ & $\pm C = -AB + BD$, ita ut ſit $DO = CM + MO - AB - BD$: ſeu potius, quia elementum Oo in figura negative capi deberet, erit ſignis mutatis $DO = AB + BD - CM - MO$.

Coroll. 2.

XXXVII. Quia eſt $CM = AP$ & $AB - CM = BP$, erit $DO = BP + BD - MO$; prout quidem cauſtica in figura exhibetur; ſin autem cauſtica vel retro, vel ſurſum vergat, facile patet, quasnam lineas quovis caſu negative accipi oporteat; neque ergo opus eſt, ut hanc formulam ad quemvis caſum ſeorſim accommodemus. Neque etiam obſtat, ipſam cauſticam in figura male eſſe expreſſam.

Scholion.

XXXVIII. His igitur Problematibus hoc jam ſumus aſſecuti, ut ad cognitionem linearum curvarum ſufficiat, noſſe relationem inter ſitum cujusque axis puncti R, & angulum DRM, ſub quo radius reflexus in eo puncto R axi occurrit, ſive radii incidentes ex quopiam axis puncto divergant, ſive axi ſint paralleli; curva cauſticaque pro cognita erit habenda, ſi detur relatio inter ſpatium r & angulum φ; ac ſi daretur

 æqua-

æquatio inter coordinatas x & y; quoniam hæc ex illa facile elicitur. In hoc autem maximum versatur subsidium ad Problema catoptricum propositum resolvendum. Si enim solutionem a coordinatis x & y inchoare vellemus, non solum in calculos prolixissimos delaberemur, sed etiam vix præcipue Problematis conditioni, qua bina reflexionis puncta ad eandem lineam curvam pertinere debent, satisfacere possemus. Easdem fere difficultates offenderemus, si, uti in curvis, a mobili circa datum centrum virium descriptis, fieri solet, æquationem inter distantiam cujusque curvæ puncti M a foco radiante C, & perpendiculum in tangentem ex C demissum, investigare voluerimus; etiamsi has quidem difficultates ita superaverim, ut solutionem & constructionem hujus Problematis, quam in *Actis Lipsiensibus Mens. April. Anni 1746 pag. 230 seq.* exhibui, hac via elicuerim. Verum postmodum deprehendi, eandem solutionem multo facilius obtineri, si æquatio inter quantitates supra assumta r & φ investigetur, qua Problemati satisfiat. Hanc igitur solutionem proxime exponere constitui, &, quia duos casus distinguere convenit, primum curvas Problemati satisfacientes indagabo, quando radii incidentes inter se sunt paralleli, seu ex puncto radiante infinitum distante proficiscuntur. Deinde vero alterum casum, qui in propositione solus commemoratur, ubi radii incidentes ex dato puncto divergant, solutum dabo, atque inprimis operam dabo, ut curvas satisfacientes algebraicas exhibeam, & formulis generalibus complectar. Id ipsum facturus sum *Mense* horum *Actorum* proximo.

Vorbereitung zu der Hansischen Chronick, &c.
hoc est,

PRÆPARATIO AD CHRONICON HANSÆATIcum, quæ complectitur discussionem quæstionum: Unde cognomen urbium Hansæaticarum sit ortum; qui eventus occasionem Hansæ Teutonicæ constituendæ dederint; quæ fuerit pristina urbium Hansæaticarum conditio; & quid Hansæ Teutonicæ hodierno die sit reliquum; cum nonnullis annotationibus, ad majorem illustrationem facientibus, consignata. Autore D. JO. PETRO WILLEBRANDT.

Lubecæ,

Lubecæ, 1747, fol.

Plag. 9.

Annus eſt, & quod excurrit, ex quo Conſultiſſimus Autor conſilium ſuum de publicanda hiſtoria urbium Hanſæaticarum publice aperuit, quo facto, multi hiſtoriæ patriæ, cumprimis antiquitatum ſeptentrionalium, cupidi, ipſum coram & per literas exſtimularunt, ut, quam primum fieri poſſet, fidem datam liberaret. Horum igitur deſideriis facturus ſatis, literarum formis hoc opuſculum divulgandum curavit, ut rationem inſtituti ſui omnibus exponeret, eosdemque certiores faceret, promiſſos Commentarios brevi ſecuturos eſſe. Præſens introductio *tribus* abſolvitur *Capitibus*, quorum ſingulis propoſitas quæſtiones dextre expedit, priſtinam & hodiernam faciem urbium illarum continua ſerie repræſentans. Fidem hiſtoriæ ſuæ conciliaturus, illos nominat, per quos profecit, *Antonium* nempe *Colerum*, illuſtrem reip. Lubecenſis quondam Conſulem, virum ſapientem, qui rebus plurimis non interfuit ſolum, verum etiam præfuit, qui Commentarios de urbibus Hanſæaticis, manu exaratos, reliquit. Contulit præterea Chronica rara urbis Lubecenſis ac aliarum, quæ pariter ſcripto tantum conſignata in ſcriniis adhuc delituerint, quæ accurate cum relationibus *Colerianis* conſentire, ſicque ad confirmationem harum plurimum facere, ipſo actu deprehendit. Non igitur Conſ. Autor incertos rumuſculos, qui ore circumferuntur, non ambiguæ fidei homines, qui, quicquid de rebus priſcis vel auribus accipiunt, vel uſſibi ſcriptum inveniunt, nullo inſtituto examine, convaſant, orbem non tam de præteritorum ſeculorum rebus erudientes, quam fucum eidem facientes, ſed illos, ſecutus eſt, quibus tabularia publica adire, literas, fœdera, rerumque agendarum rationes, propius noſſe, ac coram intueri, datum fuit. *Cap. I* nomen urbium Hanſæaticarum inveſtigaturus, ad examen revocat diverſas virorum eruditorum hariolationes. *Adr. Junius* & *Beſoldus* appellationis rationem arceſſunt ab antiquo *hans*, quod majoribus noſtris aliquid *magnum* atque *excelſum* deſignavit. *Arumæus* & *Paulus Matthæus Webnerus* dictas eſſe contendunt quaſi *An-See-Stædte*, urbes maritimas. *Gundlingius* & alii natales nominis hujus repetunt a Germanico *handeln*, cum commerciorum feliciter tractandorum ergo urbes hæ in ſocietatem coierint. Quæ derivationis rationes, cum locum ſuum minus tueri poſſint, quod ſolide, ſed tamen modeſte, oſtenditur, eximius *Willebrandus* noſter ſe recipit ad antiquam vocem *hanſa*, quæ illis temporibus *ſocietatem*, *conjunctionem*, & *agmen*, notabat, quod ex convenientia aliarum vocum antiquarum Germanicarum, potiſſimum privilegio *Henrici III*, Angliæ Regis, Lubecæ, principi urbium illarum, A. 1272 d. 5 Jan. indulto, it evictum. Verba ſunt: *Conceſſimus inſuper, quantum ad nos pertinet, burgenſibus & mercatoribus prædictis, quod ipſi habeant Hanſam ſuam*, propriam conſociationem. Adoptarunt hanc ſententiam jamdum viri inſignes, *Hagemeiſterus*, *Aldermannus*, alii. Igitur urbes *hanſam habentes*, *urbes hanſeaticæ*, *hanſa Teutonica*, ſignificant *conſociationem quarundam urbium Germanicarum, ob unum eundemque finem certo fœdere conjunctarum*. *Cap. II* originem hujus ſocietatis pandit. Ubi laudatiſſimus Imperator *Fridericus II*, *Henrici VI* filius, jura ſua & imperii adverſus iniqua Pontificum molimina forti animo defenderat, Jupiter iſte Capitolinus hoc adeo indigne